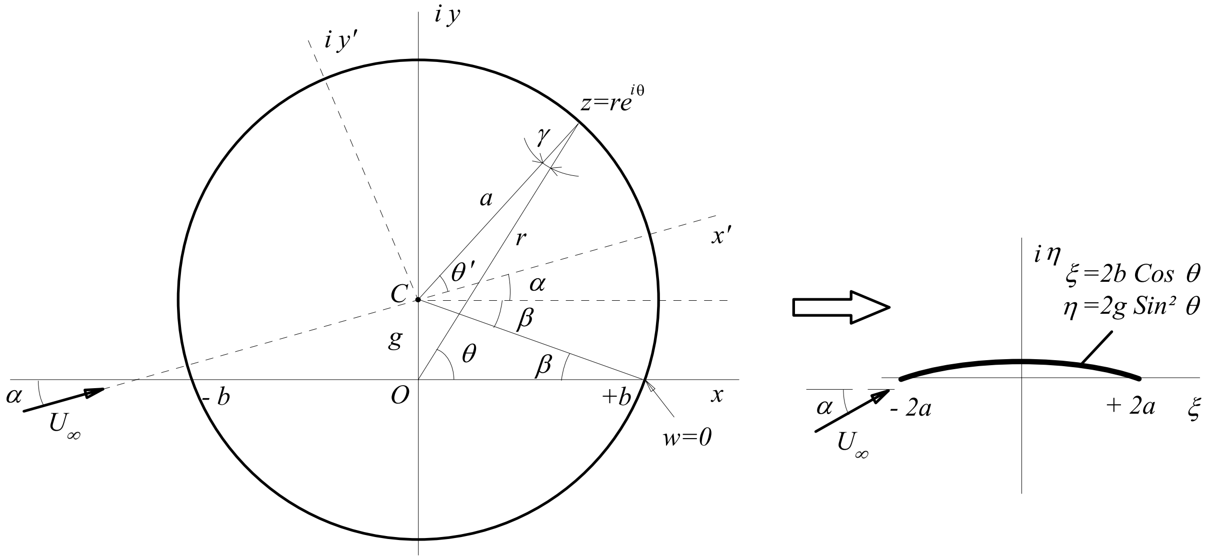
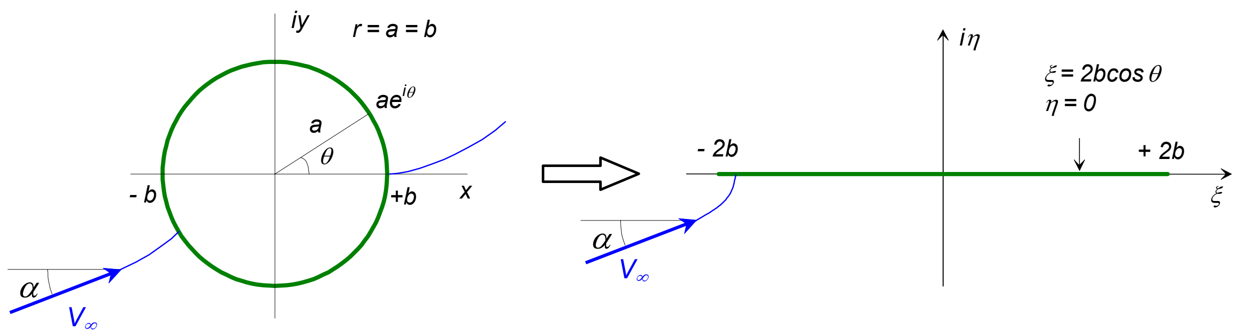
Ek-8.4- Dairesel Yay Profili Etrafındaki Potansiyel Akımın Joukowsky Dönüşümüyle İncelenmesi

z kompleks düzleminde merkezi imajiner eksen üzerinde, başlangıç noktasından *g* uzaklığında yer alan ve $z=\pm b$ tekil noktalarından geçen *a* yarıçaplı daireye Joukowsky dönüşümü uygulandığında ζ düzleminde *4a* boyunda ve maksimum kamburluğu *2g* olan dairesel yay şeklinde bir profil elde edilmektedir.





Hız vektörüne bağlı $z'(x',y')$ eksen takımında daire etrafındaki akımın kompleks potansiyeli ve kompleks eşlenik hız

$$f(z') = V_\infty\left(z' + \frac{a^2}{z'}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} Ln\frac{z'}{a} \qquad w^*(z') = V_\infty\left(z' - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z'^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi\, z'}$$

olup, daire üzerindeki noktalar için kompleks eşlenik hız bağıntısı

$$w^*(z'_d) = ie^{-i\theta'}\, 2V_\infty\left[\sin\theta' + \frac{\Gamma}{4\pi\, a V_\infty}\right]$$

şeklini alır. Akımın durma noktalarından birisi $\theta' = -(\alpha+\beta)$ noktası olup, durma noktasında hızın sıfır olması şartından, girdap şiddetinin değeri

$$w^*_{\theta=-(\alpha+\beta)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \Gamma = 4\pi\, a V_\infty \sin(\alpha+\beta)$$

olarak elde edilir. Böylece daire üzerindeki kompleks eşlenik hızlar için

$$w^*(z'_d) = ie^{-i\theta'}\, 2V_\infty \left[\sin\theta' + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

ve hızın şiddeti için de

$$q_{z'_d} = \left| w^*(z'_d) \right| = 2V_\infty \left| \sin\theta' + \sin(\alpha+\beta) \right|$$

elde edilir. Burada

$$\theta' = \theta - \alpha - \gamma\,, \qquad \gamma = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{G^2}{1+G^2}}\cos\theta\right], \qquad G = \frac{g}{b}$$

