

AKIŞKAN HAREKETİNİ YÖNETEN GENEL DENKLEMLER, TEMEL KAVRAMLAR

Bazı önemli kavramlar

Kontrol hacmi

Debi

Hareketi takiben alınmış türev

Genel denklemlerin integral formları

Genel denklemlerin diferansiyel formları

Bazı temel kavramlar

Akım çizgisi

Akışkan kinematiği, Rotasyonel ve irrotasyonel hareketler

Sirkülasyon

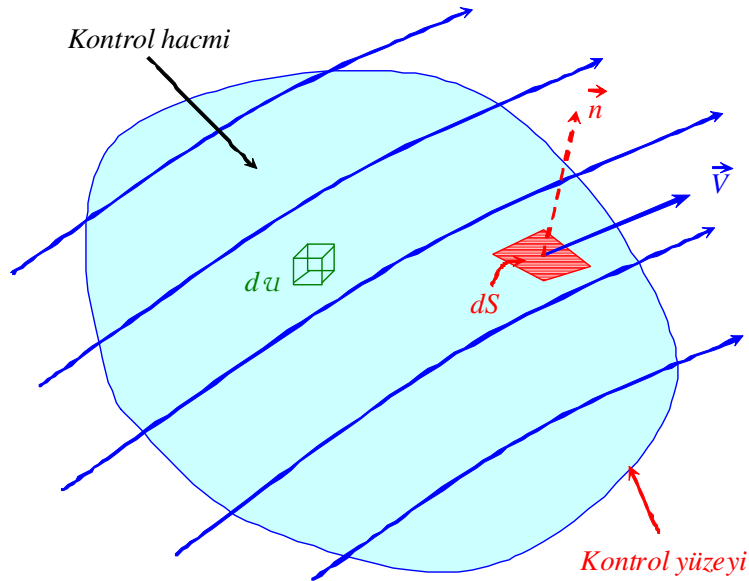
Akım fonksiyonu

Hız potansiyeli

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

1

Uzayda Sabit Konumlu, Sonlu Kontrol Hacmi



UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

2

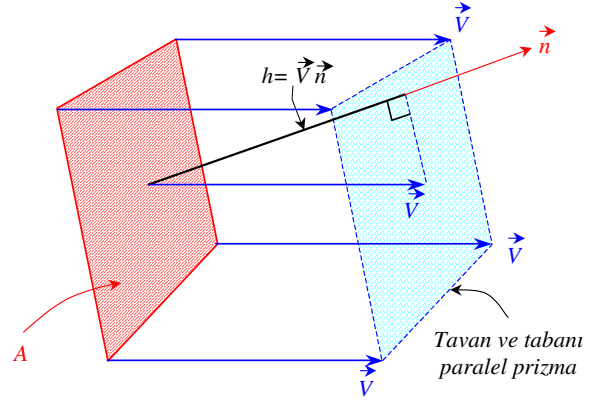
Debi

A : Yüzey alanı

$\vec{V}$: Akışkanın birim zamanda aldığı yol – hız

$\vec{n}$: Yüzey normali

h : Prizmanın yüksekliği



hacımsal debi = Birim zamanda A yüzeyinden geçen akışkan hacmi

= prizmanın hacmi = Taban alanı $\times$ Yükseklik

$$Q = A \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n})$$

Kütleli debi = Hacımsal debi $\times$ yoğunluk

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{Q} = \rho \cdot A \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n})$$

Hareketi Takiben Alınmış Türev

Tam diferansiyel tanımı

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz + \frac{\partial A}{\partial t} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Hız vektörü
tanımı

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}, \rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z}$$

Gradyan vektörü tanımı

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{k}$$

Hareketi takiben alınmış türev

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla A$$

Süreklilik denkleminin integral biçimi

Kütlenin korunumu ilkesi : Kütle yok edilemez / yoktan var edilemez



$\mathcal{U}$ kontrol hacminin S yüzeyinden birim zamanda çıkan net kütle miktarı

=

$\mathcal{U}$ kontrol hacmindeki kütle miktarının birim zamandaki değişimi



$$= \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

=



$$- \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV + \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Momentum denkleminin integral biçimi

Hareketin korunumu ilkesi : Dış kuvvetler toplamı atalet kuvvetine eşittir

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$



Sabit kütle için

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{V})$$



Dış kuvvetler toplamı = Momentumun birim zamandaki değişimi

Momentum denkleminin integral biçimi

Dış kuvvetler

Bünyesel kuvvetler

Gravitasyonel kuvvetler
 $\vec{f}$ birim kütleye etkiyen bünyesel kuvvettir

$$= \iiint_V \vec{f} \cdot \rho \cdot dV$$

Elektromanyetik kuvvetler

Yüzeysel kuvvetler

Basınç kuvvetleri

$$= - \iint_S p \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Teğetsel kuvvetler

$$= \vec{F}_{visc}$$

Momentum denkleminin integral biçimi

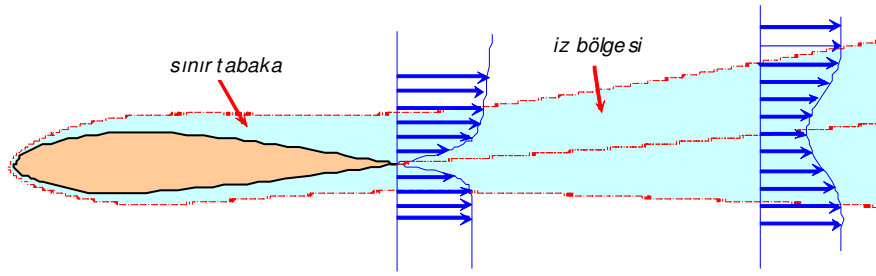
Momentumun birim zamandaki değişimi

Kontrol yüzeyinden çıkan ve giren kütlelerin taşıdıkları momentumlar arasındaki fark	$= \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS) \cdot \vec{V}$
Kontrol hacmindeki kütle miktarının değişiminden kaynaklanan momentum değişimi	$= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dV) \cdot \vec{V}$

