

## KANAT PROFİLLERİ ETRAFINDA SIKIŞTIRILAMAZ AKIM

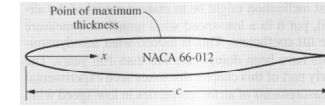
*Of the many problems now engaging attention, the following are considered of immediate importance and will be considered by the committee as rapidly as funds can be secured for the purpose.... The evolution of more efficient wing sections of practical form, embodying suitable dimensions for an economical structure, with moderate travel of the center-of-pressure and still affording a large range of angle-of-attack combined with efficient action.*

From the first Annual Report of the NACA, 1915

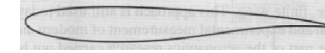
Designation	Date	Diagram
Wright	1908	
Bleriot	1909	
R. A. F. 6	1912	
R.A.F. 15	1915	
U.S.A. 27	1919	
Joukowski (Göttingen 430)	1912	
Göttingen 398	1919	
Göttingen 387	1919	
Clark Y	1922	
M-6	1926	
R. A. F. 34	1926	
N.A.C.A. 2412	1933	
N.A.C.A. 23012	1935	
N.A.C.A. 23021	1935	

II. Dünya savaşı öncesi düşük hızlı profiller

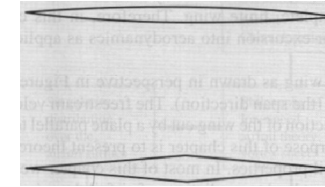
## Kanat profillerinin gelişimi



NACA laminar profilleri



Kritiküstü profil



Süpersonik profiller

## Kanat kesit profilinin şekli neden önemlidir?

Bir uçak kanadının

- Sıfır taşıma hücum açısı,
- Taşıma eğrisi eğimi,
- Tutunma kaybı (stall) bölgesindeki tabiatı,
- Aerodinamik merkezi, (ac) etrafındaki yunuslama momenti
- Parazit sürükleme

vb gibi 3-boyutlu karakteristiklerini, önemli ölçüde kesit profilinin şekli belirler.

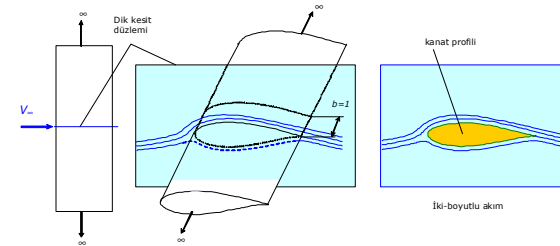
Kesit profili karakteristiklerini kullanarak bir kanadın 3-Boyutlu karakteristikleri elde edilebilir.

## Kanat profili nedir?

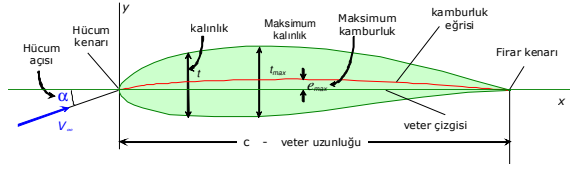
- Bütün kesit profilleri aynı olan,
- dikdörtgenel üst görünümü,
- sonsuz açıklıklı bir kanattır.

Öyle ki;

Bu kanat etrafındaki akım 2-boyutludur



## Kanat profili geometrisi



<b>Kalınlık oranı</b>	$\delta = \frac{t_{max}}{c}$	$\delta < \%10$ $\delta \sim \%10-14$ $\delta > \%14$	ince profil (yüksek hızlarda) orta kalınlıkta profil kalın profil (düşük hızlarda)
<b>Kamburluk oranı</b>	$\gamma = \frac{e_{max}}{c}$	$\gamma < \% 4-5$ $\gamma > \% 4-5$	küçük kamburluk (uçaklarda) büyük kamburluk (kompresör-türbin pallerinde)

## NACA profilleri – 4 rakamlı seri

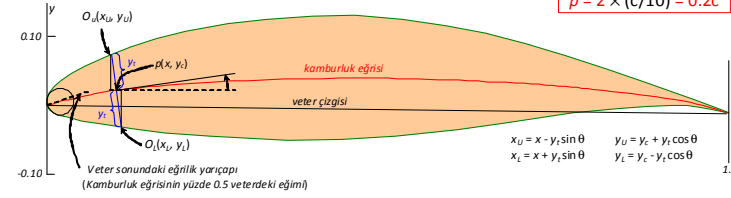
Jacobs EN, Ward KE, Pinkerton RM,  
The characteristics of 78 related airfoil sections  
from tests in the variable density wind tunnel,  
NACA TR-460, 1933

NACA **2412**

**Kamburluk oranı**  
 $m = 2 / 100 = 0.02$

**Maksimum kamburluk noktası konumu**  
 $p = 2 \times (c/10) = 0.2c$

**Kalınlık oranı**  
 $t = 12 / 100 = 0.12$



Kalınlık dağılımı

$$\pm y_t = \frac{t}{0.20} (0.29690\sqrt{x} - 0.12600x - 0.35160x^2 + 0.28430x^3 - 0.10150x^4)$$

Kamburluk eğrisi

$$y_c = \begin{cases} \frac{m}{p^2} (2px - x^2) & x \leq m \\ \frac{\gamma}{(1-p)^2} [(1-2p) + 2px - x^2] & x \geq m \end{cases}$$

$m \rightarrow \gamma$   
 $p \rightarrow x_\gamma$   
 $t \rightarrow \delta$

## NACA profilleri – 5 rakamlı seri

Abbott IH, Doenhoff AE, Stivers LS,  
Summary of airfoil data,  
NACA TR-824, 1946

NACA **23012**

**Tasarım taşıma katsayısı**  
 $2 \times (3/2)/10 = 0.3$

**Maksimum kamburluk noktası konumu**  
 $30/2 \times (c/100) = 0.15c$

**Kalınlık oranı**  
 $12 / 100 = 0.12$

## NACA profilleri – 6 rakamlı seri – Laminer profiller

Abbott IH, Doenhoff AE, Stivers LS,  
Summary of airfoil data,  
NACA TR-824, 1946

NACA **65-218**

**Bu serinin etiket numarası**

**Minimum basınç noktası konumu**  
 $5 \times (c/10) = 0.5c$

**Tasarım taşıma katsayısı**  
 $2 / 10 = 0.2$

**Kalınlık oranı**  
 $18 / 100 = 0.18$

## Kanat profillerinin performans karakteristikleri

Taşıma katsayısı  $C_L = \frac{L}{(1/2)\rho V_\infty^2 c} = C_L(\text{Re}, M, x, y, \alpha)$

Sürüklenme katsayısı  $C_D = \frac{D}{(1/2)\rho V_\infty^2 c} = C_D(\text{Re}, M, x, y, \alpha)$

Yunusma katsayısı  $C_{M_y} = \frac{M_y}{(1/2)\rho V_\infty^2 c^2} = C_{M_y}(\text{Re}, M, x, y, \alpha)$

## Kanat profilinin performansı nasıl belirlenebilir?

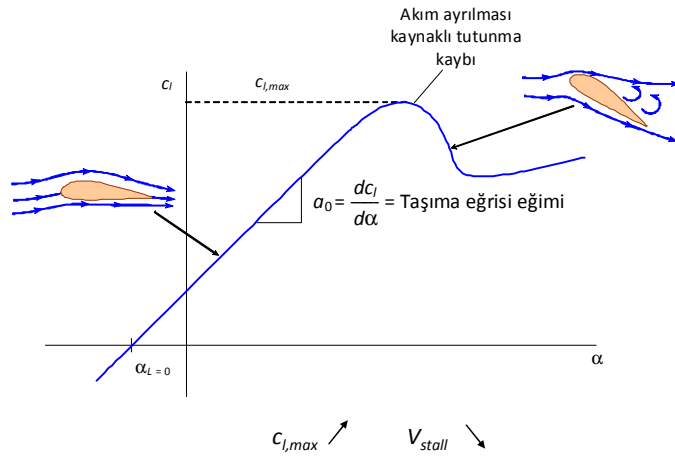
DeneySEL çalışmalarla:

- Taşıma ve yunuslama için basınç dağılımı ölçümü
- Sürüklenme için iz taraması

Teorik çalışmalarla:

