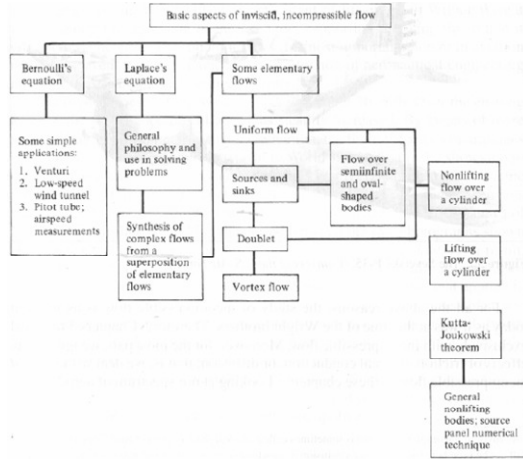


VİSKOZ OLMAYAN SIKIŞTIRILAMAZ AKIMIN ESASLARI



UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

1

BERNOULLİ DENKLEMİ

Euler denkleminin x- bileşeni

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Daimi akım halinde $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Her iki taraf x ile çarpılarak

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dx + w \frac{\partial u}{\partial z} dx = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Akım çizgisi tanımından

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \Rightarrow v dx = u dy, w dx = u dz$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial u}{\partial y} dy + u \frac{\partial u}{\partial z} dz = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$u = u(x,y,z)$ için tam diferansiyel tanımı

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$u du = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

2

Bernoulli denklemi

Euler denkleminin x- bileşeni

$$\frac{1}{2} d(u^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Benzeri biçimde y- bileşeni

$$\frac{1}{2} d(v^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

Benzeri biçimde z- bileşeni

$$\frac{1}{2} d(w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Bu üç eşitlik toplanarak

$$\frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2 \quad \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp$$

Sonuç olarak

$$\frac{1}{2} d(V^2) = -\frac{dp}{\rho}$$

Veya

$$dp = -\rho V dV$$

Bir-boyutlu Euler denklemi

UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

3

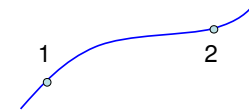
Bernoulli denklemi

Sıkıştırılabilir akım halinde $\rho = \rho(s)$ olup bir akım çizgisi boyunca 1 ve 2 noktaları arasında integral alınarak

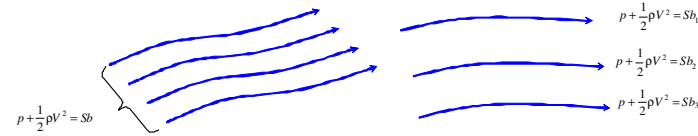
$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho \int_{V_1}^{V_2} V dV \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = sb$$



Denklem çıkartılırken akımın rotasyonel olup olmadığına bakılmamıştır. Bu bakımdan denklem, rotasyonel ve irrotasyonel akımların her ikisi için de geçerlidir. Ancak rotasyonel akımda farklı akım çizgileri üzerinde denklemin sağındaki sabitin değeri farklı olacaktır.



İrrotasyonel akım

rotasyonel akım

UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

4

Bernoulli denklemi

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

Bernoulli denkleminin fiziksel anlamı

- Hız arttıkça basınç azalır

- Hız azaldıkça basınç artar

Not

Bernoulli denklemi momentum denkleminin birinci teriminden çıkarılmıştır. Dolayısıyla Newton'un ikinci kanununun, bünye kuvvetlerinin olmadığı, viskoz olmayan, sıkıştırılmaz akımlar için uygulamasıdır.

Ancak;

Denklemin birim hacim başına enerji boyutunda olduğu görülmektedir. Bu bakımdan, sıkıştırılmaz akımda mekanik enerji için yazılmış bir bağıntı olup, *basınç kuvvetlerinin akışkan üzerinde yaptığı işin kinetik enerjiye eşit olduğunu* göstermektedir.

Bernoulli denklemi genel enerji denkleminin de elde edilebilir.

Viskoz olmayan, sıkıştırılmaz akımların analizi için enerji denklemi gerekli olmayıp süreklilik ve momentum denklemleri yerelidir.

Örnek problem

Deniz seviyesinde standart atmosfer koşullarında 50 m/s hızındaki serbest akımda yer alan bir kanat profilinin üzerindeki bir noktada basınç $0.9 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ olarak verilmiştir. Bu noktadaki hızı hesaplayınız

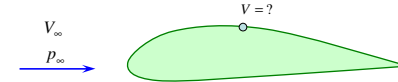
Çözüm

Deniz seviyesinde standart atmosfer koşullarında:

$$\rho_\infty = 1.23 \text{ kg/m}^3, p_\infty = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p)}{\rho} + V_\infty^2} = \sqrt{\frac{2(1.01 - 0.9) \times 10^5}{1.23} + (50)^2} \quad \boxed{V = 142.8 \text{ m/s}}$$



Örnek problem

Yoğunluğun $0.002377 \text{ slug/ft}^3$ olduğu deniz seviyesindeki standart koşullarda, viskoz olmayan sıkıştırılmaz akımda bir akım çizgisi üzerindeki bir noktada basınç 2116 lb/ft^2 , hız 10 ft/s 'dır. Akım çizgisinin bir başka noktasındaki hız 190 ft/s olduğuna göre bu noktadaki basıncı hesaplayınız. Bu noktalar arasında basıncın oransal değişimini hızdaki değişimle kıyaslayınız.

Çözüm

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

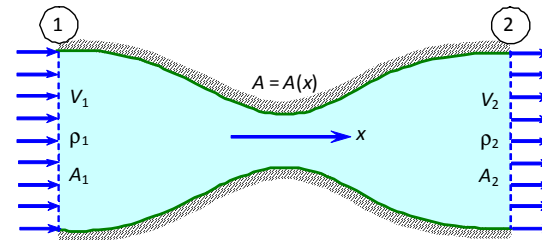
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) = 2116 + \frac{1}{2} \times 0.002377 \times (10^2 - 190^2) = 2116 + 42.8 \quad \boxed{p_2 = 2073.2 \text{ lb/ft}^2}$$

$$\text{Oransal basınç ve hız değişimleri: } \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2116 - 2073.2}{2116} = \% 2 \quad \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{190 - 10}{10} = \% 1800$$

NOT: Basıncıdaki küçük bir değişimin hızda çok büyük oranda bir değişim yaratması düşük hızlı akımların tipik bir özelliğidir.

SANKİ-BİR BOYUTLU AKIM

Şekildeki akım 1 ve 2 kesitlerinde yerel olarak bir-boyutlu kabul edilebilir



Süreklilik denklemi $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}$ Daimi halde $\iiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$

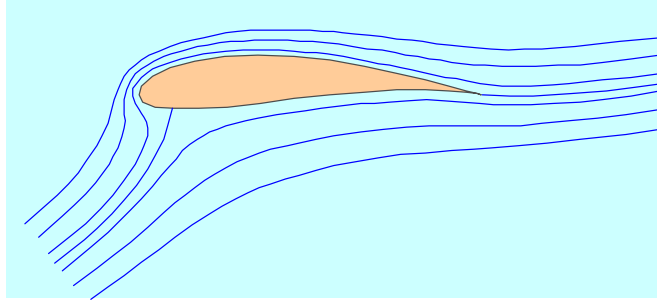
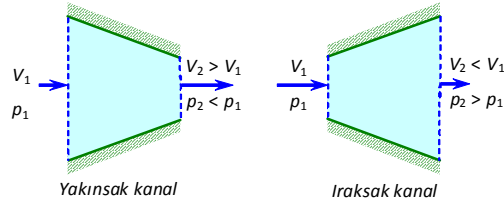
Kanal içindeki akım için uygulanarak $\underbrace{\iiint_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}}_{\rho_1 V_1 A_1} + \underbrace{\iiint_{A_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}}_{\rho_2 V_2 A_2} + \underbrace{\iiint_{\text{wall}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}}_{=0} = 0$

Sanki bir-boyutlu süreklilik denklemi $\boxed{\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2}$

Sanki-bir boyutlu akımlar

Sıkıştırılmaz halde
bir-boyutlu süreklilik
denklemleri

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$



Venturi borusu

Bernoulli denklemi

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

Süreklilik denklemi

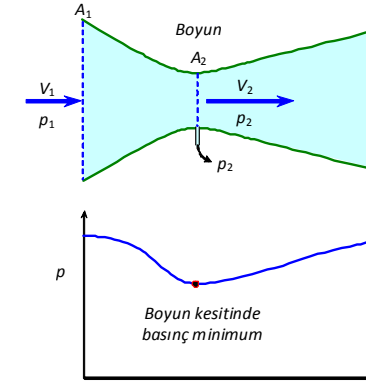
$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

