

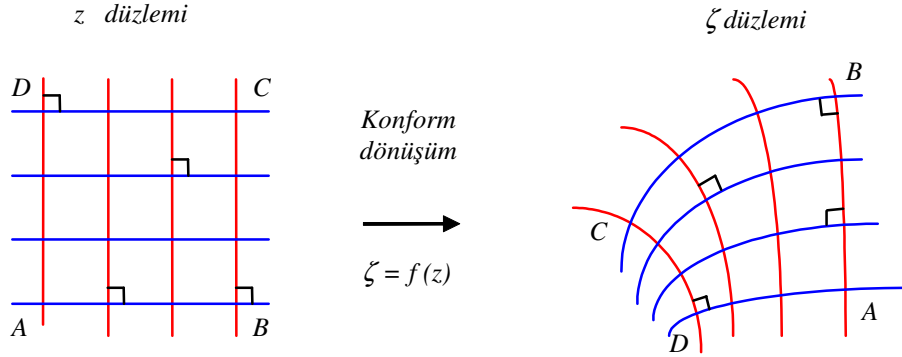
BÖLÜM 7

KONFORM DÖNÜŞÜM, JOUKOWSKY PROFİLLERİ

- 7.1- Konform dönüşüm
 - 7.1.1- Konform dönüşümün şartları:
 - 7.1.1- Dönüşümün tekil noktaları :
 - 7.1.3- Potansiyel akımın başka bir potansiyel akım alanına dönüşümü :
 - 7.1.4- Konform dönüşümün hızlar üzerindeki etkisi :
- 7.2- Joukowski profilleri
 - 7.2.1- Joukowski Dönüşümünün etkinliği:
 - 7.2.2- Dönüşümün tekil noktaları
 - 7.2.3- Dairenin bir doğru parçasına dönüşümü
 - 7.2.4- Dairenin bir elipse dönüşümü
 - 7.2.5- Tekil noktanın etkisi, Yumurta biçimli şekil
 - 7.2.6- Dairenin simetrik profile dönüşümü
 - 7.2.7- Dairenin yay profiline dönüşümü
 - 7.2.8- Dairenin kamburluklu profile dönüşümü
- 7.3- Daire etrafındaki akım alanının dönüşümü
- 7.4- Bir Cisme Etkiyen Kuvvet ve Momentler (Blasius Formülleri)
- 7.5- Joukowski profiline etkiyen kuvvet ve momentler

7.1 KONFORM DÖNÜŞÜM

Konform dönüşüm z düzleminde verilen eğrileri, eğri ailelerini, aralarındaki açılı ve göze batıcı şekil ve oranlarını koruyacak tarzda dönüştürür.



7.1.1- Konform dönüşümün şartları:

Hangi fonksiyonlar konform dönüşüm gerçekleştirir?

z düzleminde birbirine çok yakın iki nokta

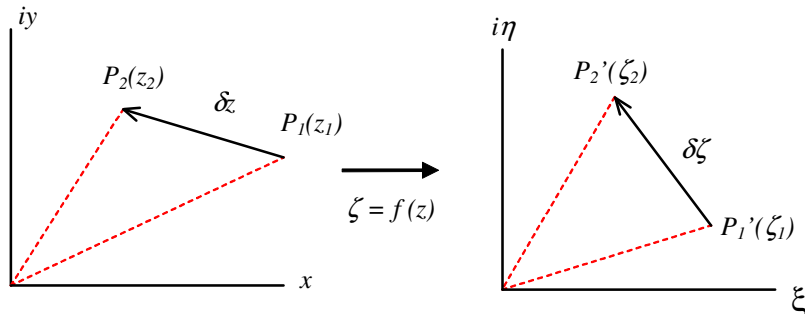
$$P_1 (z_1 = x_1 + i y_1), P_2 (z_2 = x_2 + i y_2)$$

Dönüşüm fonksiyonu

$$\zeta = f(z)$$

ζ düzleminde dönüştürülmüş noktalar

$$P_1' (\zeta_1 = \xi_1 + i \eta_1), P_2' (\zeta_2 = \xi_2 + i \eta_2)$$



P_1 noktası P_2 ye yaklaştığında, limitte

$$P_1 \rightarrow P_2 \Rightarrow P_1' \rightarrow P_2' \Rightarrow \begin{aligned} \delta z &\rightarrow dz \\ \delta \zeta &\rightarrow d\zeta \end{aligned}$$