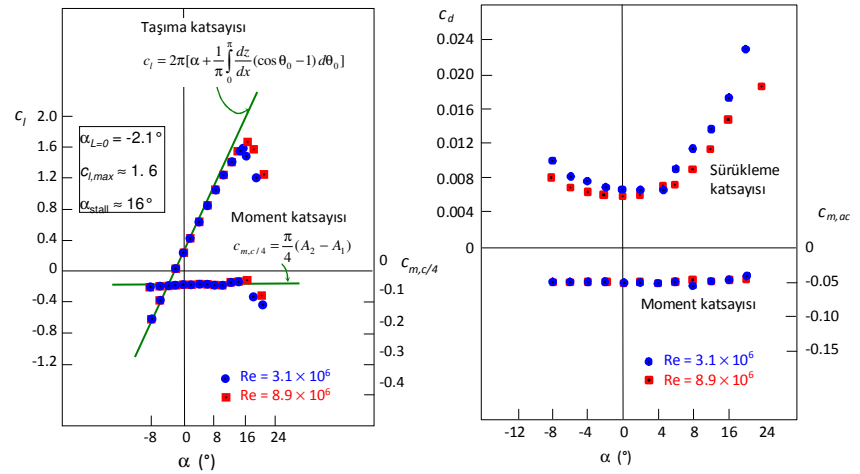
- Potansiyel akım çözümleri
- Potansiyel akım + sınır tabaka etkileşim yöntemleri
- N/S çözümleri

## Kanat profillerinin performans karakteristikleri



## Kanat profillerinin performans karakteristikleri

NACA 2412 profili



## Örnek problem

Deniz seviyesinde standart koşullarda 70 m/s hızdaki serbest akımda yer alan 0.64 m veter uzunluğuna sahip NACA 2412 profilinin birim açıklık başına taşıması 1254 N/m dir. Hücum açısını ve birim açıklık başına sürükleme kuvvetini hesaplayınız.

## Çözüm

Deniz seviyesinde standart koşullarda  $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \frac{1}{2} \times (1.23) \times (70)^2 = 3013.5 \text{ N/m}^2$$

$$c_l = \frac{L'}{q_\infty S} = \frac{L'}{q_\infty (c \times 1)} = \frac{1254}{3013.5 \times 0.64} = 0.65 \Rightarrow c_l - \alpha \text{ eğrisinden} \Rightarrow \alpha = 4^\circ$$

Deniz seviyesinde standart koşullarda,  $\mu = 1.789 \times 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$

$$Re = \frac{\rho V_\infty c}{\mu} = \frac{1.23 \times 70 \times 0.64}{1.789 \times 10^{-5}} = 3.08 \times 10^6$$

$$c_d - \alpha \text{ eğrisinden } Re = 3.1 \times 10^6 \text{ için } c_d = 0.0068$$

$$D' = q_\infty S c_d = q_\infty (c \times 1) c_d = 3013.5 \times 0.64 \times 0.0068 = 13.1 \text{ N/m}$$

## Örnek problem

Deniz seviyesinde standart koşullarda 70 m/s hızdaki serbest akımda yer alan 0.64 m veter uzunluğuna sahip NACA 2412 profilinin birim açıklık başına aerodinamik merkez etrafındaki momentini hesaplayınız.

## Çözüm

Deniz seviyesinde standart koşullarda  $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = \frac{1}{2} \times (1.23) \times (70)^2 = 3013.5 \text{ N/m}^2$$

$$c_{m,ac} - \alpha \text{ eğrisinden} \Rightarrow c_{m,ac} = -0.05$$

$$M'_{ac} = q_\infty S c c_{m,ac} = 3013.5 \times 0.64 \times (-0.05)$$

$$M'_{ac} = -61.7 \text{ Nm/m}$$

## Örnek problem

NACA 2412 profili için  $0^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $8^\circ$  ve  $12^\circ$  hücum açılarındaki taşıma/sürükleme oranlarını hesaplayınız.

## Çözüm

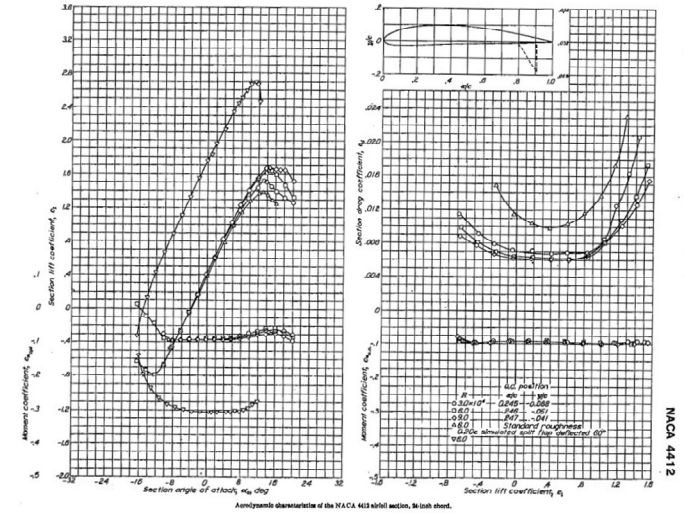
$$\frac{L}{D} = \frac{q_\infty S c_l}{q_\infty S c_d} = \frac{c_l}{c_d}$$

$c_l - \alpha$  ve  $c_d - \alpha$  eğrilerinden

$\alpha$	$C_l$	$C_d$	$C_l/C_d$
0	0.25	0.0065	38.5
4	0.65	0.0070	93
8	1.08	0.0112	96
12	1.44	0.017	85

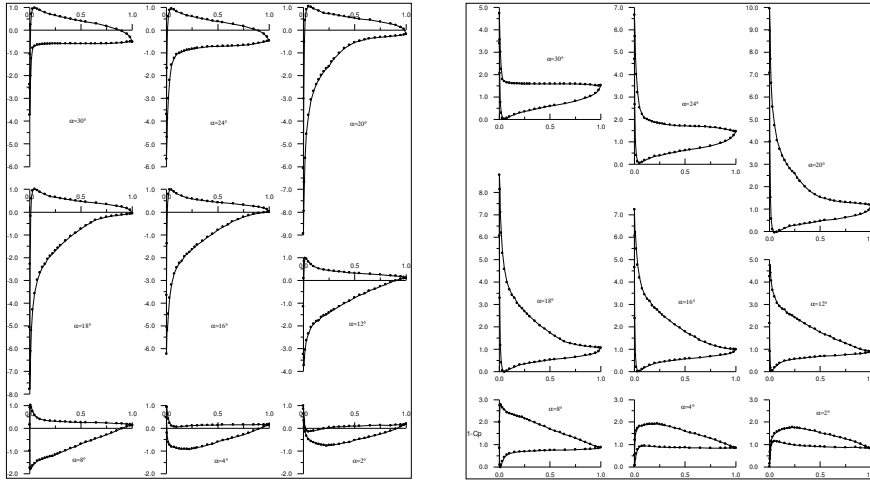
## Kanat profillerinin performans karakteristikleri

### NACA 4412 profili (NACA TR-824)



## Kanat profillerinin performans karakteristikleri

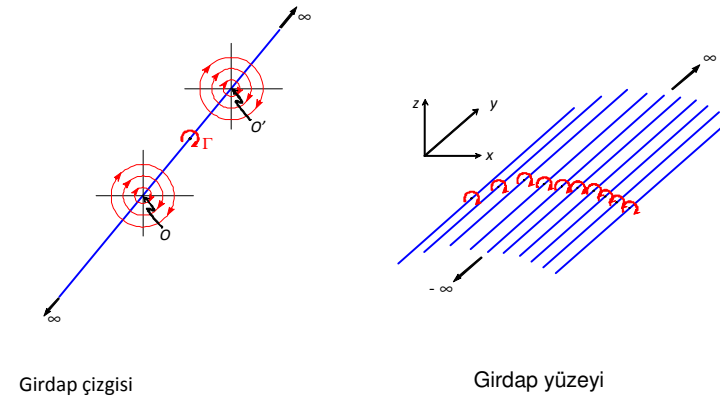
NACA 4412 profilinin basınç dağılımı, (Pinkerton, NACA TR-563)



UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

17

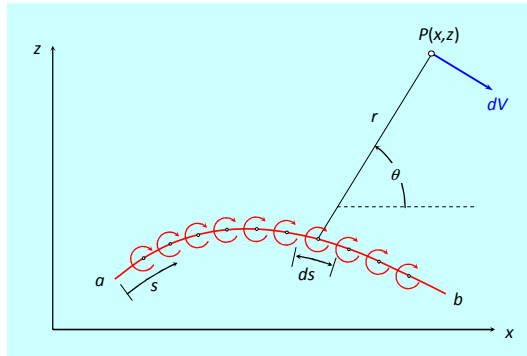
## İNCE PROFİL TEORİSİ Girdap çizgisi – girdap yüzeyi



UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

18

## Girdap yüzeyinin indüklemesi



$$d\phi = -\frac{\gamma(s) ds}{2\pi} \theta$$

$$\phi(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma ds$$

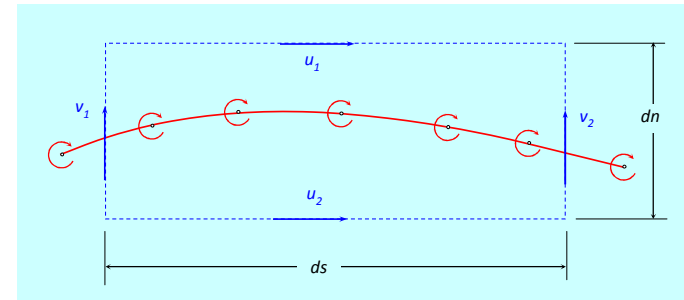
$$\Gamma = \int_a^b \gamma ds$$

$$dV = -\frac{\gamma ds}{2\pi r}$$

UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

19

## Girdap yüzeyinin indüklemesi



$$\Gamma = -(v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= (u_1 - u_2) ds + (v_1 - v_2) dn \\ \Gamma &= \gamma ds \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma ds = (u_1 - u_2) ds + (v_1 - v_2) dn$$

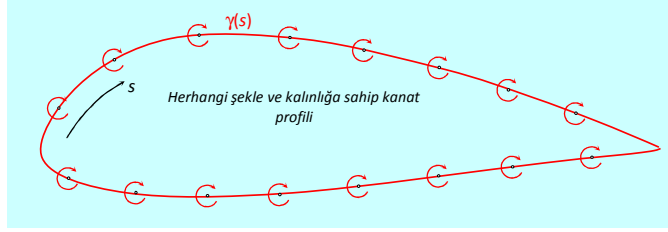
$$\downarrow dn \rightarrow 0$$

$$\boxed{\gamma = u_1 - u_2}$$

UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

20

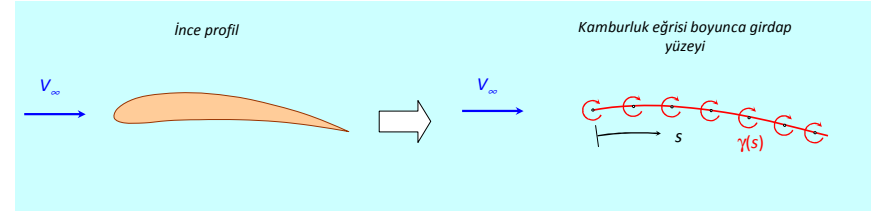
## Bir kanat profilinin bir girdap yüzeyi ile simülasyonu



Sınır koşulu: Yüzey bir akım çizgisi olmalı

$$\Gamma = \int \gamma ds \quad L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$$

## İnce profil yaklaşımı

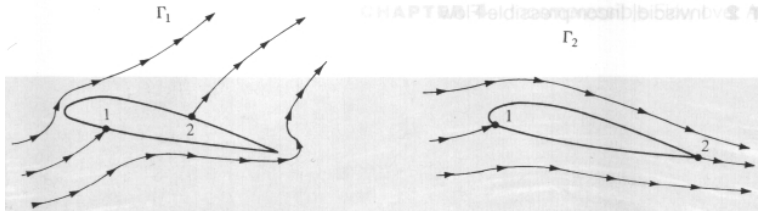


Sınır koşulu: Yüzey bir akım çizgisi olmalı

$$\Gamma = \int \gamma ds \quad L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$$

## Kutta koşulu – Sirkülasyona bağlı çözüm

Bir kanat profili etrafındaki potansiyel akımda, aynı hücum açısında farklı sirkülasyonlar için farklı (matematiksel) çözümler elde etmek mümkündür.



Oysa bir kanat profili etrafındaki gerçek akımda, belli bir hücum açısında tek bir taşıma kuvveti elde edilir.

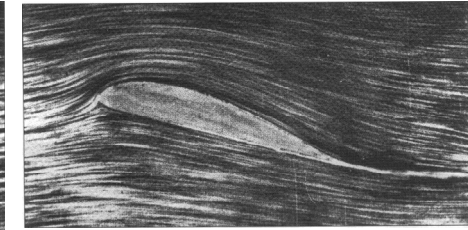
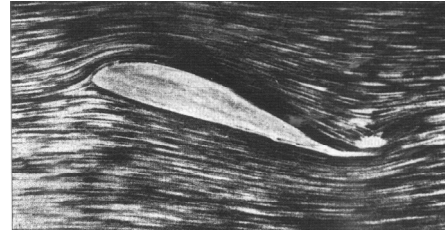
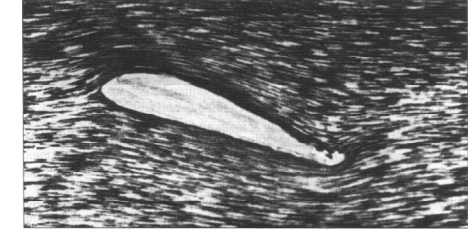
O halde matematiksel olarak elde edilenlerden hangisi doğru çözümdür ?

## Kutta koşulu - Başlangıç girdabı (Prandtl ve Tiejens)

Bir kanat profili etrafındaki akımın ilk harekete geçme anında firar kenarında bir girdap oluşarak akımla birlikte geriye doğru gider.

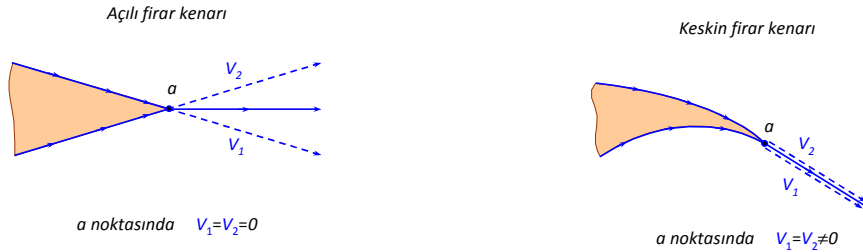
Girdap uzağa gittiğinde firar kenarındaki akım artık yüzeyi düzgün biçimde terk etmektedir.

Bu girdabın şiddeti profil etrafındaki sirkülasyona eşittir.



## Kutta koşulu – Matematiksel uygulaması

Bir kanat profili etrafındaki akım profili firar kenarından düzgün biçimde terk eder.



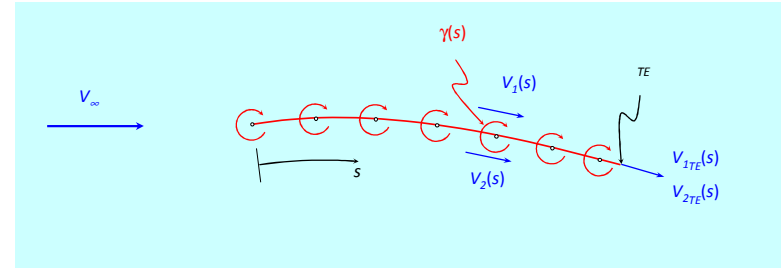
$a$  noktasında  $V_1=V_2=0$

$a$  noktasında  $V_1=V_2 \neq 0$

$$V_1=V_2=0 \quad \leftarrow \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \rightarrow \quad V_1=V_2 \neq 0$$

$$p_1 = p_2$$

## İnce profil yaklaşımı için Kutta koşulu

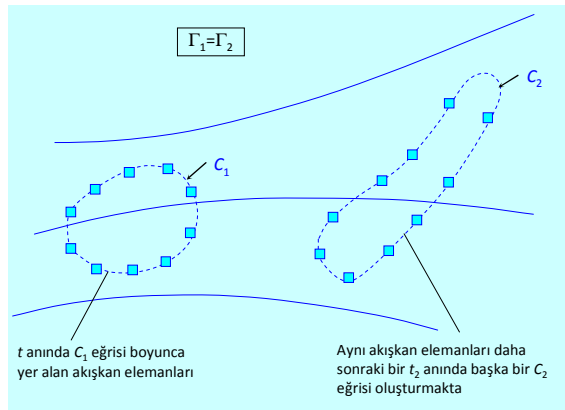


$$\boxed{\gamma = u_1 - u_2} \quad \Rightarrow \quad \gamma(TE) = \gamma(a) = V_{1TE} - V_{2TE}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Keskin firar kenarı halinde} \quad V_1 = V_2 \neq 0 \\ \text{Açılı firar kenarı halinde} \quad V_1 = V_2 = 0 \end{array} \right\} \gamma(TE) = 0$$

## Kelvin sirkülasyon teoremi

Aynı akışkan elemanlarını içeren bir kapalı eğri etrafındaki sirkülasyon akış boyunca değişmez.