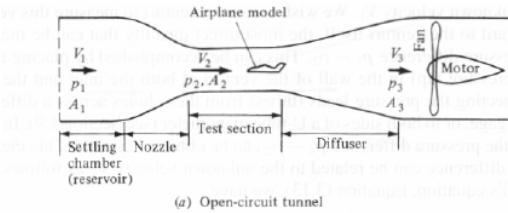
$$V_1^2 = \frac{2}{\rho} (p_2 - p_1) + V_2^2$$

$$V_1^2 = \frac{2}{\rho} (p_2 - p_1) + \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 V_1^2$$

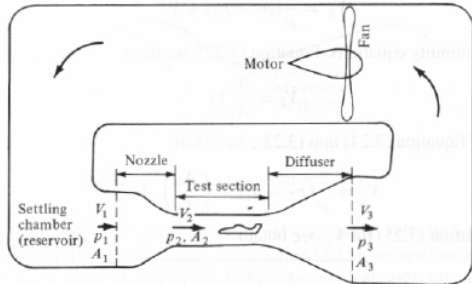
$$V_1 = \sqrt{\frac{2 (p_2 - p_1)}{\rho [(A_1 / A_2)^2 - 1]}}$$



Rüzgar Tünelleri



(a) Open-circuit tunnel



(b) Closed-circuit tunnel

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho} (p_1 - p_2) + V_1^2$$

$$V_2^2 = \frac{2}{\rho} (p_1 - p_2) + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 V_1^2$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 (p_1 - p_2)}{\rho [1 - (A_2 / A_1)^2]}}$$

Örnek problem

Boyun alanının giriş alanına oranı 0.8 olan bir venturi deniz seviyesindeki standart atmosfer koşullarında yer almaktadır. Giriş ve boyun kesitleri arasındaki basınçların farkı 7 lb/ft² olduğuna göre giriş kesitindeki hızı hesaplayınız.

Çözüm

Deniz seviyesinde standart koşullarda, $\rho = 0.002377 \text{ slug/ft}^3$,

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 (p_2 - p_1)}{\rho [(A_1 / A_2)^2 - 1]}} = \sqrt{\frac{2 (7)}{0.002377 [(1/0.8)^2 - 1]}} = 102.3 \text{ ft/s}$$

Örnek problem

Deniz seviyesinde standart koşullarda yer alan düşük-hızlı rüzgar tünelinin kollektörünün daralma oranı 12/1 dir. Deney odasındaki hızın 50 m/s olması halinde kollektör giriş kesimi ve deney odası duvarından alınan basınçlar arasındaki farkın kaç mm HgS olacağını hesaplayınız

Çözüm

Deniz seviyesinde standart koşullarda, $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$,
Cıvanın yoğunluğu $13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V_2^2 [1 - (A_2 / A_1)^2] = \frac{1}{2} (1.23)(50)^2 [1 - (1/12)^2] = 1527 \text{ N/m}^2$$

$$p_1 - p_2 = \rho_s g \Delta h$$

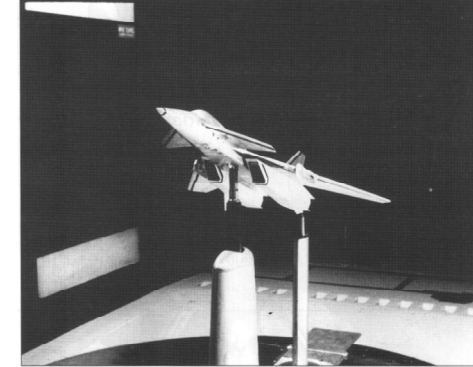
$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\rho_s g} = \frac{1527}{(13.6 \times 10^3)(9.81)} = 0.01148 \text{ m} = 11.48 \text{ mm}$$

Örnek problem

Kollektör daralma oranı 12/1 olan bir rüzgar tüneline, maksimum taşıma katsayısı 1.3 ve kanat üst-görünüm alanı 6 ft^2 olan bir uçak modeline etkiyen taşıma kuvvetlerinin, en fazla 1000 lb ölçeklenen bir balansla, maksimum C_L de dahil bütün hücum açılarını içerecek şekilde ölçülmesi planlanmıştır.

Dinlenme odası ve deney odası basınçları arasındaki basınç farkı için, balans hasar görmeyecek biçimde izin verilecek en büyük değeri hesaplayınız.

Deney odasındaki yoğunluk için deniz seviyesi standart koşullarındaki değer alınacaktır.



Çözüm

Deniz seviyesinde standart koşullarda, $\rho = 0.002377 \text{ slug/ft}^3$,

İzin verilen maksimum deney hızı $L_{\max} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_{L_{\max}} \Rightarrow V_{\infty} = \sqrt{\frac{2L_{\max}}{\rho_{\infty} S C_{L_{\max}}}}$

İzin verilen maksimum yük $L=1000 \text{ lb}$ olup $V_{\infty} = \sqrt{\frac{2(1000)}{0.002377(6)(1.3)}} = 328.4 \text{ ft/s}$

Bernoulli denklemi $p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$
Süreklilik denklemi $V_1 A_1 = V_2 A_2$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 [1 - (A_2 / A_1)^2]$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} (0.002377)(328.4)^2 [1 - (1/12)^2] = 127.3 \text{ lb/ft}^2$$

Örnek problem

- Kollektörünün daralma oranı 10/1 olan düşük-hızlı bir rüzgar tüneli havayı bir depodan alıp atmosfere açılan deney odasından dışarı atarak çalışmaktadır. Atmosfer basıncını $1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ve havanın yoğunluğunu 1.23 kg/m^3 alarak 100 mph deney hızı için depo basıncının kaç atmosfer olacağını hesaplayınız.
- Deney hızının 200 mph olması için depo basıncının ne kadar artırılması gerektiğini hesaplayınız. Depo basıncındaki artış ile deney hızındaki artışı karşılaştırarak yorumlayınız

Çözüm

$$V_2 = 100 \text{ mph} = 100 \frac{\text{mi}}{\text{h}} = (100) \frac{(1609 \text{ m})}{(3600 \text{ s})} = (100)(0.447) = 44.7 \text{ m/s}$$

Bernoulli denklemi $p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$
Süreklilik denklemi $V_1 A_1 = V_2 A_2$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 [1 - (A_2 / A_1)^2]$$

$$(a) \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V_2^2 [1 - (A_2 / A_1)^2] = \frac{1.23}{2} (44.7)^2 [1 - (1/10)^2] = 0.01217 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$p_1 = p_2 + 0.01217 \times 10^5 = 1.01 \times 10^5 + 0.01217 \times 10^5 = 1.022 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = \frac{1.022 \times 10^5}{1.01 \times 10^5} = 1.01 \text{ atm}$$

$$(b) \quad V_2 = 200 \text{ mph} = (200)(0.447) = 89.4 \text{ m/s}$$

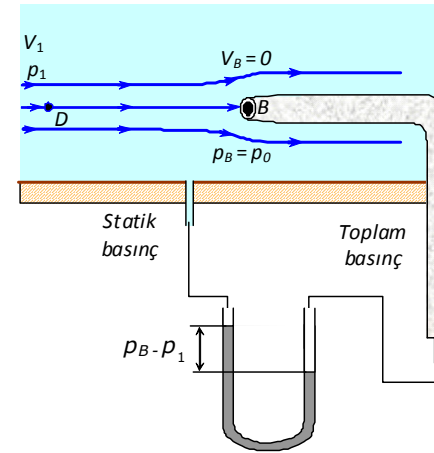
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho V_2^2}{2} [1 - (A_2 / A_1)^2] = \frac{1.23}{2} (89.4)^2 (0.99) = 0.0487 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$p_1 = 1.01 \times 10^5 + 0.0487 \times 10^5 = 1.059 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = \frac{1.059 \times 10^5}{1.01 \times 10^5} = 1.049 \text{ atm}$$

Deney hızındaki ve depo basıncındaki artış oranları $\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{1.049 - 1.01}{1.01} = \%3.9$, $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{200 - 100}{100} = \%100$

NOT: Basıncıdaki küçük bir değişimin hızda çok büyük oranda bir değişime yaratması düşük hızlı akımların tipik bir özelliğidir.