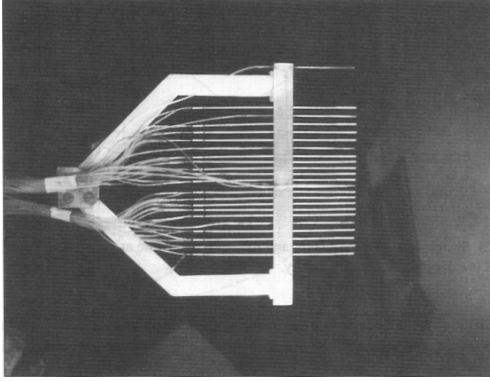
Sonuç olarak Momentum denkleminin integral biçimi

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dV) \cdot \vec{V} + \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS) \cdot \vec{V} = - \iint_S p \cdot \vec{n} \cdot dS + \vec{F}_{visc} + \iiint_V \rho \cdot \vec{f} \cdot dV$$

Momentum denkleminin uygulaması 2-Boyutlu cismin sürüklemesi



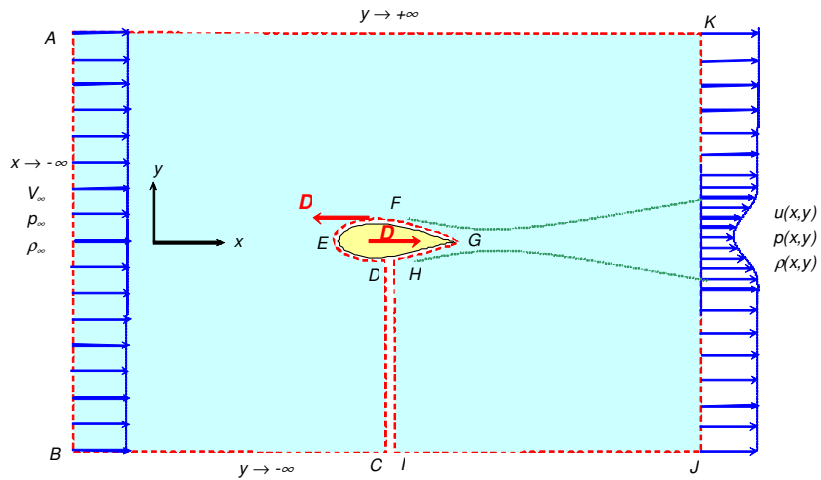
Bir kanat profilinin gerisindeki hız profilleri



Pitot-tarağı

Momentum denkleminin uygulaması 2-Boyutlu cismin sürüklemesi

Momentum denklemini
$$\sum \vec{F} = \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$



AK, AB ve BJ yüzeyleri profilden yeterince uzakta: Akım serbest akım koşullarında

x – momentum denklemini
$$-D + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\infty} - p) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho u^2 - \rho_{\infty} V_{\infty}^2) dy$$

Momentum denkleminin uygulaması 2-Boyutlu cismin sürüklemesi

x – momentum denklemi

$$-D + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\infty} - p) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho u^2 - \rho_{\infty} V_{\infty}^2) dy$$

$$-D + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\infty} - p) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy - V_{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho V_{\infty} dy$$

$$-D + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\infty} - p) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy - V_{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u dy$$

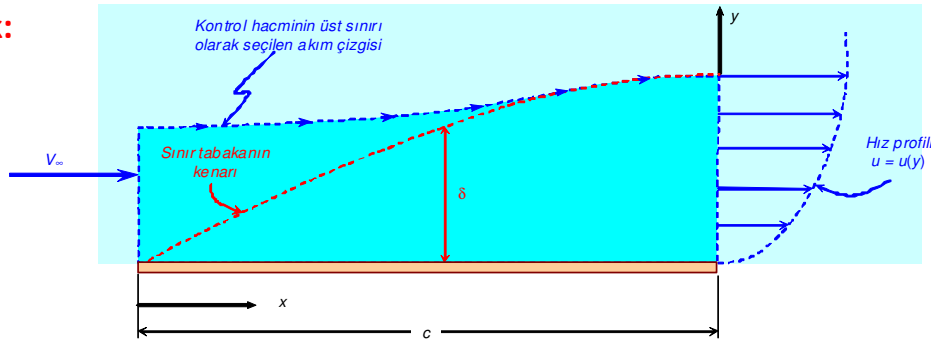
$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\infty} - p) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u (V_{\infty} - u) dy$$

JK kesiti yeterince geride ise

$p = p_{\infty}$ ve iz dışında $u = V_{\infty}$

$$D = \int_{I_z} \rho u (V_{\infty} - u) dy$$

Örnek:



Uzunluğu c olan bir düz levha üzerinde gelişen laminar sınır tabakanın firar kenarındaki kalınlığı ve levhanın sürtünme sürüklem katsayısı sırasıyla

$$\frac{\delta}{c} = \frac{5}{\sqrt{Re_c}}, \quad C_f \equiv \frac{D'}{q_{\infty} c (1)} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_c}}; \quad Re = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} c}{\mu_{\infty}}$$

şeklinde verilmektedir. Sınır tabaka içerisindeki hız dağılımı

$$u = V_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^n$$

şeklindeki bir kuvvet kanunu ile tanımlandığına göre, bu bağıntıdaki n üssünün değerini hesaplayınız.

Çözüm:

Sürtünme sürüklemesi katsayısı

$$C_f = \frac{D'}{q_\infty c}$$

Momentum denkleminde

$$D = \int_{\Gamma_z} \rho u (V_\infty - u) dy$$

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_c}}; \quad \frac{u}{V_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n$$



$$C_f = \frac{\rho_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} \int_0^\delta u (V_\infty - u) dy = 2 \int_0^{\delta/c} \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) d\left(\frac{y}{c}\right)$$

$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = 2 \int_0^{\delta/c} \left[\left(\frac{y/c}{\delta/c}\right)^n - \left(\frac{y/c}{\delta/c}\right)^{2n} \right] d\left(\frac{y}{c}\right)$$

İntegral alınarak

$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{\delta}{c}\right) - \frac{2}{2n+1} \left(\frac{\delta}{c}\right)$$

$$\frac{\delta}{c} = \frac{5}{\sqrt{Re_c}}$$



$$\frac{1.328}{\sqrt{Re_c}} = \frac{10}{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{Re_c}}\right) - \frac{10}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{Re_c}}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1.328}{10}$$