Dönüşüm fonksiyonunun türevi

$$d\zeta = f'(z) dz = R e^{i\phi} dz$$

Dönüşüm fonksiyonunun modülü

$$|d\zeta| = R |dz|$$

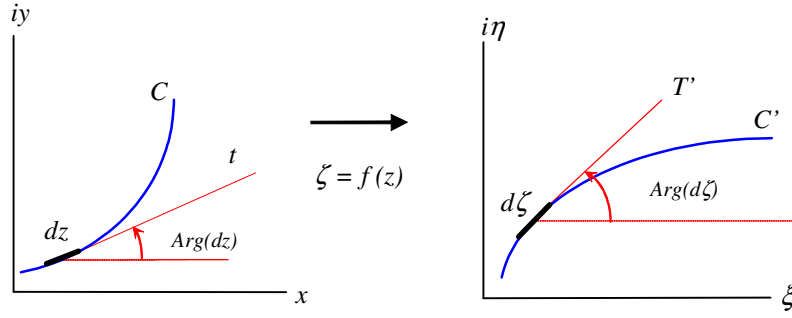
Dönüşüm fonksiyonunun argümanı

$$\text{Arg}(d\zeta) = \phi + \text{Arg}(dz)$$

Sonuç olarak konform dönüşüm z düzlemindeki herhangi bir dz yay parçasının:

- uzunluğunu R çarpanı (dönüşüm fonksiyonunun türevinin modülü) kadar değiştirir,

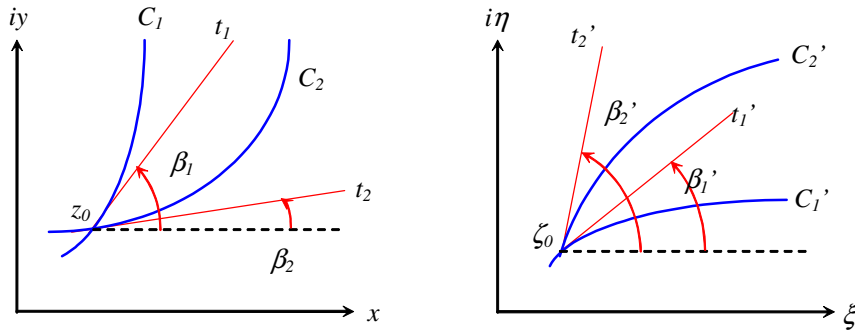
- teğetin eğimini ϕ açısı (dönüşüm fonksiyonunun türevinin argümanı) kadar döndürür.



Keşişen iki eğri arasındaki açı:

z_0 noktasında keşişen iki eğri
Eğrilerin teğetleri
Teğetlerin eğim açıları
Dönüşüm noktası
Dönüşüm eğrileri
Dönüşüm eğrilerinin teğetleri
Teğetlerin eğim açıları

C_1 ve C_2
 t_1 ve t_2
 β_1 ve β_2
 ζ_0
 C_1' ve C_2'
 t_1' ve t_2'
 β_1' ve β_2' olsun.



Dönüşüm bağıntısının z_0 daki türevinin argümanı ϕ olmak üzere

$$\beta_1' = \phi + \beta_1$$

$$\beta_2' = \phi + \beta_2$$

Bu iki argümanın farkı

$$\beta_2' - \beta_1' = \beta_2 - \beta_1$$

Buna göre: z düzleminde C_1 ve C_2 eğrilerinin z_0 noktasında keşistikleri açı, ζ düzleminde C_1' ve C_2' eğrileri için aynıdır. Dönüşüm fonksiyonu tarafından değiştirilmemiştir.

Yani dönüşüm konformdur.

NOT:

- Gerek C eğrisiyle yapılan ilk incelemede ve gerekse C_1 ve C_2 gibi keşişen iki eğriyle yapılan incelemede eğriler sürekli. İncelenen noktalar civarında eğrilerin teğetleri vardır ve tektir.