$t$  anında  $C_1$  eğrisi boyunca yer alan akışkan elemanları

Aynı akışkan elemanları daha sonraki bir  $t_2$  anında başka bir  $C_2$  eğrisi oluşturmaktadır

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

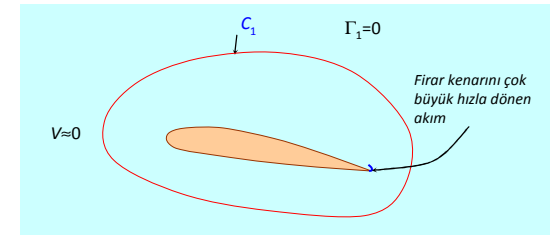
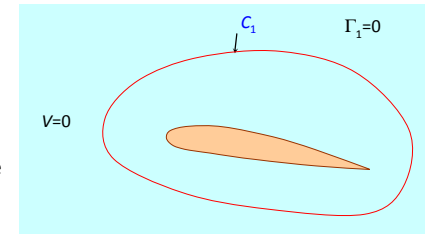
## Kelvin teoremi ve başlangıç girdabı

Bir kanat profilinin ilk harekete geçme anında, başlangıçta her yerde hız sıfır olup,  $C_1$  eğrisi etrafında sirkülasyon sıfırdır.

Profil harekete geçince akım önce firar kenarından yukarıya dönme eğiliminde olup, firar kenarında çok yüksek bir akım hızı oluşur.

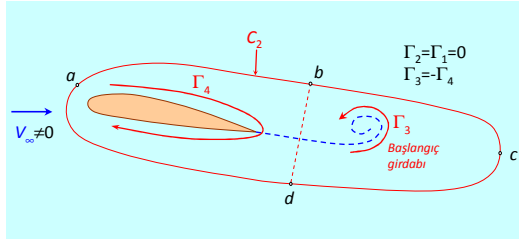
Böylece firar kenarında çok büyük hız gradyanları ve bir vortisit bölgesi meydana gelir.

Bu yüksek vortisit bölgesindeki akışkan kitlesi genel akımla birlikte geriye doğru uzaklaşırken bir girdap oluşturur ki buna başlangıç girdabı adı verilir.



## Kelvin teoremi ve başlangıç girdabı

Profil etrafında harekete geçmeden önce  $C_1$  eğrisi üzerinde yer alan akışkan elemanları profilin hareket geçmesiyle birlikte başlangıç girdabı oluşup फिर kenarını terk ettikten hemen sonra  $C_2$  eğrisi üzerinde yer alsın.



$C_2$  etrafındaki  $\Gamma_2$  sirkülasyonu Kelvin sirkülasyon teoremi gereği  $\Gamma_1$  ile aynı olup  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$  dir.

Şimdi  $C_2$  eğrisi başlangıç girdabını çevreleyen bir  $C_3$  ( $abd$ ) ve profili çevreleyen bir  $C_4$  ( $bcd$ ) eğrisi olmak üzere iki eğriye bölünürse, bu eğriler üzerindeki sirkülasyonların toplamı  $C_2$  eğrisi üzerindeki  $\Gamma_2$  sirkülasyonuna eşit olacaktır.

$$\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2$$

$\Gamma_2 = 0$  olduğundan  $\Gamma_4 = -\Gamma_3$  olacağı görülür.

## Klasik ince profil teorisi

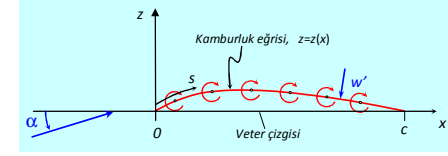
Kamburluk eğrisinin bir akım çizgisi olması için

$$V_{\infty,n} + w'(s) = 0$$

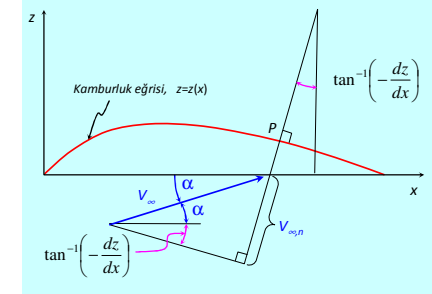
$w'(s)$  Girdap tabakasının oluşturduğu dikey hız bileşeni

$V_{\infty,n}$  Serbest akım hızının kamburluk eğrisine dik bileşeni

$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \sin \left[ \alpha + \tan^{-1} \left( -\frac{dz}{dx} \right) \right]$$



Kamburluk eğrisi üzerinde girdap yüzeyi



## Klasik ince profil teorisi

Çizgisel girdap parçasının indüklemesi

$$dV = -\frac{\gamma ds}{2\pi r}$$

Veter üzerindeki çizgisel girdap parçasının indüklemesi

$$dw = \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

Veter boyunca girdap dağılımının indüklemesi

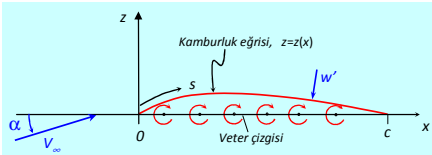
$$w(x) = -\int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

Yüzey sınır koşulu uygulanarak

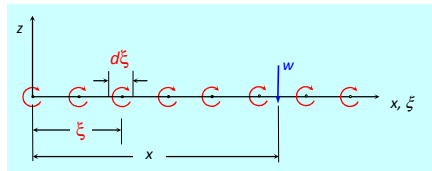
$$V_{\infty} \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right) - \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} = 0$$

Düzenlenerek

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{x-\xi} = V_{\infty} \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$



Veter çizgisi üzerinde girdap yüzeyi



İnce profiller için integro-diferansiyel denklem

## Düz levha için uygulama

$$\frac{dz}{dx} = 0 \rightarrow \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x-\xi)} = V_{\infty} \alpha$$

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0)$$

$$\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \rightarrow d\xi = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$$

değişken dönüşümüyle

$$\frac{1}{2\pi_0} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = V_{\infty} \alpha$$

Çözümün

$$\gamma(\theta) = 2\alpha V_{\infty} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

olduğu gösterilebilir

$$\frac{1}{2\pi_0} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{V_{\infty} \alpha}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0}$$

Glauert integrali

$$G_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0}$$

$$\frac{V_{\infty} \alpha}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 + \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{V_{\infty} \alpha}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} + \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \right) = \frac{V_{\infty} \alpha}{\pi} (0 + \pi) = V_{\infty} \alpha$$



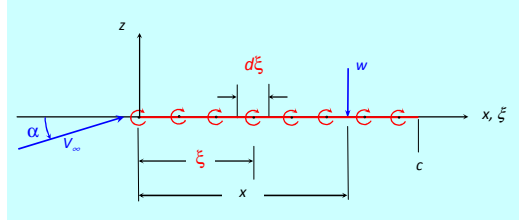
## Düz levha için uygulama

$$\frac{dz}{dx} = 0 \rightarrow \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi(x-\xi)} = V_\infty \alpha$$

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0)$$

$$\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \rightarrow d\xi = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$$

değişken dönüşümüyle



$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = V_\infty \alpha$$

Çözümün

$$\gamma(\theta) = 2\alpha V_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

olduğu gösterilebilir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{V_\infty \alpha}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1 + \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0}$$

Glauert integrali

$$G_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0}$$

$$\frac{V_\infty \alpha}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1 + \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \frac{V_\infty \alpha}{\pi} \left( \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} + \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \right) = \frac{V_\infty \alpha}{\pi} (0 + \pi) = V_\infty \alpha$$

## Düz levha için uygulama

Kutta şartı sağlanıyor mu ?

$$\gamma(\theta) = 2\alpha V_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad \theta \rightarrow \pi \quad \gamma(\pi) = \frac{0}{0}$$

$$\gamma(\pi) = 2\alpha V_\infty \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2\alpha V_\infty \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \gamma(\pi) = 0$$

Profil etrafındaki sirkülasyon

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = \alpha c V_\infty \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta \Rightarrow \Gamma = \pi \alpha c V_\infty$$

Profilin taşıma kuvveti

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \pi \alpha c \rho_\infty V_\infty^2$$