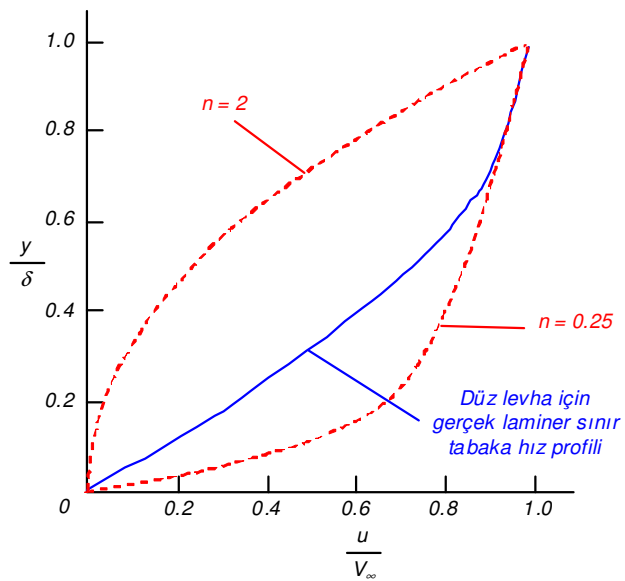


$$0.2656n^2 - 0.6016n + 0.1328 = 0$$



$$n = 2.0 \quad \text{veya} \quad 0.25$$

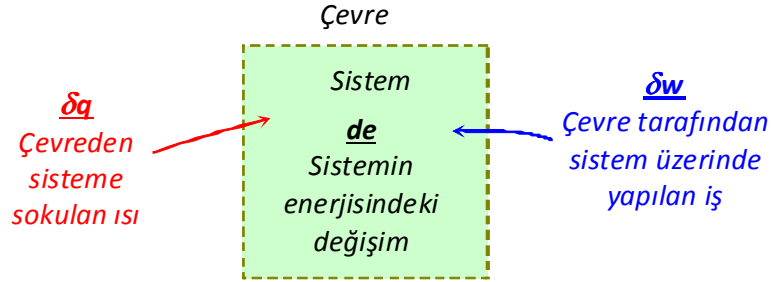
Not: Önerilen hız dağılımının gerçek laminar sınır tabaka hız dağılımına uymadığı dikkati çekmektedir.



Enerji denkleminin integral biçimi

Enerjinin korunumu ilkesi Enerji yok edilemez, yoktan var edilemez, biçim değiştirir

Termodinamiğin 1. Kanunu

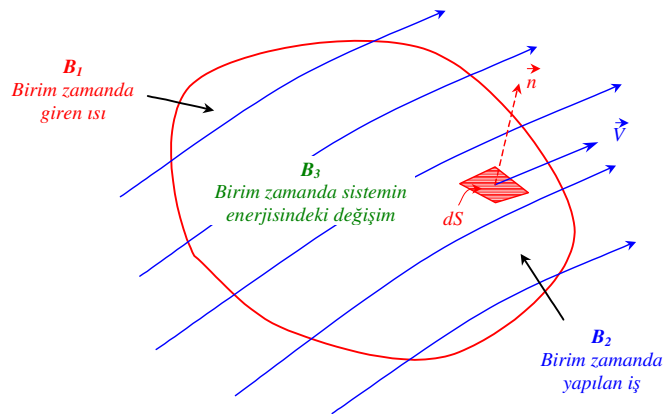


$$\delta q + \delta w = de \quad (\text{birim kütle başına})$$

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

15

Enerji denkleminin integral biçimi



$$B_1 + B_2 = B_3$$

NOT:

Enerji denkleminin aslında güç boyutunda olmakla birlikte, bir alışkanlık eseri olarak "enerji denkleminin" tabiri kullanılmaktadır.

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

16

Enerji denkleminin integral biçimi

B₁ – Sisteme birim zamanda sokulan ısı miktarı:

1- *Radyasyon* veya *yanma* yoluyla *birim zamanda* sokulan ısı $= \iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dv$

Not : $\dot{q}$ birim kütle başına sokulan ısı

2- *Viskoz kaynaklı* (ısı iletimi, kütle difüzyonu) olarak sokulan ısı $= \dot{Q}_{visc}$

Böylece *sisteme birim zamanda sokulan toplam ısı*

$$B_1 = \iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dv + \dot{Q}_{visc}$$

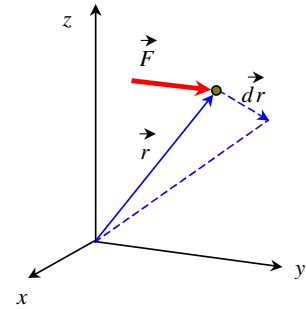
Enerji denkleminin integral biçimi

B₂ – Çevrenin sistem üzerinde birim zamanda yaptığı iş:

İş tanımı

$\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F}$ kuvvetinin birim zamanda yaptığı iş $\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$



Çevrenin sisteme etkittiği kuvvetlerin yaptığı iş

1- *Basınç kuvvetlerinin* yaptığı iş $= -\iint_S (p \cdot \vec{n} \cdot dS) \cdot \vec{V}$

2- *Bünyesel kuvvetlerin* yaptığı iş $= \iiint_V (\vec{f} \cdot \rho \cdot dv) \cdot \vec{V}$

3- *Viskoz kuvvetlerin* yaptığı iş $= \dot{W}_{visc}$

Böylece

$$B_2 = -\iint_S (p \cdot \vec{n} \cdot dS) \cdot \vec{V} + \iiint_V (\vec{f} \cdot \rho \cdot dv) \cdot \vec{V} + \dot{W}_{visc}$$

Enerji denkleminin integral biçimi

B₃ – Sistemin enerjisinin birim zamanda değişimi:

$$\text{Birim kütle başına enerji} = e + \frac{1}{2}V^2$$

e İç enerji (Durağan sistem için sadece iç enerji vardır)

$\frac{1}{2}V^2$ Kinetik enerji (Hareketli sistem için ilaveten kinetik enerji vardır.)