- Açılar arasında yukarıda belirtilen eşitliklerin yazılabilmesi için $\zeta = f(z)$ dönüşüm fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki $f'(z_0)$ türevinin her yönde mevcut ve ayrıca sıfırdan farklı olması gerekir.

$$f'(z_0) \neq 0$$

Türevin varlığı için yeterli şart, fonksiyonun analitik olmasıdır.

Buna göre sonuç olarak:

z düzleminin bir bölgesindeki bütün noktalarda bir $f(z)$ fonksiyonu *analitik* ve *türevi sıfırdan farklı* ise bu fonksiyon yardımıyla yapılan dönüşüm "konform" dönüşüm olur.

Yani,

Konform dönüşüm, türevi sıfır olmayan analitik fonksiyonlarla gerçekleştirilen dönüşümdür.

Konform dönüşümün bazı özellikleri :

Konform dönüşüm kesişen eğriler arasındaki açıları, eğri ailelerinin göze batıcı özelliklerini ve oranları koruyacak tarzda bir dönüşüm olmakla birlikte, **dönüşüm fonksiyonundaki R boyut faktörü ve ϕ dönme açısı z 'ye bağlı olarak nokta nokta değişebileceğinden z düzlemindeki bir şekil ζ düzleminde hayli farklı bir şekle dönüşebilir.**

ÖRNEK :

z düzleminde reel ve imajiner eksene paralel doğrulara $\zeta = 1/z$ dönüşümünü uygulayarak, ζ düzleminde hangi tür eğriler elde edilebileceğini, ve dönüşümün konform olup olmayacağını inceleyiniz.

$z = x + iy$ ve $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere dönüşüm fonksiyonunun reel ve imajiner kısımları:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

z düzleminde reel eksene paralel doğruların parametrik denklemi $y = C$

Yukarıdaki denklemlerde kullanılarak $\xi = \frac{x}{x^2 + C^2}, \quad \eta = -\frac{C}{x^2 + C^2}$

Düzenlenerek

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + C^2} = -\frac{\eta}{C} \rightarrow \xi^2 + \eta^2 + \eta/C = 0 \rightarrow \boxed{\xi^2 + (\eta + \frac{1}{2C})^2 = \frac{1}{4C^2}}$$

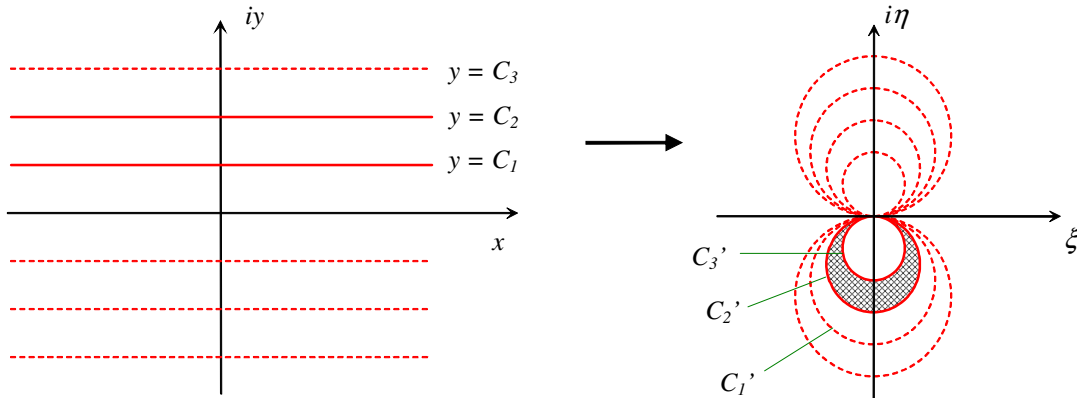
Bu denklem merkezi $(\xi = 0, \eta = -\frac{1}{2C})$ noktalarında yer alan $\frac{1}{2C}$ yarıçaplı daireleri temsil etmektedir.