Profilin taşıma katsayısı

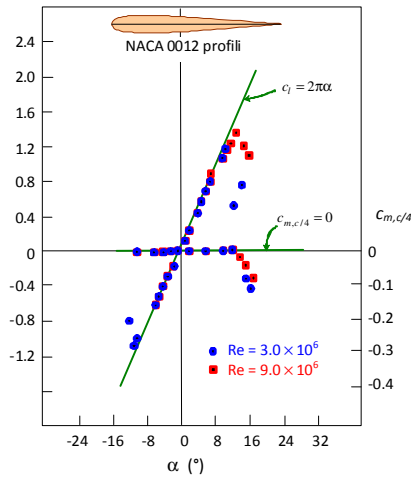
$$c_l = \frac{L'}{q_\infty S} = \frac{\pi \alpha c \rho_\infty V_\infty^2}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} \Rightarrow c_l = 2\pi \alpha$$

Taşıma eğrisi eğimi

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi \text{ rad}^{-1} \Rightarrow \frac{dc_l}{d\alpha_d} = \frac{dc_l}{d\alpha_r} \frac{d\alpha_r}{d\alpha_d} = 2\pi \frac{\pi}{180}$$

$$\frac{dc_l}{d\alpha_d} = \frac{\pi^2}{90} \text{ deg}^{-1}$$

## Düz levha için uygulama



## Örnek problem

5 derece hücum açısındaki bir düz levha için: (a) taşıma katsayısını, (b) hücum kenarı etrafındaki yunuslama katsayısını, (c) çeyrek veter etrafındaki yunuslama katsayısını ve (d) firar kenarı etrafındaki yunuslama katsayısını hesaplayınız.

### Çözüm

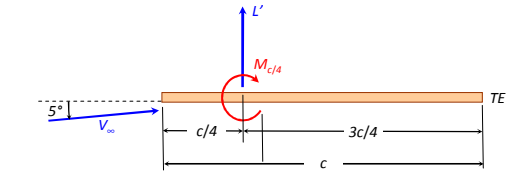
$$(a) \quad c_l = 2\pi \alpha \quad \alpha = \frac{5}{57.3} = 0.0873 \text{ rad} \quad c_l = 2\pi(0.0873) = \boxed{0.5485}$$

$$(b) \quad c_{m,le} = -\frac{c_l}{4} = -\frac{0.5485}{4} = \boxed{-0.137}$$

$$(c) \quad c_{m,c/4} = 0$$

$$(d) \quad M'_{te} = \frac{3c}{4} L' + M'_{c/4}$$

$$c_{m,te} = \frac{M'_{te}}{q_\infty c^2} = \frac{3c}{4} \frac{L'}{q_\infty c^2} + \frac{M'_{c/4}}{q_\infty c^2}$$



$$c_{m,te} = \frac{3}{4} c_l + c_{m,c/4} = \frac{3}{4} c_l + 0 = \frac{3}{4} 0.5485 = \boxed{0.411}$$

## Kamburluklu profiller için uygulama

İntegro-diferansiyel denklem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi} = V_\infty \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

$$x = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta_0)$$

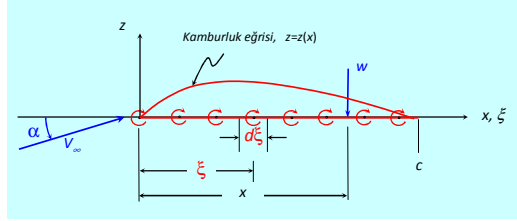
$$\xi = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta) \rightarrow d\xi = \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$$

değişken dönüşümü ile

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = V_\infty \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

Bu denklem için genel bir çözüm, düz levha için elde edilen çözüm bir Fourier serisi ile süperpoze edilerek aşağıdaki gibi önerilebilir

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$



## Kamburluklu profiller için uygulama

Önerilen çözüm dönüştürülmüş integro-diferansiyel denklemde yerleştirilerek

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos \theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{A_n \sin n\theta \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \alpha - \frac{dz}{dx}$$

$$\sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] \quad \text{olmak üzere}$$

$$\frac{A_0}{\pi} \left( \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} + \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos(n-1)\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} - \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \right) = \alpha - \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{A_0}{\pi} (G_0 + G_1) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} (G_{n-1} - G_{n+1}) = \alpha - \frac{dz}{dx}$$

Burada  $G_k$  lar Glauert integralleri olup  $G_k = \int_0^\pi \frac{\cos k\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} = \pi \frac{\sin k\theta_0}{\sin \theta_0}$  olmak üzere

$$\frac{A_0}{\pi} (0 + \pi) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left( \pi \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} - \pi \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \right) = \alpha - \frac{dz}{dx}$$

## Kamburluklu profiller için uygulama

veya  $\sin(n \pm 1)\theta = \sin n\theta \cos \theta \pm \sin \theta \cos n\theta$  olmak üzere

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta = \alpha - \frac{dz}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{dz}{dx} = (\alpha - A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

Bir Fourier analizi yapılarak katsayılar elde edilebilir:

$$\int_0^\pi \frac{dz}{dx} d\theta = (\alpha - A_0) \int_0^\pi d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \cos n\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} d\theta$$

$$\int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos k\theta d\theta = (\alpha - A_0) \int_0^\pi \cos k\theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \cos n\theta \cos k\theta d\theta$$

$$\int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos k\theta d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \int_0^\pi [\cos(n-k)\theta + \cos(n+k)\theta] d\theta$$

$$\int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos k\theta d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left[ \underbrace{\frac{\sin(n-k)\theta}{k-n}}_{n=k \text{ için } \pi} + \underbrace{\frac{\sin(n+k)\theta}{n+k}}_0 \right]_0^\pi = \frac{A_k}{2} \pi \quad \Rightarrow \quad A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos k\theta d\theta$$

olmak üzere

## Kamburluklu profiller için uygulama - Taşıma

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta \quad \gamma(\theta) = 2V_\infty \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

$$\Gamma = cV_\infty \left[ A_0 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta \right]$$

$$\int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta = \pi \quad \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & n=1 \text{ için} \\ 0 & n \neq 1 \text{ için} \end{cases} \quad \text{olup} \quad \Gamma = cV_\infty \left( \pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

Taşıma

$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \rho_\infty V_\infty^2 c \left( \pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right) \quad \Rightarrow \quad c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} \quad \Rightarrow \quad c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$$

$$c_l = 2\pi \left[ \alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right] \quad \Rightarrow \quad \text{Taşıma eğrisi eğimi} \quad \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$$

$$c_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sıfır taşıma açısı} \quad \alpha_{L=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0$$

## Kamburluklu profiller için uygulama - Yunuslama

$$M'_{LE} = -\rho_{\infty} V_{\infty} \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi \quad \gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

$$M'_{LE} = -\rho_{\infty} V_{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c}{2} (1 - \cos \theta) 2V_{\infty} \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \frac{c}{2} \sin \theta d\theta$$

$$\frac{M'_{LE}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c^2} = -A_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\theta - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) \sin n\theta \sin \theta d\theta$$

$$c_{m,le} = -A_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n\theta \sin \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n\theta \sin 2\theta d\theta \right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n\theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & n=1 \text{ için} \\ 0 & n \neq 1 \text{ için} \end{cases} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n\theta \sin 2\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & n=2 \text{ için} \\ 0 & n \neq 2 \text{ için} \end{cases}$$

olup  $c_{m,le} = -A_0 \frac{\pi}{2} - \left( A_1 \frac{\pi}{2} - \frac{A_2 \pi}{2} \right) \Rightarrow c_{m,le} = -\frac{\pi}{2} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)$

UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

41

## Örnek Problem

Kamburluk eğrisi aşağıdaki şekilde verilen bir NACA 23012 profilini için (a) sıfır taşıma hücum açısını, (b)  $\alpha = 4^\circ$  hücum açısındaki taşıma katsayısını, (c) çeyrek veter noktası etrafındaki yunuslama katsayısını ve (d)  $\alpha = 4^\circ$  hücum açısında basınç merkezinin yerini hesaplayınız. Sonuçları deneysel verilerle karşılaştırınız.

$$\bar{z} = \begin{cases} 2.6595(\bar{x}^3 - 0.6075 \bar{x}^2 + 0.1147 \bar{x}) & 0 \leq \bar{x} \leq 0.2025 \\ 0.02208(1 - \bar{x}) & 0.2025 \leq \bar{x} \leq 1.0 \end{cases} \quad \bar{x} = \frac{x}{c}, \quad \bar{z} = \frac{z}{c}$$