Kontrol yüzeyinden çıkan ve giren kütlelerin taşıdıkları enerjiler arasındaki fark	$= \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \left(e + \frac{1}{2}V^2 \right)$
Kontrol hacmindeki kütle miktarının değişiminden kaynaklanan enerji değişimi	$= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dv) \cdot \left(e + \frac{1}{2}V^2 \right)$

Enerji denkleminin integral biçimi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot \left(e + \frac{1}{2}V^2 \right) \cdot dv + \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \left(e + \frac{1}{2}V^2 \right) \\ & = - \iint_S (p \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} + \iiint_V (\vec{f} \cdot \rho \cdot dv) \cdot \vec{V} + \dot{W}_{visc} + \iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dv + \dot{Q}_{visc} \end{aligned}$$

NOT:

-Dışardan bir şaft ile güç sokuluyorsa $\dot{W}_{şaft}$ terimi eklenmeli

- Yükseklik farkı önemliyse $e + \frac{1}{2}V^2 + gz$ şeklinde potansiyel enerji terimi eklenmelidir.

Denklemlerin bilançosu

1 süreklilik

+

3 momentum

+

1 enerji

Toplam 5 denklem

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dv + \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dv) \cdot \vec{V} + \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} = - \iint_S p \cdot \vec{n} dS + \vec{F}_{visc} + \iiint_V \rho \cdot \vec{f} \cdot dv$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot dv + \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \\ &= - \iint_S (p \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} + \iiint_V (\vec{f} \cdot \rho \cdot dv) \cdot \vec{V} + \dot{W}_{visc} + \iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dv + \dot{Q}_{visc} \end{aligned}$$

Bilinmeyenler

$$\rho, \quad \vec{V}(u, v, w), \quad p, \quad e$$

**Toplam 6 adet
bilinmeyen**

denklem sayısı çözüm
için yeterli değil

İlave denklemler (Termodinamik bağıntılar)

İlave bilinmeyen

Hal denklemi

$$p = \rho RT$$

T

Kalorik mükemmel gazlar için

$$e = c_v T$$

SONUÇ: 7 adet denklem (ve bağıntı) ile 7 bilinmeyen çözülebilir.

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

21

Genel Denklemlerin Diferansiyel Biçimleri

Diverjans Teoremi

A bir vektörel veya skaler büyüklük olmak üzere bir yüzey integrali diverjans teoremi yardımıyla bir hacim integraline dönüştürülebilir

$$\iint_S A \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla A \cdot dv$$

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

22

Süreklilik denkleminin diferansiyel biçimi

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dv + \iiint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\iiint_S A \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla A \cdot dv$$

$$\iiint_S (\rho \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla(\rho \cdot \vec{V}) \cdot dv$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) \right] \cdot dv = 0$$

Sonsuz küçük kontrol hacmi için

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Daimi akım için

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow$$

$$\nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Sıkıştırılamaz akım için

$$\rightarrow \rho = Sb \rightarrow$$

$$\nabla \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \rho + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Materyal türev tanımı ile

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Momentum denkleminin diferansiyel biçimi

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dv) \cdot \vec{V} + \iiint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} = - \iiint_S p \cdot \vec{n} dS + \vec{F}_{visc} + \iiint_V \rho \cdot \vec{f} \cdot dv$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dv) \cdot \vec{V} + \iiint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} = - \iiint_V \nabla p \cdot dv + \vec{F}_{visc} + \iiint_V \rho \cdot \vec{f} \cdot dv$$

Hız, Teğetsel kuvvet ve
Bünyesel kuvvet
vektörleri

$$\begin{aligned} \vec{V} &= u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \\ \vec{F}_{visc} &= F_{x-visc} \vec{i} + F_{y-visc} \vec{j} + F_{z-visc} \vec{k} \\ \vec{f} &= f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \end{aligned}$$

olmak üzere

x-momentum $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dv) \cdot u + \iiint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot u = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dv + F_{x-visc} + \iiint_V \rho \cdot f_x \cdot dv$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dv) \cdot u + \iiint_V \nabla(\rho \vec{V} u) \cdot dv = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dv + F_{x-visc} + \iiint_V \rho \cdot f_x \cdot dv$$

Momentum denkleminin diferansiyel biçimi

x-momentum

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

y-momentum

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_{y-visc} + \rho \cdot f_y$$

z-momentum

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} w) = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_{z-visc} + \rho \cdot f_z$$

Navier-Stokes
denklemleri

Bünyesel kuvvetleri olmadığı
daimi akım için
viskoz kuvvetler ihmal edilirse

$$\vec{f} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \vec{f}_{visc} \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \nabla(\rho \vec{V} u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \nabla(\rho \vec{V} v) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \nabla(\rho \vec{V} w) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Euler
denklemleri

Momentum denkleminin diferansiyel biçimi

x-momentum

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

Soldaki terimler
açılarak

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{V} \nabla u + u \nabla(\rho \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

Düzenlenerek

$$\underbrace{u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) \right]}_{\equiv 0 \text{ (Süreklilik denklemi)}} + \underbrace{\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \nabla u \right]}_{= Du/Dt \text{ (Materyal türev)}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

x-momentum

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

y-momentum

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_{y-visc} + \rho \cdot f_y$$

z-momentum

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_{z-visc} + \rho \cdot f_z$$

Enerji denkleminin diferansiyel biçimi

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot dV + \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) = - \iint_S (p \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} + \iiint_V (\vec{f} \cdot \rho \cdot dV) \cdot \vec{V} + \dot{W}_{visc} + \iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dV + \dot{Q}_{visc}$$

Yüzey integrallerinde diverjans teoremi uygulanarak ve kontrol hacmi sonsuz küçük yapılarak

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \vec{V} \right] = -\nabla(p\vec{V}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + \dot{w}_{visc} + \rho \dot{q} + \dot{q}_{visc}$$

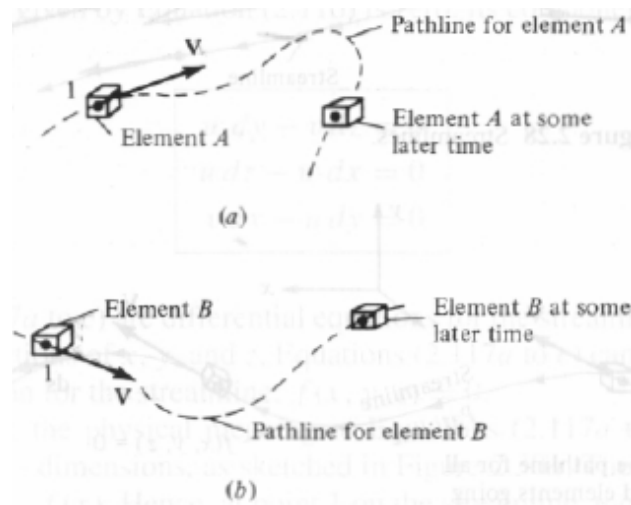
Daimi akım halinde, bünyesel kuvvetler ve viskoz kuvvetler ihmal edilirse, ısı ilavesi olmaması halinde