C büyüdükçe dairenin yarıçapı küçülmekte, C küçüldükçe yarıçap büyümektedir.

x eksenini ξ eksenine dönüştürken, x ekseninden sonsuz uzaklıktaki bir doğru ise ζ düzleminin başlangıç noktasındaki bir noktaya dönüşmektedir.

x ekseninin alt tarafında kalan doğrular ζ düzleminde ξ ekseninin üst tarafında kalan dairelere dönüşmektedir.

x eksenine paralel doğruların sonsuzdaki ($x \rightarrow \pm\infty$) kısımları ζ düzleminde başlangıç noktasına dönüştürken, doğruların y eksenini kestiği noktalar da η ekseninde $\eta = -1/C$ noktalarına dönüşmektedir.



$y = y_1$ ve $y = y_2$ gibi herhangi iki doğru arasında kalan bölge diğer düzlemde ξ eksenine başlangıç noktasında teğet olan iki daire arasındaki bölgeye dönüşmektedir.

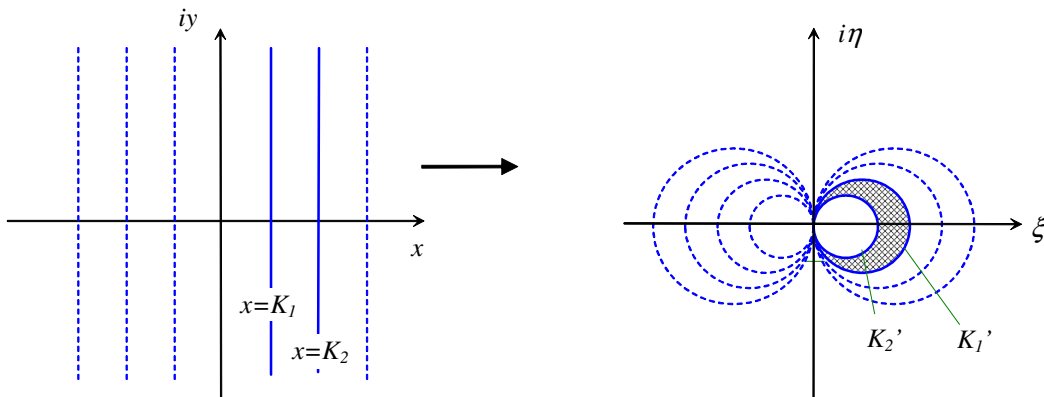
z düzleminde imajiner eksene paralel doğruların parametrik denklemi $x = K$

Dönüşüm denklemlerinde kullanılarak
$$\xi = \frac{K}{K^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{K^2 + y^2}$$

Düzenlenerek

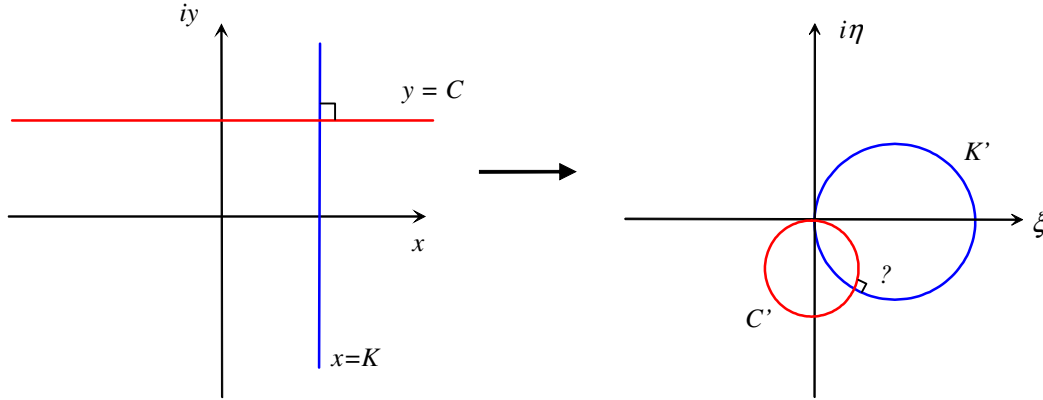
$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{K^2 + y^2} = \frac{\xi}{K} \rightarrow \xi^2 + \eta^2 - \xi/K = 0 \rightarrow \left(\xi - \frac{1}{2K}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{4K^2}$$

Bu denklem merkezi $\left(\xi = \frac{1}{2K}, \eta = 0\right)$ noktalarında yer alan $\frac{1}{2K}$ yarıçaplı daireleri temsil etmektedir. K büyüdükçe dairenin yarıçapı küçülmekte, K küçüldükçe yarıçap büyümektedir.