## Çözüm

Kamburluk eğrisinin eğimi  $\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \begin{cases} 2.6595(3\bar{x}^2 - 1.215 \bar{x} + 0.1147) & 0 \leq \bar{x} \leq 0.2025 \\ -0.02208 & 0.2025 \leq \bar{x} \leq 1.0 \end{cases}$

olup

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \quad \text{olmak üzere}$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \begin{cases} 2.6595(0.6322 - 0.8925 \cos \theta + 0.375 \cos 2\theta) & 0 \leq \theta \leq 0.9335 \\ -0.02208 & 0.9335 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{elde edilir}$$

UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

43

## Kamburluklu profiller için uygulama - Yunuslama

$$c_{m,le} = -\frac{\pi}{2} \left( A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) = -\frac{\pi}{2} \left( A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2} \right) \Rightarrow c_{m,le} = -\left( \frac{c_l}{4} + \frac{A_1 - A_2}{4} \pi \right)$$

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$$

Herhangi bir nokta etrafındaki yunuslama

$$c_{m,x} = c_{m,le} + c_l \bar{x} = -\left( \frac{c_l}{4} + \frac{A_1 - A_2}{4} \pi \right) + c_l \bar{x} \Rightarrow c_{m,x} = c_l \left( \bar{x} - \frac{1}{4} \right) - \frac{A_1 - A_2}{4} \pi$$

Aerodinamik merkezi  $\frac{dc_{m,x}}{dc_l} = \frac{x_{ac}}{c} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x_{ac}}{c} = \frac{1}{4}$

Aerodinamik merkez (Çeyrek veter noktası) etrafındaki yunuslama  $c_{m,c/4} = -\frac{A_1 - A_2}{4} \pi$

Basınç merkezi  $c_{m,x} = c_l \left( \bar{x}_{cp} - \frac{1}{4} \right) - \frac{A_1 - A_2}{4} \pi = 0 \Rightarrow \frac{x_{cp}}{c} = \frac{1}{4} + \frac{A_1 - A_2}{4c_l} \pi$

Basınç merkezi daima çeyrek veter noktasının gerisinde taşıma ile değişen bir noktadır.

UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

42

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \begin{cases} 1.6813 - 2.3736 \cos \theta + 0.9973 \cos 2\theta & 0 \leq \theta \leq 0.9335 \\ -0.02208 & 0.9335 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Buna göre

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{dx} d\theta = \alpha - \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{0.9335} \frac{dz}{dx} d\theta + \int_{0.9335}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{dx} d\theta \right]$$

$$= \alpha - \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{0.9335} (1.6813 - 2.3736 \cos \theta + 0.9973 \cos 2\theta) d\theta + \int_{0.9335}^{\frac{\pi}{2}} (-0.02208) d\theta \right]$$

$$= \alpha - \frac{1}{\pi} \left[ 1.6813(0.9335) - 2.3736(\sin 0.9335) + 0.9973 \frac{\sin 1.867}{2} - 0.02208(\pi - 0.9335) \right]$$

$$= \alpha - \frac{1}{\pi} [1.56949 - 1.90768 + 0.47693 - 0.04875]$$

$$A_0 = \alpha - 0.0286$$

UCK351 Aerodinamik ders notları  
- MAY

44

$$\frac{dz}{dx} = \begin{cases} 1.6813 - 2.3736 \cos \theta + 0.9973 \cos 2\theta & 0 \leq \theta \leq 0.9335 \\ -0.02208 & 0.9335 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{0.9335} \frac{dz}{dx} \cos \theta d\theta + \int_{0.9335}^\pi \frac{dz}{dx} \cos \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{0.9335} (1.6813 \cos \theta - 2.3736 \cos^2 \theta + 0.9973 \cos 2\theta \cos \theta) d\theta + \int_{0.9335}^\pi (-0.02208) \cos \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ 1.6813(\sin 0.9335) - 2.3736 \frac{1}{2} \int_0^{0.9335} (\cos 2\theta + 1) d\theta + 0.9973 \frac{1}{2} \int_0^{0.9335} (\cos 3\theta + \cos \theta) d\theta \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ 1.35127 - 1.1868 \left( \frac{\sin 1.867}{2} + 0.9335 \right) + 0.49865 \left( \frac{\sin 2.8005}{3} + \sin 0.9335 \right) + 0.01775 \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} [1.35127 - 1.6754 + 0.45637 + 0.01775]$$

$$A_1 = 0.0955$$

$$\frac{dz}{dx} = \begin{cases} 1.6813 - 2.3736 \cos \theta + 0.9973 \cos 2\theta & 0 \leq \theta \leq 0.9335 \\ -0.02208 & 0.9335 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \cos 2\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{0.9335} \frac{dz}{dx} \cos 2\theta d\theta + \int_{0.9335}^\pi \frac{dz}{dx} \cos 2\theta d\theta \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{0.9335} (1.6813 \cos 2\theta - 2.3736 \cos \theta \cos 2\theta + 0.9973 \cos^2 2\theta) d\theta + \int_{0.9335}^\pi (-0.02208) \cos 2\theta d\theta \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ 1.6813 \left( \frac{\sin 1.867}{2} \right) - 2.3736 \frac{1}{2} \int_0^{0.9335} (\cos 3\theta + \cos \theta) d\theta + 0.9973 \frac{1}{2} \int_0^{0.9335} (\cos 4\theta + 1) d\theta \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ 0.80404 - 1.1868 \left( \frac{\sin 2.8005}{3} + \sin 0.9335 \right) + 0.49865 \left( \frac{\sin 3.734}{4} + 0.9335 \right) + 0.01056 \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} [0.80404 - 1.08617 + 0.39588 + 0.01056]$$

$$A_2 = 0.0791$$

$$A_0 = \alpha - 0.0286 \quad A_1 = 0.0955 \quad A_2 = 0.0791$$

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \Rightarrow c_l = 2\pi \left( \alpha - 0.0286 + \frac{0.0955}{2} \right) = 2\pi(\alpha + 0.01915)$$

(a) Sıfır taşıma hücum açısı  $c_l = 0 \Rightarrow \alpha = -0.01915 \times 180 / \pi$   $\alpha = -1.097^\circ$

(b)  $\alpha=4^\circ$  de Taşıma katsayısı  $c_l = 2\pi(4 \times \pi / 180 + 0.01915)$   $c_l = 0.559$

(c) Çeyrek veter etrafında yunuslama

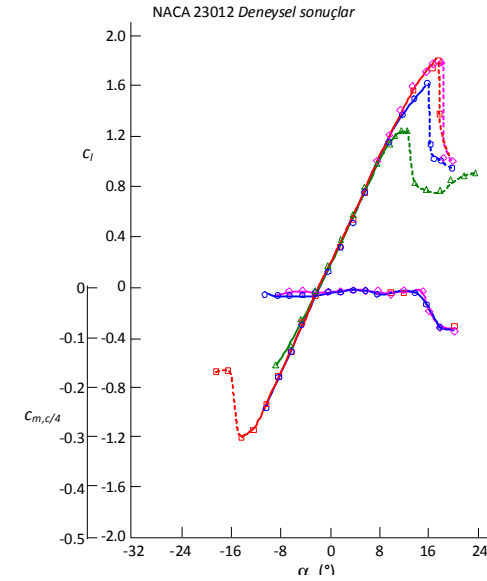
$$c_{m,c/4} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1) = \frac{\pi}{4} (0.0791 - 0.0955) \Rightarrow c_{m,c/4} = -0.0129$$

(d)  $\alpha=4^\circ$  de basınç merkezinin konumu

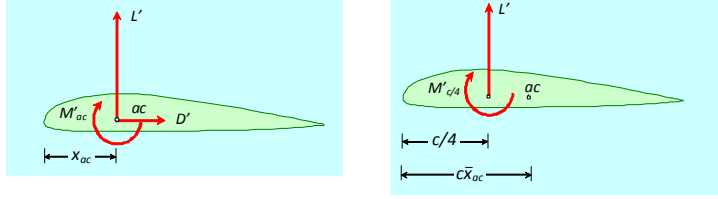
$$\frac{x_{cp}}{c} = \frac{1}{4} + \frac{A_1 - A_2}{4c_l} \pi = \frac{1}{4} + \frac{0.0955 - 0.0791}{4 \times 0.559} \pi \Rightarrow \frac{x_{cp}}{c} = 0.273$$

Karşılaştırma

	Hesap	Deney
$\alpha_i=0$	-1.097	-1.1
$c_l$ ( $\alpha=4^\circ$ de)	0.559	0.55
$c_{m,c/4}$	-0.0129	-0.01



## Aerodinamik Merkez – İlave bilgiler



$$M'_{ac} = L' (c \bar{x}_{ac} - c/4) + M'_{c/4} \Rightarrow c_{m,ac} = c_l (\bar{x}_{ac} - 0.25) + c_{m,c/4}$$

Aerodinamik merkezde  $\frac{dc_{m,ac}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{dc_l}{d\alpha} (\bar{x}_{ac} - 0.25) + \frac{dc_{m,c/4}}{d\alpha} = 0$

$\frac{dc_l}{d\alpha} \equiv a_0$ ;  $\frac{dc_{m,c/4}}{d\alpha} \equiv m_0$  olmak üzere  $0 = a_0 (\bar{x}_{ac} - 0.25) + m_0$

$$\bar{x}_{ac} = -\frac{m_0}{a_0} + 0.25$$

## Örnek Problem

NACA 23012 profiline ait deneysel verilerden  $\alpha = 4^\circ$  hücum açısında,  $c_l = 0.55$  ve  $c_{m,c/4} = -0.005$  olduğu görülmektedir. Ayrıca sıfır taşıma hücum açısı  $-1.1^\circ$  olup  $\alpha = -4^\circ$  hücum açısında  $c_{m,c/4} = -0.0125$  dir. Buna göre aerodinamik merkezinin konumunu hesaplayınız.