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \vec{f} \equiv 0, \quad \dot{w}_{visc} \equiv 0, \quad \dot{q}_{visc} \equiv 0, \quad \dot{q} \equiv 0$$

$$\nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) \vec{V} \right] = -\nabla(p\vec{V})$$

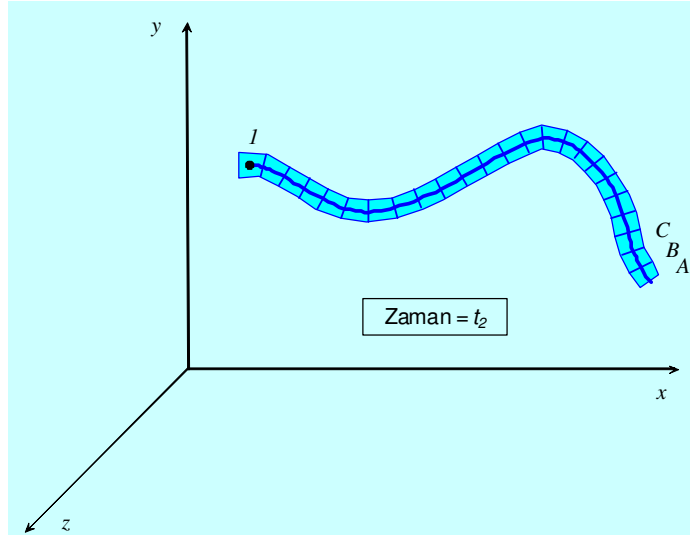
Akımın görünümü: Yörünge çizgisi

Yörünge çizgisi: Akışkanın zaman içerisinde izlediği yol



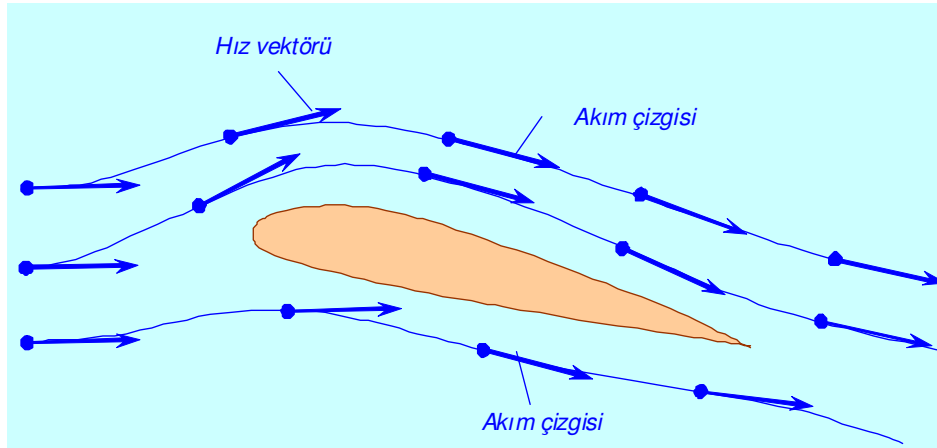
Akımın görünümü: Çıkış çizgisi

Çıkış çizgisi: Akım alanının aynı noktasından belli bir zaman aralığında geçen akışkan zerrelerinin bir t anında bulundukları noktaları birleştiren eğridir.



Akımın görünümü: Akım çizgisi

Akım çizgisi: Bütün noktalarındaki teğetleri hız vektörüne paralel olan eğri



Daimi akımda akım çizgileri yörünge çizgileriyle aynıdır

Akım Çizgisinin Denklemi

$$\begin{array}{c}
 \boxed{d\vec{s} \times \vec{V} = 0} \\
 \downarrow \quad \leftarrow \\
 \begin{array}{l}
 d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \\
 \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}
 \end{array} \\
 \\
 d\vec{s} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} \\
 = \vec{i}(w dy - v dz) + \vec{j}(u dz - w dx) + \vec{k}(v dx - u dy) = 0 \\
 \\
 \begin{array}{l}
 w dy - v dz = 0 \\
 u dz - w dx = 0 \\
 v dx - u dy = 0
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}
 \end{array}$$

Örnek problem

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

ile verilen hız alanı için (0,5) noktasından geçen akım çizgisinin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Akım çizgisi denklemi $\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}}$ $\longrightarrow$ $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ $\longrightarrow$ $y dy = -x dx$

İntegre edilerek $y^2 = -x^2 + C$

(0,5) noktası için $5^2 = -0 + C$ $\longrightarrow$ $C = 25$ $\longrightarrow$ $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$

Akışkan kinematığı

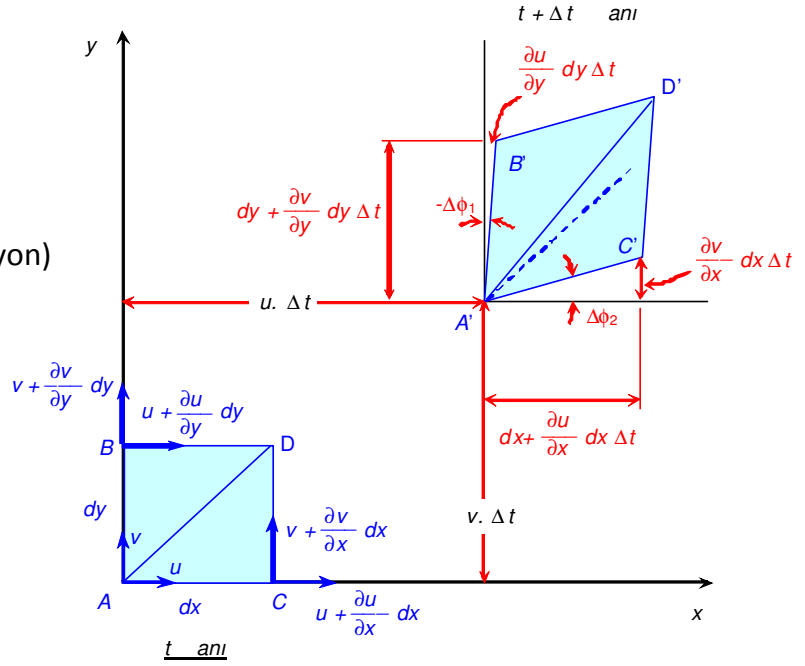
Akışkan hareketi

- 1- Öteleme (translasyon)
- 2- Dönme (rotasyon)
- 3- Genişleme-daralma (dilatasyon)
- 4- Açısal deformasyon

A noktasının A' ye gitmesi bir **öteleme** hareketidir.