Pitot- tüpü ile hız ölçümü

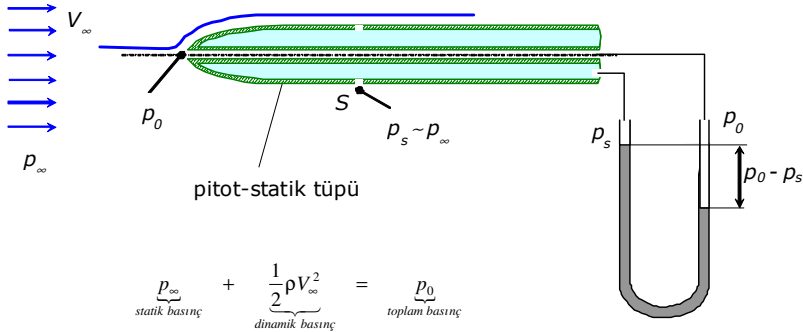


$$p_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_0 + 0$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}}$$

Pitot-statik tüpü ile hız ölçümü



$$\underbrace{p_{\infty}}_{\text{statik basınç}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2}_{\text{dinamik basınç}} = \underbrace{p_0}_{\text{toplam basınç}}$$

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\rho} q_{\infty}}$$

$$q_{\infty} = p_0 - p_1$$

Uyarı:

Bu eşitlik sadece sıkıştırılmaz akımlar için geçerlidir.

Örnek problem

Standart atmosfer koşullarında 4 km irtifada seyir uçuşu yapan bir P-35 uçağının sağ kanadı üzerindeki pitot tüpünden ölçülen basınç $6.7 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ olduğuna göre uçağın hızını hesaplayınız.

Çözüm

Standart atmosfer koşullarında 4 km irtifada basınç ve yoğunluk: $6.166 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ and 0.81935 kg/m^3

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(6.7 - 6.166)}{0.81935}} = 114.2 \text{ m/s}$$

UK birim sisteminde

$$V_1 = \frac{114.2}{0.447} = 255 \text{ mph}$$

Örnek problem

Bir P-35 uçağı, standart atmosfer koşullarında 4 km irtifada 114.2 m/s hızla uçarken maruz kaldığı dinamik basıncın aynıysa deniz seviyesinde uçuşu için hızı ne olmalıdır, hesaplayınız.

Çözüm

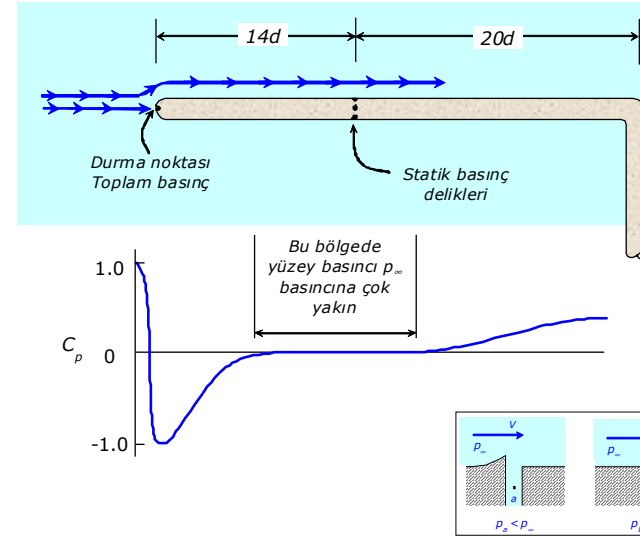
Standart atmosfer koşullarında yoğunluk

$$4 \text{ km irtifada: } \rho = 0.81935 \text{ kg/m}^3 \quad q_1 = \frac{1}{2} \rho V_1^2 = \frac{1}{2} (0.81935)(114.2)^2 = 5.343 \text{ N/m}^2$$

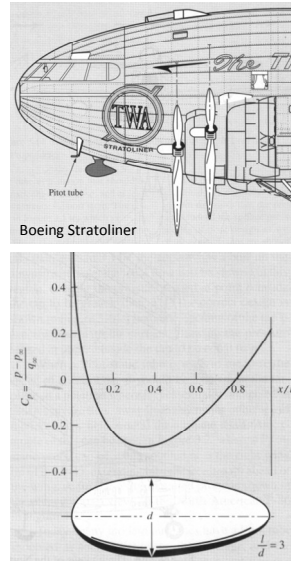
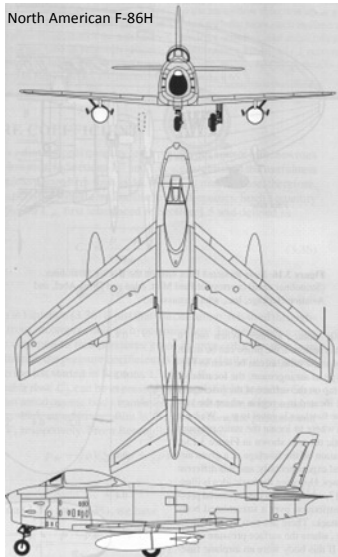
$$\text{Deniz seviyesinde: } \rho = 1.23 \text{ kg/m}^3 \quad q_1 = \frac{1}{2} \rho V_e^2 \rightarrow 5.343 \times 10^3 = \frac{1}{2} (1.23) V_e^2$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2(5.343 \times 10^3)}{1.23}} = 93.2 \text{ m/s}$$

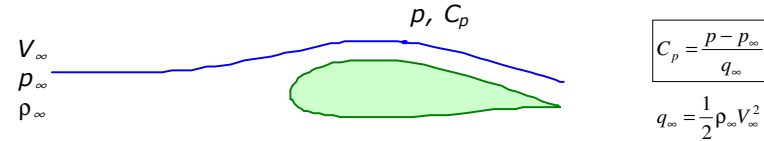
Pitot-statik tüpü Tasarımı



Uçaklarda uçuş hızının ölçülmesi



Basınç Katsayısı



Bernoulli denklemi

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 - V^2) = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right) = q_\infty \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right)$$

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

Örnek problem

Serbest akım hızı 150 ft/s iken bir kanat profili üzerinde hızın 225 ft/s olduğu noktadaki basınç katsayısını hesaplayınız.

Çözüm

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = 1 - \left(\frac{225}{150} \right)^2 = -1.25$$

Örnek problem

Bir uçak modeli üzerinde basınç katsayısının $C_p = -5.3$ olduğu bir noktadaki akım hızını, serbest akım hızının (a) $V_\infty = 80$ ft/s ve (b) $V_\infty = 300$ ft/s olması halinde, akımı sıkıştırılmaz kabul ederek hesaplayınız.

Çözüm

$$a_\infty = 1117 \text{ ft/s}$$

$$(a) \quad V = \sqrt{V_\infty^2 (1 - C_p)} = \sqrt{(80)^2 [1 - (-5.3)]} = 208 \text{ ft/s} \quad M_\infty = \frac{80}{1117} = 0.072 \quad M = \frac{208}{1117} = 0.186$$

$$(b) \quad V = \sqrt{V_\infty^2 (1 - C_p)} = \sqrt{(300)^2 [1 - (-5.3)]} = 753 \text{ ft/s} \quad M_\infty = \frac{300}{1117} = 0.269$$

$$M = \frac{753}{1117} = 0.674 > 0.3$$

İrrotasyonel sıkıştırılmaz akım için Laplace denklemi

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Daimi halde

$$\rho = sb$$



$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$



İrrotasyonellik koşulundan

$$\vec{V} = \nabla \phi$$



$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$$



Laplace denklemi

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Laplace denklemi

Kartezyen koordinatlarda

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Silindirik koordinatlarda

$$\phi = \phi(r, \theta, z)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Küresel koordinatlarda

$$\phi = \phi(r, \theta, \Phi)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \Phi} \right) \right]$$

Akım fonksiyonu için Laplace denklemi

İki boyutlu halde

İrrotasyonellik koşulu

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$



$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Akım fonksiyonu için

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Laplace denklemi

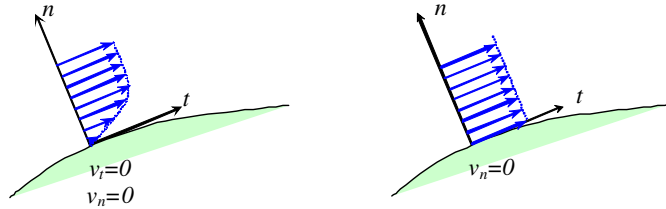
$$\nabla^2 \psi = 0$$

Sınır koşulları

Farklı geometriler etrafındaki çeşitli potansiyel akımlar için aynı Laplace denklemi geçerlidir.