z düzlemindeki yatay ve düşey doğrular birbiriyle dikey olarak kesişmektedir

Bunların dönüşümü sonucu elde edilen dairelerin de ortogonal olarak kesiştiklerini göstermek suretiyle bu örnekteki dönüşümlerin konform olduğunu ortaya koymak mümkündür



Daire denklemlerinde diferansiyel alınarak

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta + (1/C)d\eta = 0$$

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta - (1/K)d\xi = 0$$

Teğetlerin eğimleri

$$m_C = (d\eta/d\xi)_C = -2C\xi/(2C\eta + 1)$$

$$m_K = (d\eta/d\xi)_K = -(2K\eta + 1)/2K\eta$$

Teğet eğimleri çarpılarak

$$m_C \cdot m_K = (C\xi/K\eta) \cdot [(2K\eta + 1)/(2C\eta + 1)]$$

$y=C$ ve $x=K$ için

$$\xi = K/(K^2 + C^2), \eta = -C/(K^2 + C^2)$$

olacağı hatırlanarak

$$m_C \cdot m_K = -1$$

bulunur. Buna göre daireler ortogonal olarak kesişmektedir. Yani, bu dönüşüm konformdur.

7.1.2- Dönüşümün tekil noktaları :

Analitik fonksiyonun tekil olduğu noktalarda veya türevinin sıfıra eşit olduğu noktalarda dönüşüm konform olmaz. Bu türden noktalara dönüşümün *tekil noktaları* adı verilir.

ÖRNEK:

$\zeta = z^2$ dönüşüm fonksiyonununun tekil noktasını inceleyiniz.

Dönüşüm fonksiyonununun reel ve imajiner kısımları

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy$$

x eksenine paralel bir doğrunun parametrik denklemi

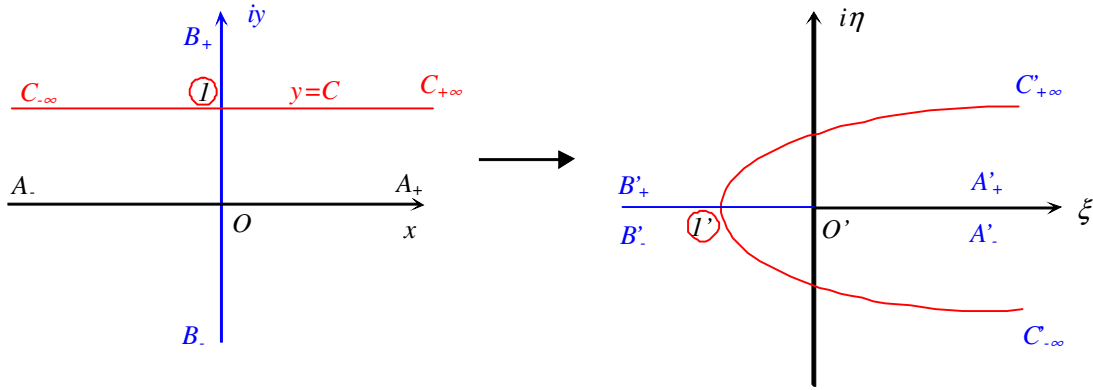
$$y = C$$

Dönüşüm denklemlerinde kullanılarak

$$\eta = 2xC \rightarrow x = \eta/2C$$

$$\xi = x^2 - C^2 \rightarrow \xi = \eta^2/(4C^2) - C^2$$

Bu bir parabol denklemdir.



$$\begin{array}{llll}
 x = 0, & y = C & \text{için} & \xi = -C', \quad \eta = 0 \\
 x = +\infty, & y = C & \text{için} & \xi = +\infty, \quad \eta = +\infty \\
 x = -\infty, & y = C & \text{için} & \xi = +\infty, \quad \eta = -\infty
 \end{array}$$

$y = C$ doğrusunun: $+\infty$ daki ucu parabolün üst ucuna,
 $-\infty$ daki ucu parabolün alt ucuna dönüşmektedir.