Öteleme miktarları:

$$u \cdot \Delta t, \quad v \cdot \Delta t$$



Akışkan kinematığı

AD diyagonalı saat ibrelerine zıt yönde bir dönme hareketi yaparak A'D' diyagonaline dönüşmüştür. Bu bir "**dönme (rotasyon)**" hareketidir.

BC kenarının açısal hızı

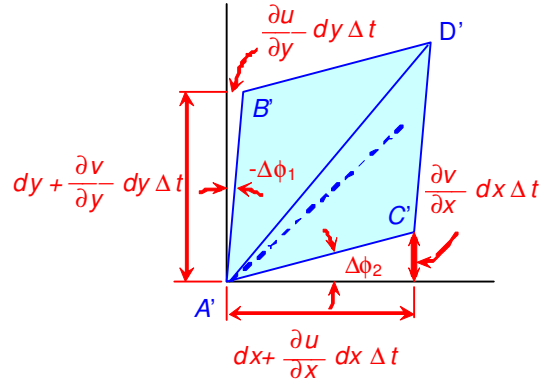
$$\Delta\phi_2 = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx \Delta t}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \Delta t} \right] \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

AB kenarının açısal hızı

$$\Delta\phi_1 = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy \Delta t}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \Delta t} \right] \approx \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

BD diyagonalinin açısal hızı

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dt} - \frac{d\phi_1}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



Akışkan kinematığı

z – eksen etrafındaki (xy - düzlemindeki) açısal hız

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

y – eksen etrafındaki (xz - düzlemindeki) açısal hız

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

x – eksen etrafındaki (yz - düzlemindeki) açısal hız

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Akışkan taneciğinin açısal hız vektörü

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

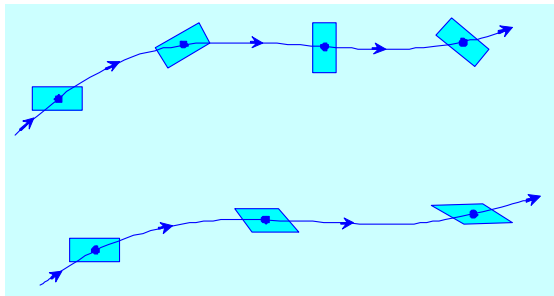
Vortisite

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}$$

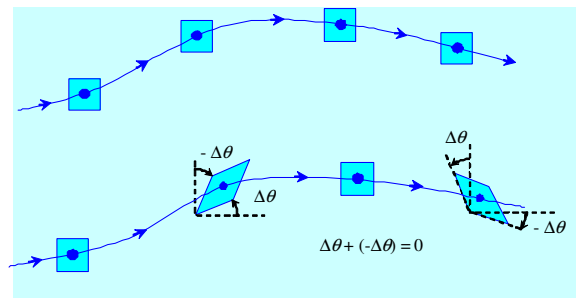
Akışkan kinematığı

Rotasyonel hareket



$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} \neq 0$$

İrrotasyonel hareket



$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = 0$$

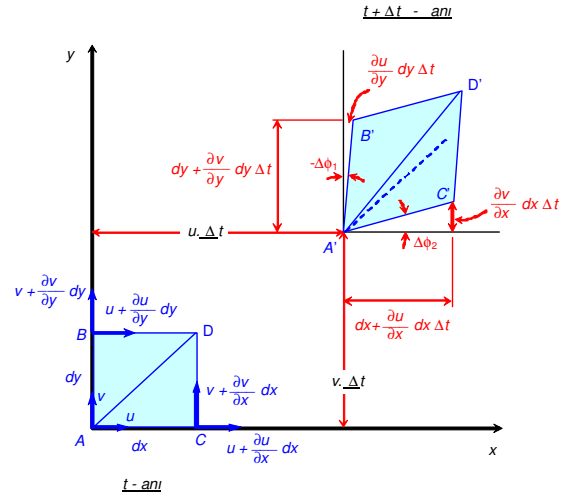
Akışkan kinematığı

Akışkan elemanı, AB ve AC kenarları arasındaki dik açı azalarak bir *açısai deformasyona* uğramıştır.

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_2}{dt} + \frac{d\phi_1}{dt} \right) \Rightarrow \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$



Akışkan kinematığı

Akışkan elemanı “*genişleme*” (dilatasyon)” biçiminde bir şekil değişimine uğrayarak A'B'C'D' elemanı olmuştur.

$$\epsilon_{xx} \Delta t = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \Delta t - dx}{dx}$$

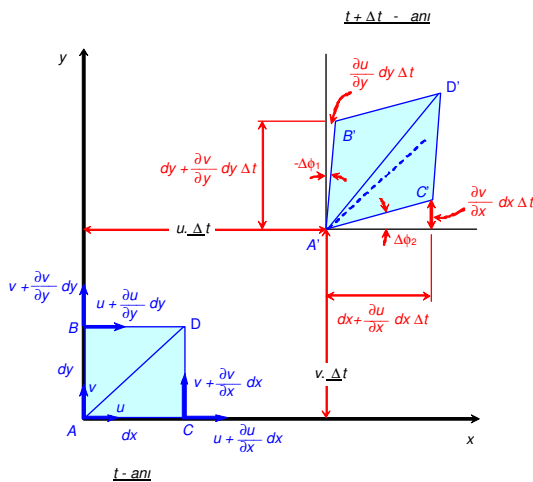
$$\epsilon_{xx} \Delta t = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \Rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Benzeri şekilde

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Deformasyon hızları matrisi

$$\epsilon_{zx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$



Örnek problem

Hız dağılımı yandaki gibi verilen akım alanı için vortisiteyi hesaplayınız.