Bu akımlara ait çözümleri birbirinden ayıran unsur “sınır koşulu”dur.

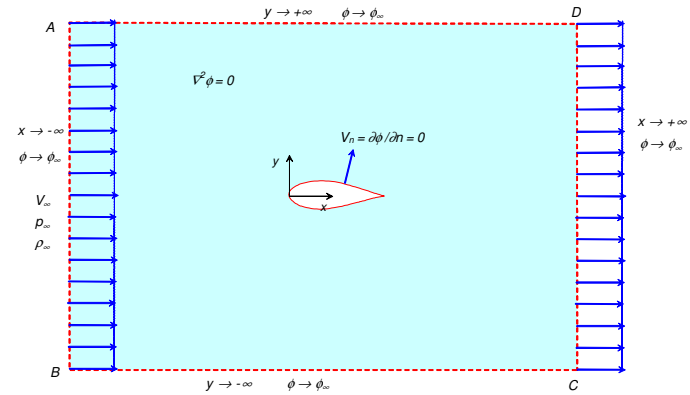
Yüzey sınır koşulu



Viskoz akım

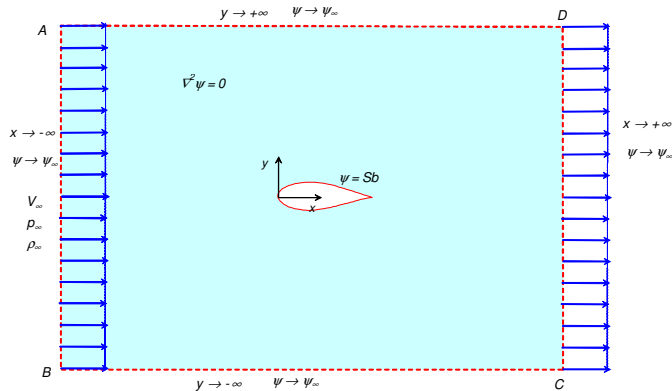
Potansiyel akım

Potansiyel fonksiyonu için problem



$$\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi = \phi(x, y, z) \Rightarrow \vec{V} = \nabla \phi \Rightarrow C_p = 1 - \frac{|\vec{V}|^2}{V_\infty^2} \Rightarrow \begin{aligned} C_l &\propto \oint C_p d\bar{x} \\ C_m &\propto \oint C_p \bar{x} d\bar{x} \end{aligned}$$

Akım fonksiyonu için problem (sadece 2-boyutlu halde)



$$\nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow \psi = \psi(x, y) \Rightarrow \begin{aligned} u &= \partial \psi / \partial y \\ v &= -\partial \psi / \partial x \\ V^2 &= u^2 + v^2 \end{aligned} \Rightarrow C_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \Rightarrow \begin{aligned} C_l &\propto \oint C_p d\bar{x} \\ C_m &\propto \oint C_p \bar{x} d\bar{x} \end{aligned}$$

Süperpozisyon ilkesi

Laplace denklemi lineerdir

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Laplace denkleminin çeşitli çözümleri

$$f_1, f_2, f_3, \dots$$

$$\nabla^2 f_1 = 0, \quad \nabla^2 f_2 = 0, \quad \nabla^2 f_3 = 0, \quad \dots$$

Bunlar toplanarak

$$\nabla^2 (f_1 + f_2 + f_3 + \dots) = 0$$

$$\nabla^2 f = 0$$

O halde

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

Süperpozisyon

fonksiyonu da Laplace denkleminin bir çözümüdür

Basit akımlar – Üniform paralel akım

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_{\infty} \cos \beta \Rightarrow \phi = V_{\infty} \cos \beta \cdot x + A(y)$$

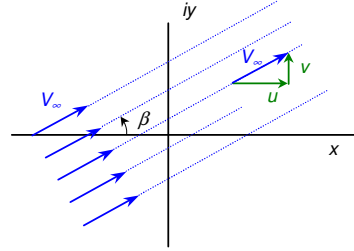
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_{\infty} \sin \beta \Rightarrow \phi = V_{\infty} \sin \beta \cdot y + B(x)$$

$$\phi = V_{\infty} (x \cdot \cos \beta + y \cdot \sin \beta)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_{\infty} \cos \beta \Rightarrow \psi = V_{\infty} y \cdot \cos \beta + C(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_{\infty} \sin \beta \Rightarrow \psi = -V_{\infty} x \cdot \sin \beta + D(y)$$

$$\psi = V_{\infty} (y \cdot \cos \beta - x \cdot \sin \beta)$$



Üniform paralel akımda sirkülasyon

Sirkülasyon tanımı $\Gamma \equiv -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s}$

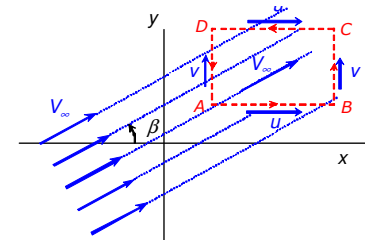
ABCD dikdörtgenel yolu boyunca integral alınarak

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{s} - \int_B^C \vec{V} \cdot d\vec{s} - \int_C^D \vec{V} \cdot d\vec{s} - \int_D^A \vec{V} \cdot d\vec{s} \\ &= -\int_A^B V_{\infty} \cos \beta dx - \int_B^C V_{\infty} \sin \beta dy - \int_C^D V_{\infty} \cos \beta dx - \int_D^A V_{\infty} \sin \beta dy \\ &= -V_{\infty} \cos \beta \Delta x - V_{\infty} \sin \beta \Delta y - V_{\infty} \cos \beta (-\Delta x) - V_{\infty} \sin \beta (-\Delta y) \end{aligned}$$

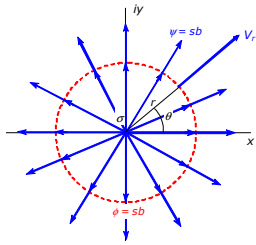
$$\Gamma = 0$$

$$\Gamma = -\iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{s} = 0$$

Üniform paralel akım sirkülasyonsuzdur.
Vortisitesiz, yani irrotasyondur.



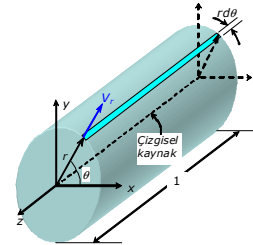
Basit akımlar – Kaynak akımı



$$\sigma = \int_0^{2\pi} V_r (r d\theta) (1) = r V_r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r V_r$$

$$V_r = \frac{\sigma}{2\pi r}$$

$$V_{\theta} = 0$$



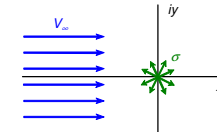
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\sigma}{2\pi r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = V_{\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \phi &= \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \\ \psi &= \frac{\sigma}{2\pi} \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma = -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -\oint_C V_{\theta} \cdot r d\theta = -\oint_C (0) \cdot r d\theta = 0 \quad \text{Kaynak akımı sirkülasyon oluşturmaz.}$$

Süperpozisyon: Üniform akım + Kaynak

$$\phi = V_{\infty} r \cos \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \quad V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_{\infty} \cos \theta + \frac{\sigma}{2\pi r}$$

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \theta \quad V_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_{\infty} \sin \theta$$

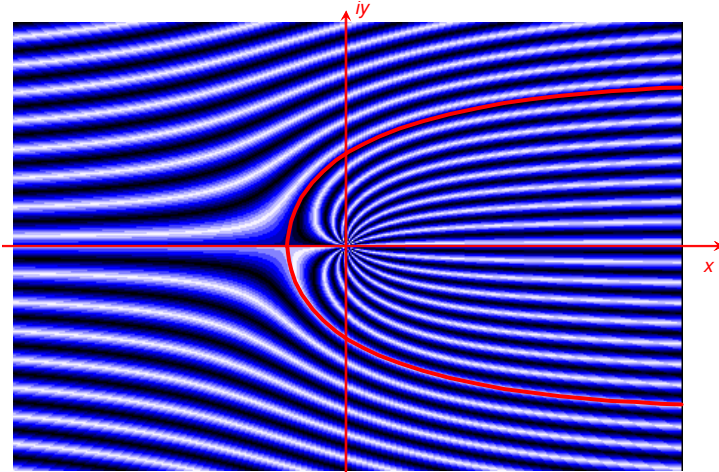


Durma noktası: $\begin{cases} V_{\infty} \cos \theta + \frac{\sigma}{2\pi r} = 0 \\ V_{\infty} \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -\frac{\sigma}{2\pi V_{\infty} \cos \theta} \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{\sigma}{2\pi V_{\infty}} \\ \theta = \pi \end{cases}$