$y = C$ doğrusunun y eksenini kestiği 1 noktası parabolün reel eksen üzerinde $\xi = -C'$ de yer alan tepe noktasına dönüşmektedir.

y eksenini $x = 0$ doğrusu şeklinde tanımlanırsa dönüşüm bağıntılarından

$$x = 0, \text{ için } \xi = -y^2, \quad \eta = 0 \quad \rightarrow \quad y \rightarrow \pm\infty \text{ için } \xi = -\infty$$

Dönüşüm y eksenini ξ ekseninin sol yarısına dönüştürmektedir.

z düzleminde $y = C$ doğrusu y eksenine dik olduğu gibi ζ düzleminde bunlara karşılık gelen parabol ile reel eksenin sol yarısı da, kesiştikleri tepe noktasında birbirine diktir. Yani dönüşüm $y = C$ doğruları için genel olarak konformdur.

Aynı dönüşümün x eksenini üzerindeki etkisi incelenirse, bu eksen $y = 0$ şeklinde tanımlanarak dönüşüm denklemlerinden

$$x = 0, \text{ için } \xi = -x^2, \quad \eta = 0 \quad \rightarrow \quad x \rightarrow \pm\infty \text{ için } \xi = +\infty$$

olduğu görülür. Yani x eksenini ξ ekseninin sağ yarısına dönüştürmektedir.

z düzleminde x ve y eksenleri başlangıç noktasında 90° lik bir açı ile kesişmekte iken, bunların dönüşümü sonucunda elde edilen doğrular 180° lik bir açı ile kesişmektedir. Yani doğrular arasındaki açı korunmamaktadır. O halde dönüşüm başlangıç noktasında konform değildir.

Nitekim dönüşüm fonksiyonunun türevine bakılırsa

$$d\zeta/dz = 2z$$

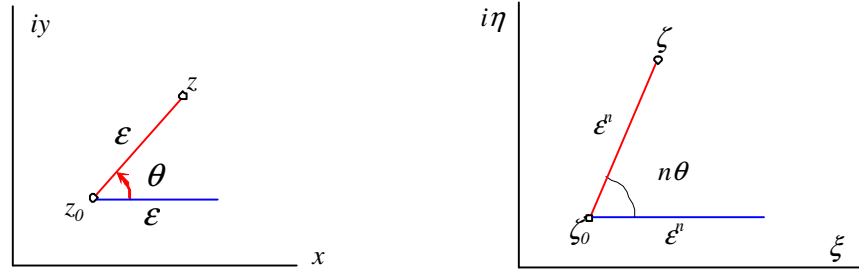
olup, $z=0$ da bir tekillik olacağı görülür.

ÖRNEK :

$n > 1$ bir sayı tam sayı olmak üzere $\zeta - \zeta_0 = (z - z_0)^n$ dönüşüm fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki etkisini inceleyiniz.

z , şekilde görüldüğü gibi z_0 noktasına çok yakın bir nokta olsun. ε çok küçük pozitif sayı ve $z - z_0$ yayının reel eksenle yaptığı açı θ olmak üzere

$$z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta} \quad \rightarrow \quad \zeta - \zeta_0 = \varepsilon^n e^{in\theta}$$



Yatay doğru dönüşüm sonucunda yine yatay kalmaktadır. Buna karşılık $z - z_0$ yayının yatayla yaptığı açı θ iken ζ düzlemine dönüşüm sonucu elde edilen $\zeta - \zeta_0$ yayının yatayla yaptığı açı $n\theta$ değerini almaktadır. Yani yay parçası ile yatay doğru arasındaki açı korunmamaktadır. Dönüşüm bu nokta civarında konform değildir.

Bu durum yine $z = z_0$ noktasında dönüşümün tekil olmasından kaynaklanmaktadır.

7.1.3- Potansiyel akımın başka bir potansiyel akım alanına dönüşümü :

Konform dönüşüm kesişen eğriler arasındaki açıları koruduğu gibi, kompleks düzlemde analitik bir fonksiyonla temsil edilebilen eğri ailelerinin özelliklerini de korur. Yani bu eğri ailelerini temsil eden analitik fonksiyonu da analitikliğini koruyacak şekilde dönüştürür.