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

Çözüm

$$\begin{aligned} \vec{\xi} = \nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & -\frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}[0 - 0] + \vec{j}[0 - 0] + \vec{k} \left[\frac{(x^2 + y^2)(-1) + x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0 \end{aligned}$$

Akım alanı, $x^2 + y^2 = 0$ olan başlangıç noktası hariç, irrotasyoneldir.

Örnek problem

Düz levha üzerindeki laminar sınır tabakanın herhangi bir x istasyonundaki hız profili ve bu noktadaki sınır tabaka kalınlığı için aşağıdaki bağıntılar verilmiştir. Akımın rotasyonel mi, irrotasyonel mi olduğunu gösteriniz.

$$\frac{u}{V_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{0.25}, \quad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \text{Re}_x = \frac{\rho_\infty V_\infty x}{\mu_\infty}$$

Çözüm:

İki boyutlu halde vortisite: $\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$

Verilen hız profilinden y 'ye göre türev alınarak: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0.25 \frac{V_\infty}{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{-0.75}$

$\partial v / \partial x$ türevinin hesabı için süreklilik denkleminden yararlanılabilir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Verilen hız profilinden x 'e göre türev alınarak:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[V_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{0.25} \right] = V_{\infty} y^{0.25} (-0.25) \delta^{-1.25} \frac{d\delta}{dx}$$

Sınır tabaka kalınlığı

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5}{\sqrt{\rho_{\infty} V_{\infty} x / \mu_{\infty}}}$$

Türev alınarak

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}}} x^{-1/2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{5}{8} V_{\infty} y^{0.25} \left(\frac{1}{5} \right)^{1.25} \left(\frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}} \right)^{-1/8} x^{-9/8} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

olmak üzere

$$C = -\frac{5}{8} V_{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{1.25} \left(\frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}} \right)^{-1/8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = C y^{0.25} x^{-9/8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = C y^{1/4} x^{-9/8}$$

İntegral alınarak

$$v = C_1 y^{5/4} x^{-9/8} + C_2$$

$y = 0$ da $v = 0$ olup

$$v = C_1 y^{5/4} x^{-9/8}$$

Türev alınarak

$$\frac{\partial v}{\partial x} = C_3 y^{5/4} x^{-17/8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.25 V_{\infty} y^{-0.75} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{0.25}$$

$$= 0.25 V_{\infty} y^{-0.75} \left(\frac{1}{5 \sqrt{\mu_{\infty} x / \rho_{\infty} V_{\infty}}} \right)^{0.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C_4 y^{-3/4} x^{-1.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = C_3 y^{5/4} x^{-17/8} - C_4 y^{-3/4} x^{-1.9} \neq 0$$

Akım rotasyoneeldir

Örnek problem

Şekilde gösterilen kosinüs eğrisi biçimindeki dalga yüzü duvar etrafındaki akıma ait hız bileşenleri ve Mach sayısı için aşağıdaki bağıntılar verilmiştir. Akımın rotasyonel mi, irrotasyonel mi olduğunu gösteriniz.

$$u = V_{\infty} \left[1 + \frac{h}{\beta} \frac{2\pi}{l} \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right) e^{-2\pi\beta y/l} \right]$$

$$v = -V_{\infty} h \frac{2\pi}{l} \left(\sin \frac{2\pi x}{l} \right) e^{-2\pi\beta y/l}$$

$$\beta \equiv \sqrt{1 - M_{\infty}^2}$$

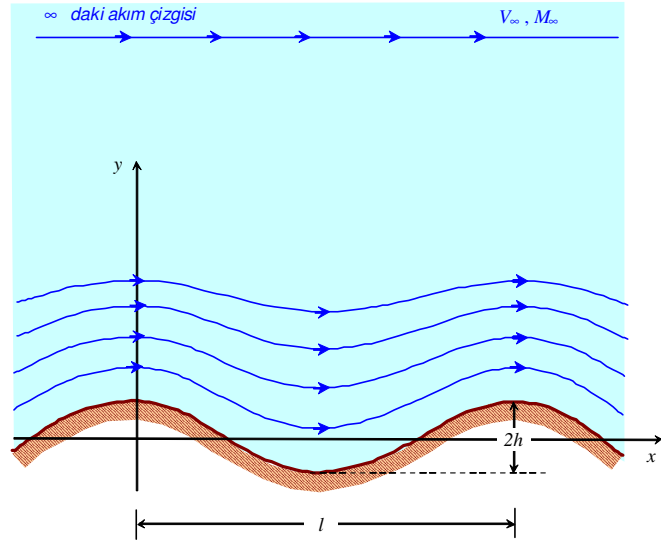
Burada:

$$l = 1m,$$

$$h = 0.01m,$$

$$V_{\infty} = 240m/s,$$

$$M_{\infty} = 0.7$$



Çözüm

İki boyutlu halde vortisite: $\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$

Hız bağıntılarından türev alınarak

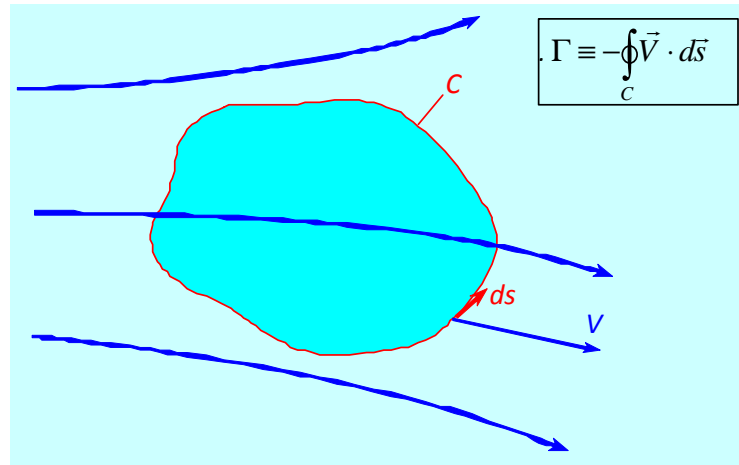
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -V_{\infty} h \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right) e^{-2\pi\beta y/l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = V_{\infty} \frac{h}{\beta} \frac{2\pi}{l} \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right) e^{-2\pi\beta y/l} \left(-\frac{2\pi\beta}{l} \right) = -V_{\infty} h \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right) e^{-2\pi\beta y/l}$$