Akım çizgisi denklemi: $V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \theta = \psi_c = sb$

Durma akım çizgisi: $r = \frac{\sigma}{2\pi V_{\infty}} \Rightarrow \psi_0 = V_{\infty} \frac{\sigma}{2\pi V_{\infty}} \sin \pi + \frac{\sigma}{2\pi} \pi = \frac{\sigma}{2} \Rightarrow V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \theta = \frac{\sigma}{2}$

Üniform akım + Kaynak



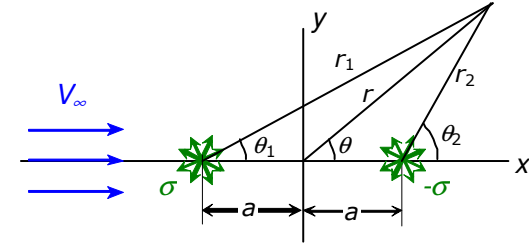
Süperpozisyon: Rankine ovali

$$\phi = V_{\infty} r \cos \theta + \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta + \frac{\sigma}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\phi = V_{\infty} x + \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

$$\psi = V_{\infty} y + \frac{\sigma}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{y}{x+a} - \tan^{-1} \frac{y}{x-a} \right)$$



Durma noktasında: $u=0, v=0$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_{\infty} + \frac{\sigma}{2\pi} \left(\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

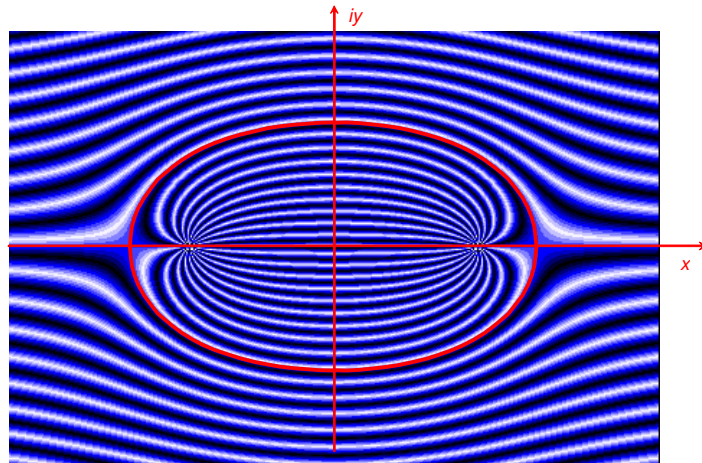
$$V_{\infty} + \frac{\sigma}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right) = 0$$

$$\boxed{x = \pm \sqrt{a^2 + \frac{a\sigma}{\pi V_{\infty}}}}$$

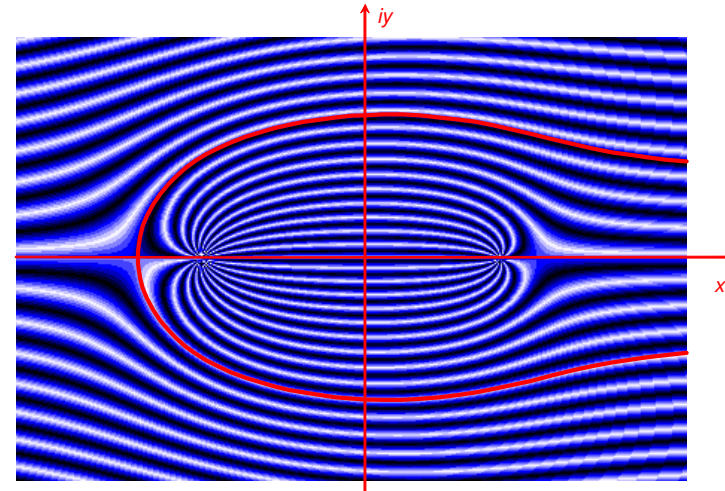
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \left(\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

$$y=0$$

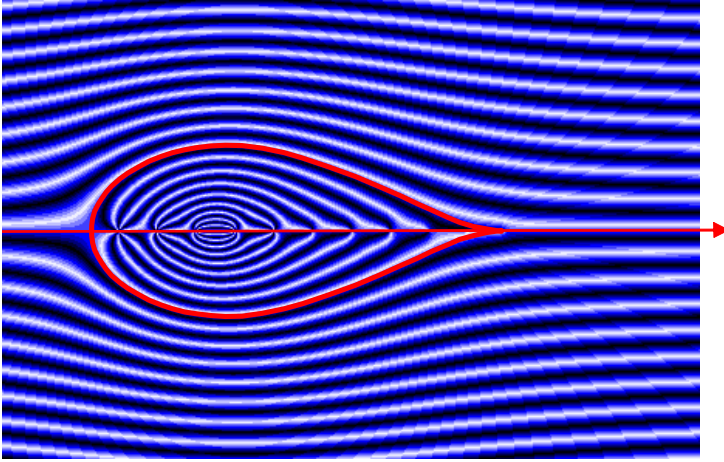
Rankine ovali



Kaynak kuyu şiddetleri farklı olursa



Kaynak kuyu kombinasyonları



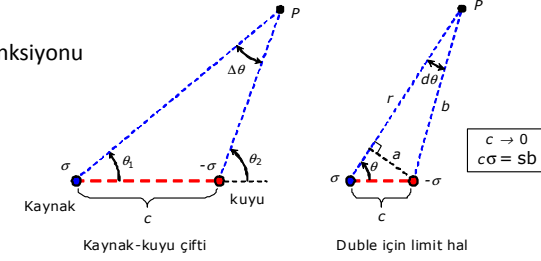
Basit akımlar – Duple akımı

Kaynak kuyu çifti için akım fonksiyonu

$$\psi = \frac{\sigma}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = -\frac{\sigma}{2\pi} \Delta\theta$$

Duble tanımı

$$\psi = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\sigma}{2\pi} d\theta \right)$$



Limitte c uzaklığı sıfıra giderken $c\sigma = sb$ kalması için σ kaynak şiddeti sonsuza gitmelidir

$$\psi = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\sigma}{2\pi} d\theta \right) = (\infty) \times (0)$$

$$\left. \begin{array}{l} a = c \sin \theta \\ b = r - c \cos \theta \end{array} \right\} \rightarrow d\theta = \frac{a}{b} = \frac{c \sin \theta}{r - c \cos \theta} \Rightarrow \psi = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\sigma c}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r - c \cos \theta} \right) = -\frac{\mu}{2\pi} \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{r - c \cos \theta} \right)$$

Dublenin
akım
fonksiyonu

$$\psi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$$

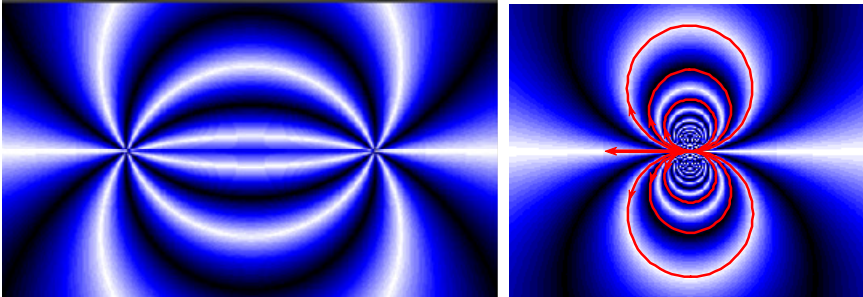
Benzeri işlemlerle

Dublenin
potansiyel
fonksiyonu

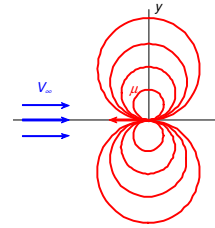
$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