O halde, potansiyel akımı temsil eden analitik fonksiyona konform dönüşüm uygulandığında elde edilecek akım alanı da yine bir potansiyel akım alanı olur.

Buna göre, konform dönüşüm kompleks düzlemdeki bir katı yüzeye uygulandığında bu katı yüzeyi bir başka şekle dönüştürmekle kalmayacak, bu yüzey etrafındaki potansiyel akım alanını da dönüştürecektir.

ÖRNEK :

Reel eksene paralel V_∞ hızındaki uniform-paralel potansiyel akım için kompleks potansiyel fonksiyonu

$$f(z) = V_\infty z$$

Bu potansiyel akım alanına

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{z^2 - 4a^2} + z \right)$$

dönüşüm fonksiyonu uygulanırsa, dönüşüm fonksiyonu z için çözümlenerek

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad \rightarrow \quad f(z) = V_\infty \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right)$$

elde edilir. ζ düzleminde elde edilen bu yeni kompleks potansiyel ifadesi, bilindiği gibi uniform-paralel akım içerisinde yer alan a yarıçaplı bir daire etrafındaki potansiyel akım alanını temsil etmektedir.

7.1.4- Konform dönüşümün hızlar üzerindeki etkisi :

$$z \text{ düzlemindeki bir potansiyel akım için} \quad w^*(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

$$\zeta \text{ düzlemindeki bir potansiyel akım için} \quad w^*(\zeta) = \frac{df(\zeta)}{d\zeta}$$

$$\text{Bu iki akım alanı birbirine} \quad \zeta = \zeta(z)$$

fonksiyonuyla konform olarak bağlı olsun. Bu durumda iki düzlemdeki hızlar birbirine

$$w^*(\zeta) = \frac{df[\zeta(z)]}{d\zeta} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \quad \rightarrow \quad \boxed{w^*(\zeta) = \frac{w^*(z)}{d\zeta/dz}}$$

şeklinde bağlanabilir. Dönüşümün türevi ve iki düzlemdeki hızlar için sırasıyla

$$\frac{d\zeta}{dz} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| e^{i \text{Arg}(d\zeta/dz)} \quad , \quad w(z) = V_z e^{i\theta_z} \quad , \quad w(\zeta) = V_\zeta e^{i\theta_\zeta}$$

tanımlamaları yapılırsa, hızların şiddetleri ve doğrultuları arasında

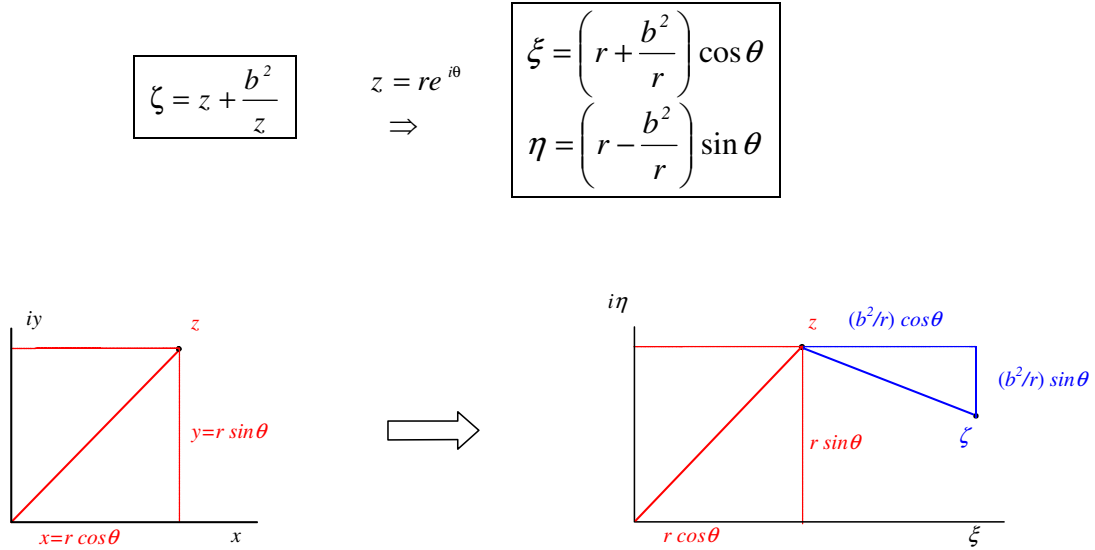
$$\boxed{V_\zeta = \frac{V_z}{|d\zeta/dz|} \quad , \quad \theta_\zeta = \theta_z + \text{Arg}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)}$$

ilişkileri elde edilir.