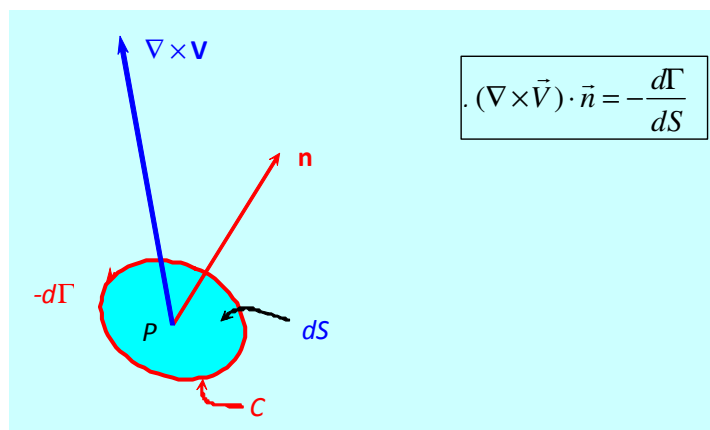
$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -V_{\infty} h \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right) e^{-2\pi\beta y/l} - \left[-V_{\infty} h \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right) e^{-2\pi\beta y/l} \right] = 0$$

Dalga yüzü duvar etrafındaki sürtünmesiz sıkıştırılabilir sesaltı akım irrotasyoneldir.

Sirkülasyon



Sirkülasyon vortisite ilişkisi



Stokes teoreminden

$$\Gamma \equiv -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -\iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

Örnek problem

Hız bileşenlerinin yandaki gibi verildiği akımda 5 m yarıçaplı dairesel bir yörünge etrafında sirkülasyonu hesaplayınız.

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad [m/s]$$

Çözüm

Bu problemin çözümü için polar koordinatlar kullanılması daha uygun olur.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad u = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{r \sin \theta}{r^2} = \frac{\sin \theta}{r} \quad v = \frac{-x}{x^2 + y^2} = -\frac{r \cos \theta}{r^2} = -\frac{\cos \theta}{r}$$

$$V_r = u \cos \theta + v \sin \theta = \frac{\sin \theta}{r} \cos \theta + \left(-\frac{\cos \theta}{r}\right) \sin \theta = 0$$

$$V_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta = -\frac{\sin \theta}{r} \sin \theta + \left(-\frac{\cos \theta}{r}\right) \cos \theta = -\frac{1}{r}$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{s} = (V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta) \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = V_r dr + V_\theta r d\theta = 0 + \left(-\frac{1}{r}\right) r d\theta = -d\theta$$

$$\Gamma \equiv -\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{2\pi} -d\theta = 2\pi \text{ m}^2/s$$

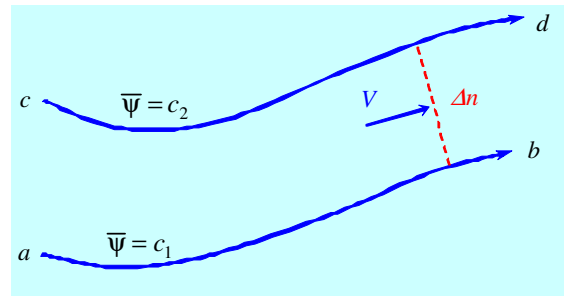
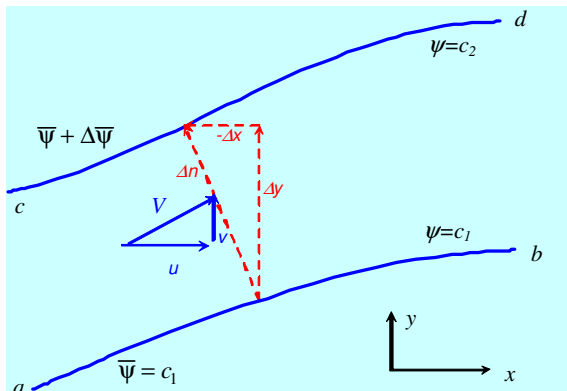
Akım fonksiyonu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \Rightarrow \bar{\psi}(x, y) = c \quad \text{Akım çizgisi}$$

$$c_2 - c_1 = \Delta \bar{\psi} = \rho V \Delta n \rightarrow \frac{\Delta \bar{\psi}}{\Delta n} = \rho V$$

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\psi}}{\Delta n} \rightarrow \frac{d\bar{\psi}}{dn} = \rho V$$

$$\Delta \bar{\psi} = \rho V \Delta n = \rho u \Delta y + \rho v (-\Delta x) \quad \Rightarrow$$



$$d\bar{\psi} = \rho u dy - \rho v dx$$

$$d\bar{\psi} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} dy$$

$$\rho u = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}$$

Sıkıştırılabilir akım

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\rho}$$

$$u = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}$$

Hız potansiyeli

İrrotasyonellik koşulu

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{V} = 0$$

Vektör özdeşliği

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\boxed{\vec{V} = \nabla \phi}$$

Hız potansiyeli

Kartezyen koordinatlarda

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$



$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}}$$

Silindirik koordinatlarda

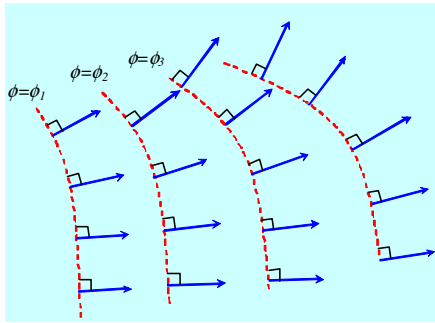
$$\boxed{V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

Küresel koordinatlarda

$$\boxed{V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad V_\Phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \Phi}}$$

Akım fonksiyonu – Hız potansiyeli ilişkisi

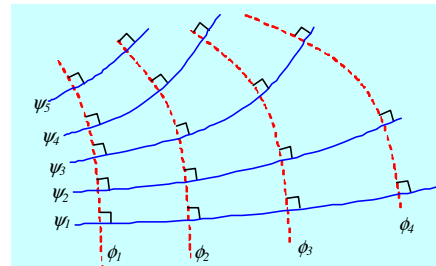
Potansiyel çizgileri



$$\boxed{\vec{V} = \nabla \phi}$$

$$\boxed{u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}}$$

Akım çizgileri



$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}}$$

Cauchy-Riemann
koşulları