Kaynak kuyu çifti

Duble



Dairesel silindir etrafında taşınmasız akım Üniform akım + Duple



$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{\mu}{2\pi V_{\infty} r^2} \right)$$

$$R^2 = \frac{\mu}{2\pi V_{\infty}}$$

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

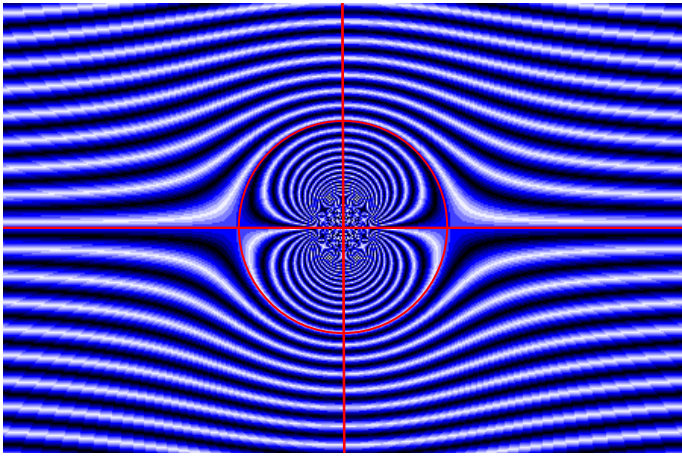
Akım çizgisi denklemi

$$\psi_s = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) = sb$$

$$\psi_s = V_{\infty} r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0; \pi & x \text{ eksenine} \\ 1 - \frac{R^2}{r^2} = 0 \Rightarrow r = R & R \text{ yarıçaplı daire} \end{cases}$$

O halde bu kombinasyon R yarıçaplı bir daire etrafındaki akımı vermektedir.

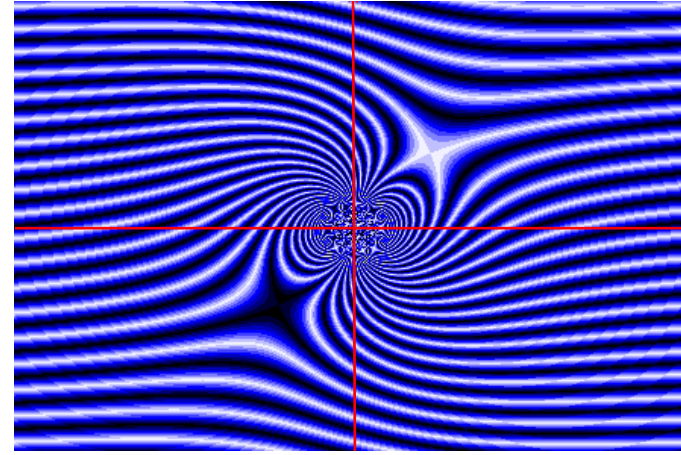
Üniform akım + Duple süperpozisyonu



UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

45

Üniform akım + Hatalı Duple süperpozisyonu



UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

46

Dairesel silindir etrafında taşınmaz akım

Hız bileşenleri $V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} V_\infty r \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \Rightarrow V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos \theta$

$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\left[V_\infty r \sin \theta \frac{2R^2}{r^3} + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta\right] \Rightarrow V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta$

$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos \theta = 0 \Rightarrow r = R$ Radyal hızlar R yarıçaplı daire üzerinde sıfır

$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0; \pi$ Çevresel hızlar x ekseninde sıfır

O halde durma noktaları $\begin{cases} r = R \\ \theta = 0 \end{cases}$ ve $\begin{cases} r = R \\ \theta = \pi \end{cases}$ noktalarıdır.

UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

47

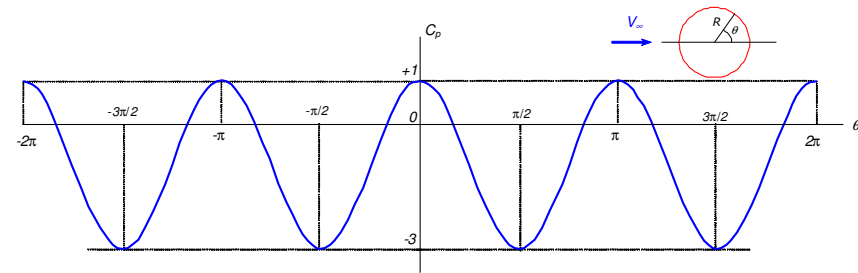
Dairesel silindir etrafında taşınmaz akım

Daire üzerinde
teğetsel hızlar

$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta \xrightarrow{r=R} V_\theta = -2V_\infty \sin \theta$

Daire üzerinde
basınç katsayıları

$C_p = 1 - \left(\frac{V_\theta}{V_\infty}\right)^2 \xrightarrow{r=R} C_p = 1 - 4\sin^2 \theta$

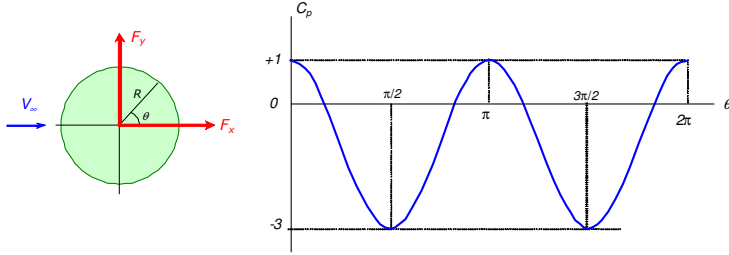


UCK351 Aerodinamik ders notları
(MAY)

48

Dairesel silindir etrafında taşınmaz akım

Taşıma ve sürüklenme kuvvetleri



Basınç dağılımındaki simetriden dolayı

$$C_d = C_x = \oint C_p d\bar{y} = 0$$

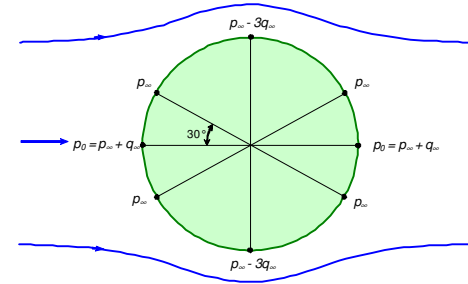
$$C_l = C_y = -\oint C_p d\bar{x} = 0$$

Örnek problem

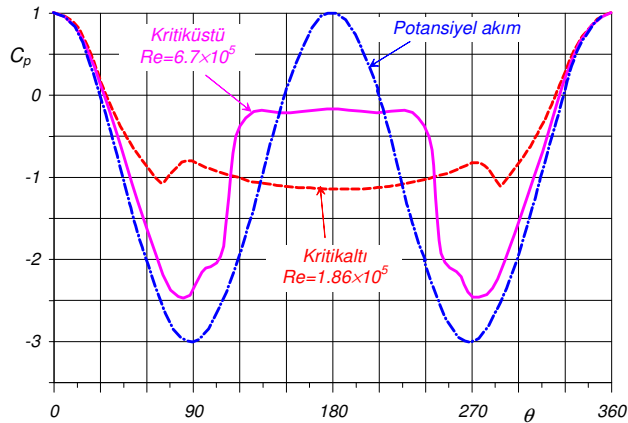
Taşınmaz akım halinde dairesel silindir üzerinde basıncın serbest akım basıncına eşit olduğu noktaların yerini bulunuz.

Çözüm

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \pm 1/2 \Rightarrow \theta = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$$



Dairesel silindir etrafındaki gerçek akım



Basit akımlar – Girdap akımı

Girdap akımının hız alanı $V_r = 0$ $V_\theta = \frac{sb}{r}$

Sirkülasyon $\Gamma = -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -V_\theta (2\pi r) \Rightarrow V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$

Γ : Girdabın şiddeti

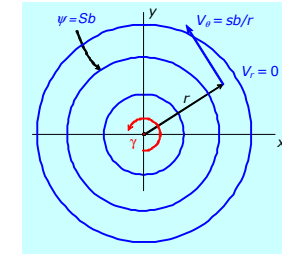
Vortisite sirkülasyon ilişkisinden $\Gamma = -\iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{s} = sb$

$\nabla \times \vec{V}$ ve $d\vec{s}$ aynı doğrultuda olup $\Gamma = -\iint_S |\nabla \times \vec{V}| \cdot dS = sb$

Γ bütün akım çizgileri etrafında aynı olup r yarıçapından bağımsızdır. Buna göre yarıçap sonsuz küçük yapılarak

$$\Gamma = -\iint_S |\nabla \times \vec{V}| \cdot dS = sb \rightarrow |\nabla \times \vec{V}| \cdot dS = sb \rightarrow |\nabla \times \vec{V}| = \frac{sb}{dS} \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\nabla \times \vec{V}| = \frac{sb}{dS} \rightarrow \infty$$

Girdap merkezinde vortisite sonsuz olup bu nokta bir tekil nokta olarak nitelendirilir. Bunun dışındaki bütün noktalarda akım irrotasyondur.