olup, γ için yaklaşık

$$\gamma << \pi \quad \rightarrow \quad \sin\gamma \cong \gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{G^2}{1+G^2}}\cos\theta\right] \cong \sqrt{\frac{G^2}{1+G^2}}\cos\theta \cong G\cos\theta$$

$$G << 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{G^2}{1+G^2}} = G(1+G^2)^{-1/2} = G(1-\frac{1}{2}G^2+\cdots) \cong G \quad \rightarrow \quad \gamma \cong G\cos\theta$$

$$\beta << \pi \quad \rightarrow \quad G = \tan\beta \cong \beta \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma \cong \beta\cos\theta}$$

sinθ' ifadesi açılıp

$$\sin\theta' = \sin[(\theta-\alpha)-\gamma] = \sin(\theta-\alpha)\cos\gamma - \sin\gamma\cos(\theta-\alpha)$$

$$\left\{\begin{matrix} \sin\gamma \cong \gamma \\ \cos\gamma \cong 1 \end{matrix}\right\} \qquad \rightarrow \qquad \sin\theta' \cong \sin(\theta-\alpha) - \gamma\cos(\theta-\alpha)$$

$$\sin\theta' = \sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta - \gamma\cos\theta\cos\alpha - \gamma\sin\theta\sin\alpha$$

$$\left\{\begin{matrix} \sin\alpha \cong \alpha \\ \cos\alpha \cong 1 \\ \alpha\gamma \cong 0 \\ \gamma \cong \beta\cos\theta \end{matrix}\right\} \qquad \rightarrow \qquad \sin\theta' \cong \sin\theta - \alpha\cos\theta - \beta\cos^2\theta$$

$$\sin\theta' \cong \sin\theta - \alpha\cos\theta - \beta(1-\sin^2\theta)$$

$$\sin\theta' \cong \sin\theta(1+\sin\theta) - \beta - \alpha\cos\theta$$

ve *sin*(α+β) için yaklaşık

$$\sin(\alpha+\beta) \cong \alpha + \beta$$

değerleri alınarak hız ifadesi yaklaşık

$$q_{z'_d} = 2V_\infty \left| \sin\theta\left(1+\beta\sin\theta\right) + \alpha\left(1-\cos\theta\right) \right|$$

şekline getirilebilir. Joukowsky dönüşümünün daire üzerindeki noktalar için türevi

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_d = \left|1-\frac{a^2}{z_d^2}\right| = \left|1-\frac{a^2}{r^2 e^{i2\theta}}\right| = \left|1-\frac{a^2}{r^2}\cos\theta + i\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\right|$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right)^2 + \left(\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta\right)^2} = \sqrt{1-2\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta + \frac{a^4}{r^4}}$$

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_d = \frac{b}{r}\sqrt{\frac{r^2}{b^2} - 2\cos 2\theta + \frac{b^2}{r^2}}$$

ve ayrıca

$$\frac{r}{b} = G\sin\theta + \left(1+G^2\sin^2\theta\right)^{1/2} = G\sin\theta + 1 + \frac{1}{2}G^2\sin^2\theta + \cdots \cong 1 + G\sin\theta$$

$$\frac{r^2}{b^2} = \left(1+G\sin\theta\right)^2 = 1 + 2G\sin\theta + G^2\sin^2\theta \cong 1 + 2G\sin\theta$$

$$\frac{b^2}{r^2} = \left(1+G\sin\theta\right)^{-2} = 1 - 2G\sin\theta + G^2\sin^2\theta \cong 1 - 2G\sin\theta$$

olup

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_d \cong \frac{\sqrt{1+2G\sin\theta - 2\cos 2\theta + 1 - 2G\sin\theta}}{1+G\sin\theta} \cong \left|\frac{2\sin\theta}{1+\beta\sin\theta}\right|$$

bulunur. Böylece dairesel yay profili üzerindeki hız için

$$q_\zeta = \frac{q_{z_d}}{\left|d\zeta/dz\right|_d} = V_\infty \left| \left(1+\beta\sin\theta\right)^2 + \alpha\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\left(1+\beta\sin\theta\right) \right|$$

$$\frac{q_\zeta}{V_\infty} = \left| 1 + 2\beta\sin\theta + \beta^2\sin^2\theta + \alpha\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + \alpha\beta\left(1-\cos\theta\right) \right|$$

$$\boxed{\frac{q_\zeta}{V_\infty} \cong \left| \left(1+2\beta\sin\theta\right) + \alpha\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \right|}$$

elde edilir.

Daire üzerinde $+\theta$ ve $-\theta$ ile tanımlanan, reel eksene göre simetrik konumlu noktaların dairesel yay profili üzerinde aynı noktaya dönüştükleri düşünülürse, dairesel yay profilinin bu noktasında üst tarafındaki ve alt tarafındaki hızlar arasındaki fark bu noktadaki girdap şiddetine eşitlenerek

$$\gamma(\xi) = q_\zeta(\xi,0^+) - q_\zeta(\xi,0^-) = q_\zeta(+\theta) - q_\zeta(-\theta)$$

$$\gamma(\xi) = V_\infty\left[(1+2\beta\sin\theta) + \alpha\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right] - V_\infty\left[(1-2\beta\sin\theta) - \alpha\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$\boxed{\gamma(\xi) \cong 2V_\infty\left(2\beta\sin\theta + \alpha\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

elde edilir.

NOT: Yine ince profil teorisinde kullanılan eksen takımı ve θ açısı yönünün Joukowsky dönüşümündekinden farklı olması nedeniyle yukarıdaki bağıntı ince profil düzleminde

$$\boxed{\gamma(\xi) \cong 2V_\infty\left(2\beta\sin\theta + \alpha\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

şeklini alır.