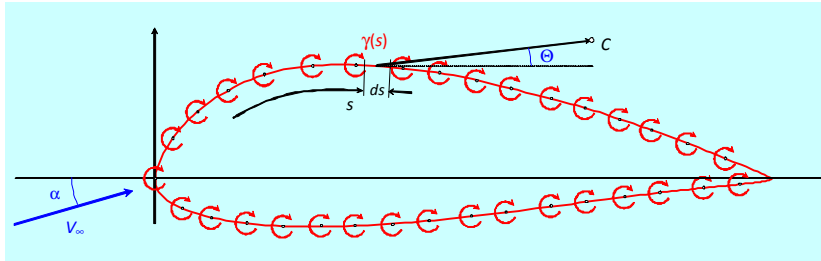
## Çözüm

Taşıma eğrisi eğimi  $a_0 = \frac{0.55 - 0}{4 - (-1.1)} = 0.1078 \text{ derece}^{-1}$

Moment eğrisi eğimi  $m_0 = \frac{-0.005 - (-0.0125)}{4 - (-4)} = 9.375 \times 10^{-4} \text{ derece}^{-1}$

$\bar{x}_{ac} = -\frac{m_0}{a_0} + 0.25 = -\frac{9.375 \times 10^{-4}}{0.1078} + 0.25 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_{ac} = 0.241}$

## Kalın profiller için girdap panel yöntemi



P noktasında potansiyel  $\phi_C = \phi_{\infty C} - \int \frac{\gamma(s) ds}{2\pi} \Theta_{sC} \quad \Theta_{sC} = \tan^{-1} \frac{y_P - y_s}{x_P - x_s}$

P noktasında hız vektörü  $\vec{V} = \nabla \phi_C = \nabla \phi_{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \nabla \Theta_{sC} ds$

P noktası yüzey üzerinde olmak üzere

Yüzeye dik hız bileşeni  $\vec{V}_{nC} = \nabla \phi_C \cdot \vec{n}_C = \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}_C - \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \frac{\partial \Theta_{sC}}{\partial n} ds$

Yüzeye teğet hız bileşeni  $\vec{V}_{tC} = \nabla \phi_C \cdot \vec{t}_C = \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{t}_C - \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \frac{\partial \Theta_{sC}}{\partial t} ds$

$\gamma(s) = ?$

## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### Yüzey sınır koşulunun uygulanması - Panellerin oluşturulması

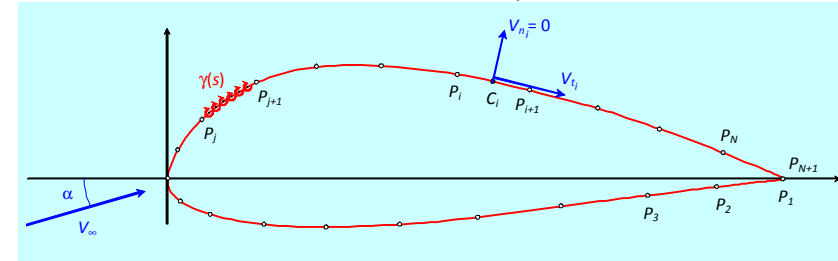
$\gamma(s)$  'yi hesaplamak için yüzey üzerindeki sınır koşullarından yararlanılır

$$\vec{V}_{nC} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \frac{\partial \Theta_{sC}}{\partial n} ds = \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}_C$$

Bilinmeyen  $\gamma(s)$  büyüklüğü integral içinde olduğu için analitik çözüm mümkün değil

Yüzey N adet panele ayrılarak  $\sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \frac{\partial \Theta_{sj}}{\partial n_i} ds = \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$

$$\vec{V}_{ti} = \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{t}_i - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \frac{\partial \Theta_{sj}}{\partial t_i} ds$$



## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### Doğrusal paneller üzerinde sabit şiddette girdap dağılımı

Paneller doğrusal ve her bir panel boyunca girdap şiddetleri sabit alınarak

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} \gamma_j = \vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i \quad (i=1,2,\dots,N)$$

Burada

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial n_i} ds$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial t_i} ds$$

$$\vec{V}_{ti} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{t}_i - \sum_{j=1}^N A_{ij} \gamma_j$$

Yukarıdaki denklem sistemi sadece yüzey üzerindeki sınır koşulu uygulanarak elde edilmiştir. Ayrıca Kutta koşulunun sağlanması gerekir.

## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### Kutta koşulu

Girdap şiddeti firar kenarında sıfır olmalı.

$$\gamma_{TE} = 0 \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_N = 0$$

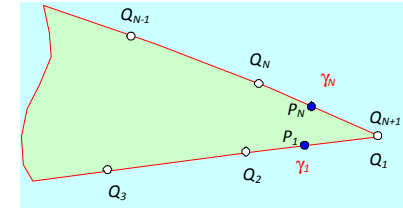
Böylece denklem sistemi:

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} \gamma_j = V_\infty \cdot \vec{n}_i \quad (i=1,2,\dots,N)$$

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0$$

şekline gelir. Burada **Bilinmeyen sayısı**:  $N$  ( $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ )  
**Denklem sayısı**:  $N+1$

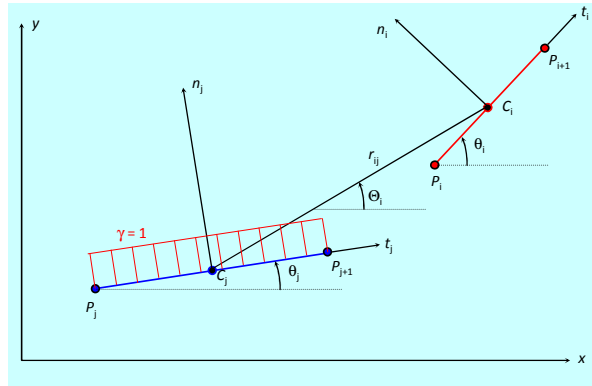
Denklem sayısı bilinmeyen sayısından 1 fazla olup, 1 adet denklemin atılması gerekir.



## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### $A_{ij}$ ve $B_{ij}$ katsayılarının hesaplanması

- $j$  paneli üzerindeki sabit birim şiddetli girdap dağılımının
  - $i$  panelinin kontrol noktasında indüklediği hızın
- $i$  panelinin teğeti doğrultusundaki bileşeni
  - $i$  panelinin normali doğrultusundaki bileşeni



$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial n_i} ds$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial t_i} ds$$

## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### $A_{ij}$ ve $B_{ij}$ katsayılarının hesaplanması- Panel özellikleri

Teğet ve normal birim vektörleri

$$\vec{t}_i = t_{xi} \vec{i} + t_{yi} \vec{j}, \quad t_{xi} = \cos \theta_i, \quad t_{yi} = \sin \theta_i$$

$$\vec{n}_i = n_{xi} \vec{i} + n_{yi} \vec{j}, \quad n_{xi} = -\sin \theta_i, \quad n_{yi} = \cos \theta_i$$

$$\sin \theta_i = \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad \cos \theta_i = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