Girdap akımı

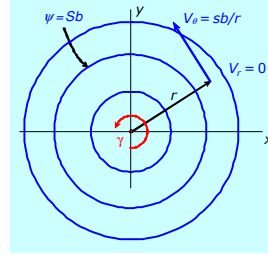
Girdap akımının akım fonksiyonu

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$



$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$



Girdap akımının potansiyel fonksiyonu

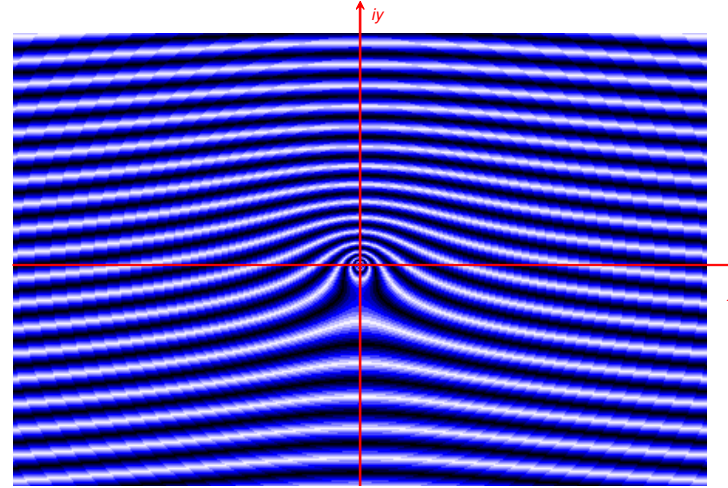
$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

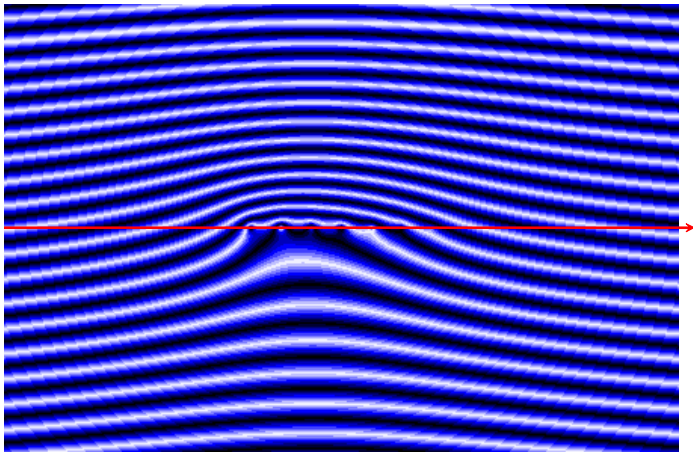


$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

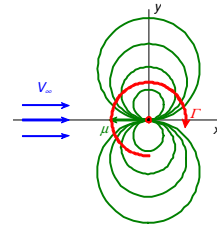
Üniform akımda girdap



Üniform akımda girdap dizisi



Dairesel silindir etrafında taşınalı akım Üniform akım + Duple + Girdap



$$\psi = V_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$$

$$r = R \quad \text{için} \quad \psi_s = 0 = sb$$

R yarıçaplı daire halen bir akım çizgisidir. O halde bu fonksiyon R yarıçaplı bir daire etrafındaki akımı temsil etmektedir.

Hız bileşenleri

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos \theta$$

$$\psi_s = 0 = sb \quad \text{için}$$

Durma noktaları

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos \theta = 0$$

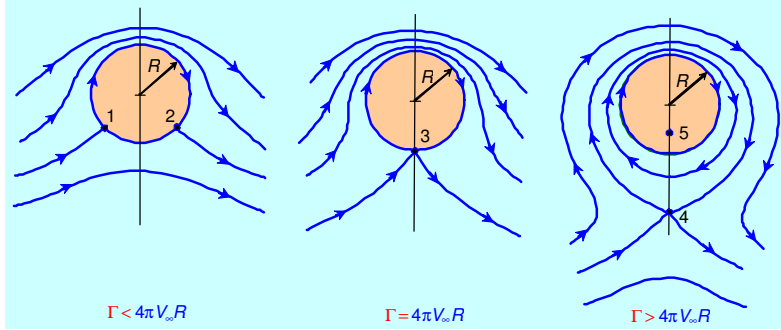
$$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$$

$$r = R$$

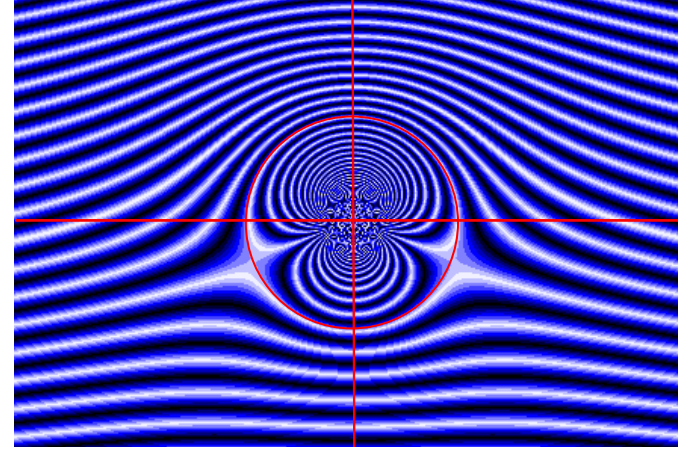
$$\theta = \sin^{-1} \left(-\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R} \right)$$

Dairesel silindir etrafında taşımali akim

Durma noktaları $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty R}\right)$



Dairesel silindir etrafında taşımali akim



Dairesel silindir etrafında taşımali akim

Daire üzerinde teğetsel hızlar

$r = R$

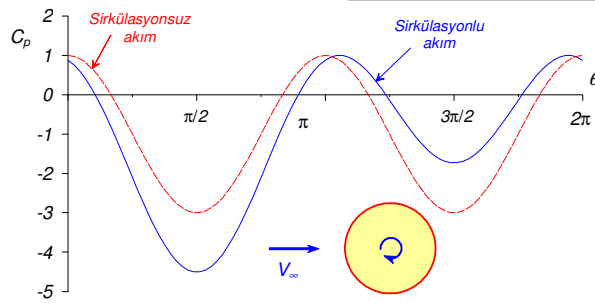
$$V_\theta = -2V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Daire üzerinde basınç katsayıları



$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = 1 - 4\sin^2 \theta \left(1 + \frac{\Gamma}{4\pi R V_\infty \sin \theta}\right)^2$$

$$C_p = 1 - 4\sin^2 \theta - \frac{2\Gamma}{\pi R V_\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 V_\infty^2}$$