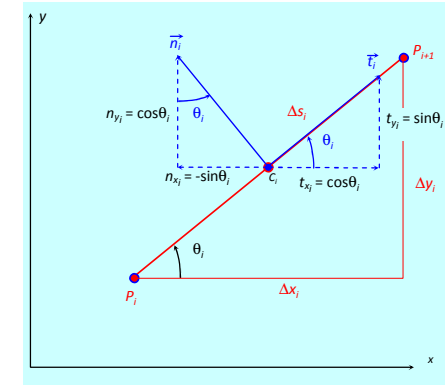
$$\Delta x = x_{P_{i+1}} - x_{P_i}$$

$$\Delta y = y_{P_{i+1}} - y_{P_i}$$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Panel orta noktaları

$$x_{C_i} = \frac{x_{P_i} + x_{P_{i+1}}}{2}, \quad y_{C_i} = \frac{y_{P_i} + y_{P_{i+1}}}{2}$$



## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### $A_{ij}$ ve $B_{ij}$ katsayılarının hesaplanması

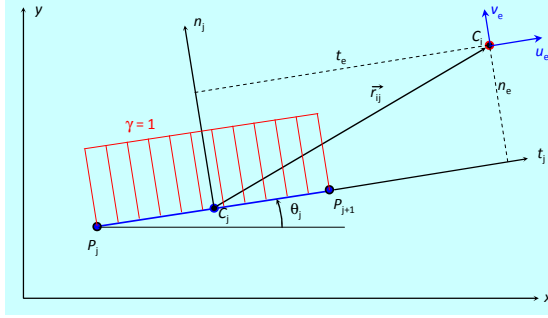
- 1)  $j$  paneli üzerindeki sabit birim şiddetli girdap dağılımının  $i$  panelinin kontrol noktasında indüklediği hız bileşenlerini  $j$  paneline bağlı eksen takımında hesapla

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial t_i} ds$$

$$u_e = \frac{1}{2\pi} \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial t} dt$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_j \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial n_i} ds$$

$$v_e = \frac{1}{2\pi} \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\partial \Theta_{s_i}}{\partial n} dn$$



$$\vec{r}_{ij} = (x_{C_i} - x_{C_j})\vec{i} + (y_{C_i} - y_{C_j})\vec{j}$$

$$t_e = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{t}_j = [(x_{C_i} - x_{C_j})\vec{i} + (y_{C_i} - y_{C_j})\vec{j}] \cdot (t_{x_j}\vec{i} + t_{y_j}\vec{j})$$

$$n_e = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{n}_j = [(x_{C_i} - x_{C_j})\vec{i} + (y_{C_i} - y_{C_j})\vec{j}] \cdot (n_{x_j}\vec{i} + n_{y_j}\vec{j})$$

$$t_e = (x_{C_i} - x_{C_j})t_{x_j} + (y_{C_i} - y_{C_j})t_{y_j}$$

$$n_e = (x_{C_i} - x_{C_j})n_{x_j} + (y_{C_i} - y_{C_j})n_{y_j}$$

## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### $A_{ij}$ ve $B_{ij}$ katsayılarının hesaplanması

- 1) Hız bileşenlerini  $j$  paneline bağlı eksen takımında hesapla

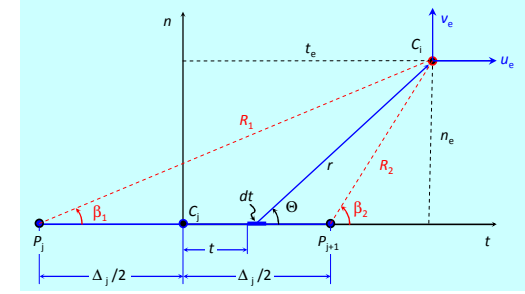
$$u_e = \frac{1}{2\pi} \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\partial \Theta}{\partial t} dt = \frac{1}{2\pi} [\Theta]_{\beta_1}^{\beta_2}$$

$$u_e = \frac{1}{2\pi} (\beta_2 - \beta_1)$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{n_e}{t_e + \Delta_j/2}$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \frac{n_e}{t_e - \Delta_j/2}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \tan^{-1} \frac{n_e \Delta_j}{t_e^2 + n_e^2 - (\Delta_j/2)^2}$$



$$v_e = \frac{1}{2\pi} \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{\partial \Theta}{\partial n} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{n_e}{(t_e - t)^2 + n_e^2} dt \Rightarrow v_e = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$v_e = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 = \sqrt{(t_e + \Delta_j/2)^2 + n_e^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(t_e - \Delta_j/2)^2 + n_e^2}$$

## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### $A_{ij}$ ve $B_{ij}$ katsayılarının hesaplanması

- 1) Hız bileşenlerini  $j$  paneline bağlı eksen takımında hesapla  
Panelin kendi kontrol noktasındaki etkisi ( $i = j$  hali)

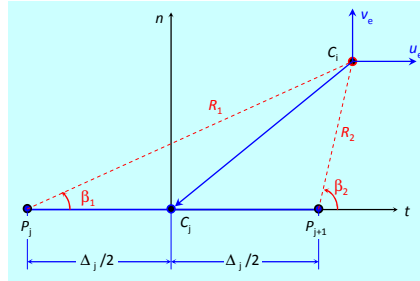
$$C_i \rightarrow C_j$$

$$\left. \begin{matrix} \beta_1 \rightarrow \pi \\ \beta_2 \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 \rightarrow \pi$$

$$u_e = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{matrix} R_1 \rightarrow \Delta_j/2 \\ R_2 \rightarrow \Delta_j/2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 1 \Rightarrow \ln \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 0$$

$$v_e = 0$$

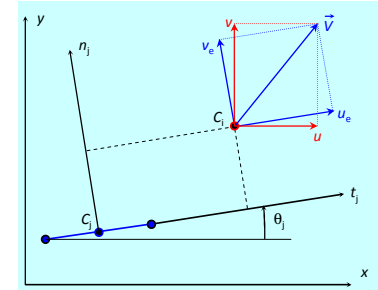


- 2) Hız bileşenlerini cisim eksenlerine aktar

$$\vec{V} = u_e \vec{t}_j + v_e \vec{n}_j$$

$$\vec{t}_j = t_{x_j} \vec{i} + t_{y_j} \vec{j}$$

$$\vec{n}_j = n_{x_j} \vec{i} + n_{y_j} \vec{j}$$



$$u = \vec{V} \cdot \vec{i} = (u_e \vec{t}_j + v_e \vec{n}_j) \cdot \vec{i} = [u_e (t_{x_j} \vec{i} + t_{y_j} \vec{j}) + v_e (n_{x_j} \vec{i} + n_{y_j} \vec{j})] \cdot \vec{i} \Rightarrow u = u_e t_{x_j} + v_e n_{x_j}$$

$$v = \vec{V} \cdot \vec{j} = (u_e \vec{t}_j + v_e \vec{n}_j) \cdot \vec{j} = [u_e (t_{x_j} \vec{i} + t_{y_j} \vec{j}) + v_e (n_{x_j} \vec{i} + n_{y_j} \vec{j})] \cdot \vec{j} \Rightarrow v = u_e t_{y_j} + v_e n_{y_j}$$

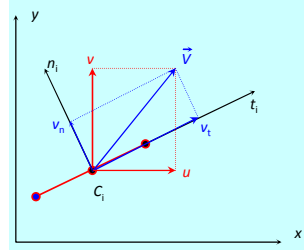
## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### A<sub>ij</sub> ve B<sub>ij</sub> katsayılarının hesaplanması

3) Hız bileşenlerini *i* paneline bağlı teğet-normal eksen takımına aktar

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{t}_i = t_{xi}\vec{i} + t_{yi}\vec{j} \\ \vec{n}_i = n_{xi}\vec{i} + n_{yi}\vec{j} \end{cases}$$



$$v_t = \vec{V} \cdot \vec{t}_i = (u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot (t_{xi}\vec{i} + t_{yi}\vec{j})$$



$$v_{t_i} = ut_{xi} + vt_{yi} = A_{ij}$$

$$v_n = \vec{V} \cdot \vec{n}_i = (u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot (n_{xi}\vec{i} + n_{yi}\vec{j})$$



$$v_{n_i} = un_{xi} + vn_{yi} = B_{ij}$$

## Kalın profiller için girdap panel yöntemi

### Denklemleri

Girdap şiddeti *f* kenarında sıfır olmalı.

$$\begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & \dots & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & 0 & B_{23} & \dots & \dots & B_{2N} \\ B_{31} & B_{32} & 0 & \dots & \dots & B_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{N1} & B_{N2} & B_{N3} & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \dots \\ \gamma_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \\ \dots \\ V_{nN} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

şekline gelir. Burada **Bilinmeyen sayısı:**  $N$  ( $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ )  
**Denklemleri sayısı:**  $N+1$

Denklemleri sayısı bilinmeyen sayısından 1 fazla olup, 1 adet denklemin atılması gerekir.