Dairesel silindir etrafında taşımali akim

Dairesel silindirin sürüklenme katsayısı

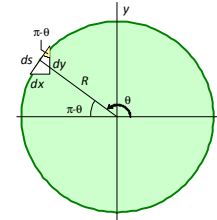
$$C_d = \oint C_p d\bar{y} \quad \left\{ d\bar{y} = \frac{dy}{2R} = \frac{ds \cos(\pi - \theta)}{2R} = \frac{R d\theta (-\cos \theta)}{2R} = -\frac{\cos \theta d\theta}{2} \right\}$$

$$C_d = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[1 - 4\sin^2 \theta - \frac{2\Gamma}{\pi R V_\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 V_\infty^2} \right] \cos \theta d\theta$$

$$C_d = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 V_\infty^2} \right) \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta - \frac{\Gamma}{\pi R V_\infty} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 3\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = 0$$



$$\Rightarrow C_d = 0$$

Dairesel silindir etrafında taşımali akım

Dairesel silindirin taşıma katsayısı

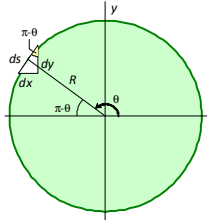
$$C_l = -\oint C_p d\bar{x} \quad \left\{ d\bar{x} = \frac{dx}{2R} = \frac{ds \sin(\pi - \theta)}{2R} = \frac{R d\theta \sin \theta}{2R} = \frac{\sin \theta d\theta}{2} \right\}$$

$$C_l = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma}{\pi R V_\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 V_\infty^2} \right] \sin \theta d\theta$$

$$C_l = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 V_\infty^2} \right) \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_0 - 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta}_0 - \frac{\Gamma}{\pi R V_\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_\pi \Rightarrow C_l = \frac{\Gamma}{R V_\infty}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3 \sin \theta + \sin 3\theta}{4} d\theta = \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_0 - \frac{1}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 3\theta d\theta}_0 = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi$$



$$C_l = \frac{\Gamma}{R V_\infty}$$

Dairesel silindir etrafında taşımali akım

Aerodinamik taşıma kuvveti

$$L = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 C_L S$$

Dairesel silindir için referans alan

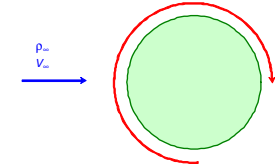
$$S = (2R)(1)$$

Dairesel silindirin taşıma katsayısı

$$C_l = \frac{\Gamma}{R V_\infty}$$

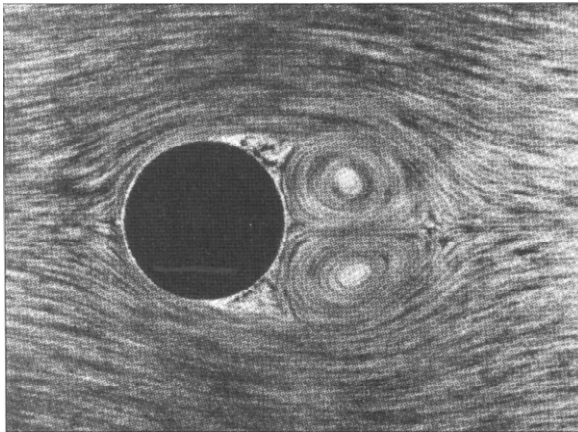
Dairesel silindire etkiyen taşıma kuvveti

$$l = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 C_l (2R)(1) = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{\Gamma}{R V_\infty} 2R \Rightarrow l = \rho_\infty V_\infty \Gamma \quad \text{Joukowsky taşıma kanunu}$$



Dairesel silindir etrafında gercek akım

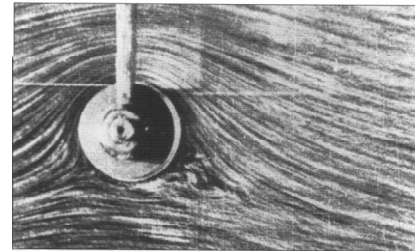
Taşımasız hal



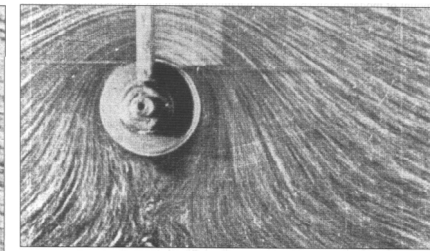
$$C_d \neq 0$$

Dairesel silindir etrafında gercek akım

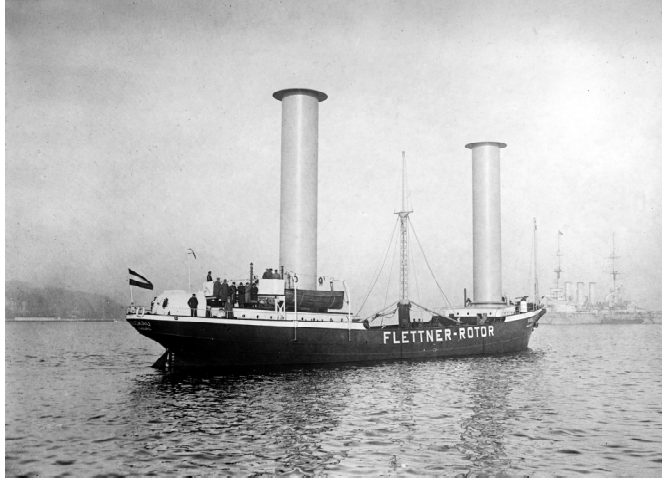
Taşımalı (şirkülasyonlu) hal



Yüzeyin çizgisel hızı = $3 V_\infty$.



Yüzeyin çizgisel hızı = $6 V_\infty$.



http://en.wikipedia.org/wiki/Flettner_ship

Örnek problem

Bir dairesel silindir etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akımda taşıma katsayısı 5 olduğuna göre dairesel silindir üzerindeki durma noktalarının yerlerini ve basıncın serbest akım basıncına eşit olduğu noktaların yerlerini bulunuz.

Çözüm

Sirkülasyonlu halde dairesel silindir üzerinde durma noktalarının açıl konumu

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty} R} \right)$$

Taşıma katsayısı $c_l = \frac{\Gamma}{RV_{\infty}} = 5 \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(-\frac{5}{4\pi} \right) = 203.4^\circ; 336.6^\circ$

Basınç katsayısı $C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi RV_{\infty}} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi RV_{\infty}} \right)^2$

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta - \frac{10}{\pi} \sin \theta - \left(\frac{5}{2\pi} \right)^2 = 0.367 - 3.183 \sin \theta - 4 \sin^2 \theta$$

$$C_p = 0 \Rightarrow 0.367 - 3.183 \sin \theta - 4 \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 243.8^\circ; 296.23^\circ \\ \theta = 5.85^\circ; 174.1^\circ \end{cases}$$

Örnek problem

Bir dairesel silindir etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akımda taşıma katsayısı 5 olduğuna göre dairesel silindir üzerindeki en büyük negatif basınç katsayısını hesaplayınız.

Çözüm

Dairesel silindir üzerinde hızlar $V_{\theta} = - \left(2 V_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)$

Hızın en büyük değeri $\sin \theta = 1 \Rightarrow V = - \left(2 V_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)$

Taşıma katsayısı $c_l = \frac{\Gamma}{RV_{\infty}} = 5 \Rightarrow V = - \left(2 V_{\infty} + \frac{5 V_{\infty}}{2\pi} \right) = -2.796 V_{\infty}$

Minimum basınç katsayısı $C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}} \right)^2 = 1 - (2.796)^2 = -6.82$

Örnek problem

25 m/s hızdaki akımda yer alan 0.5 m çapındaki dairesel silindir üzerindeki en büyük hız 75 m/s olarak ölçülmüştür. Serbest akım 3 km irtifadaki standart atmosfer koşullarındadır. Silindire etkiyen taşıma kuvvetini (birim açıklık başına) hesaplayınız.

Çözüm

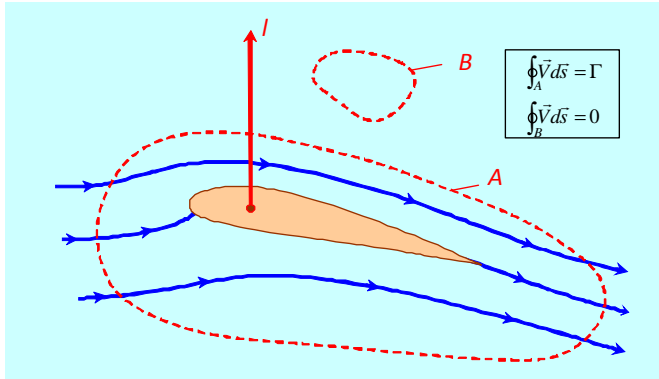
Dairesel silindir üzerinde hızın en büyük değeri $V_{\theta} = - \left(2 V_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right) \xrightarrow{\sin \theta = 1} V = - \left(2 V_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)$

$$-75 = - \left(2 \times 25 + \frac{\Gamma}{2\pi \times 0.25} \right) \Rightarrow \Gamma = 12.5\pi = 39.27 \text{ m}^2/\text{s}$$

Joukowski taşıma kanunu $l = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$

3 km irtifada yoğunluk $\rho = 0.90926 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow l = 0.90926 \times 75 \times 39.27 = 892.7 \text{ N}$

Kutta-Joukowski teoremi



Dairesel silindir için geliştirilen kesiti için de geçerlidir.

$$l = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$$

Joukowski
taşıma
kanunu

bağıntısı herhangi bir silindir