Buna göre, konform dönüşüm sonucunda hızın şiddetinin ve doğrultusunun alacağı değerleri dönüşüm fonksiyonunun türevinin belirlediği dikkati çekmektedir.

7.2- JOUKOWSKY PROFİLLERİ

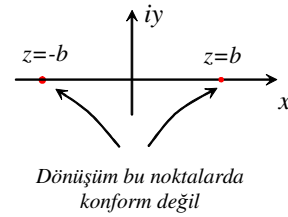
7.2.1- Joukowski Dönüşümünün etkinliği:



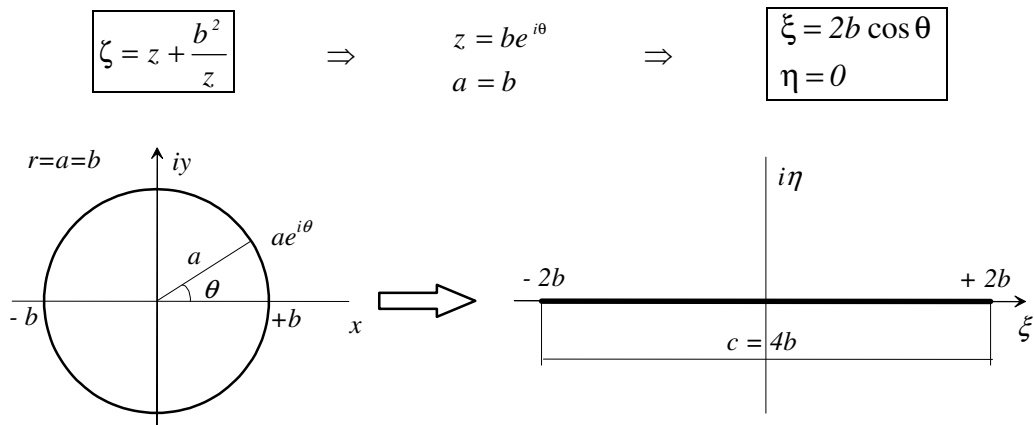
7.2.2- Dönüşümün tekil noktaları

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{b^2}{z^2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$z_{1,2} = \pm b$$

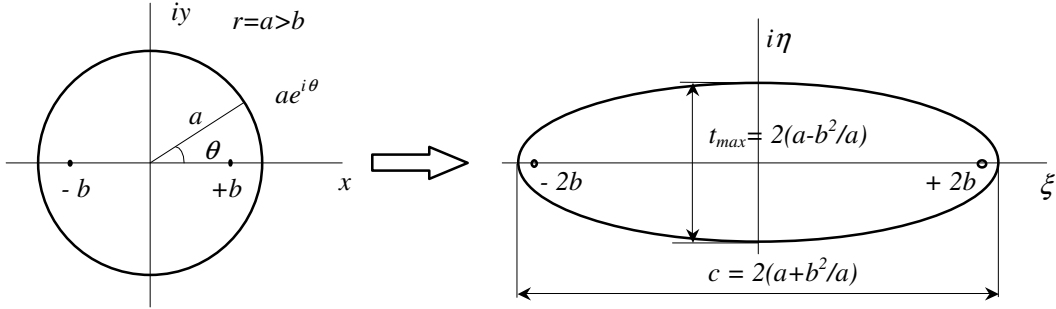


7.2.3- Dairenin bir doğru parçasına dönüşümü



7.2.4- Dairenin bir elipse dönüşümü

$$\begin{cases} \xi = \left(r + \frac{b^2}{r}\right) \cos \theta \\ \eta = \left(r - \frac{b^2}{r}\right) \sin \theta \end{cases} \rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \rightarrow \frac{\xi^2}{\left(a + \frac{b^2}{a}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(a - \frac{b^2}{a}\right)^2} = 1$$



$$c = 2 \left(a + \frac{b^2}{a} \right)$$

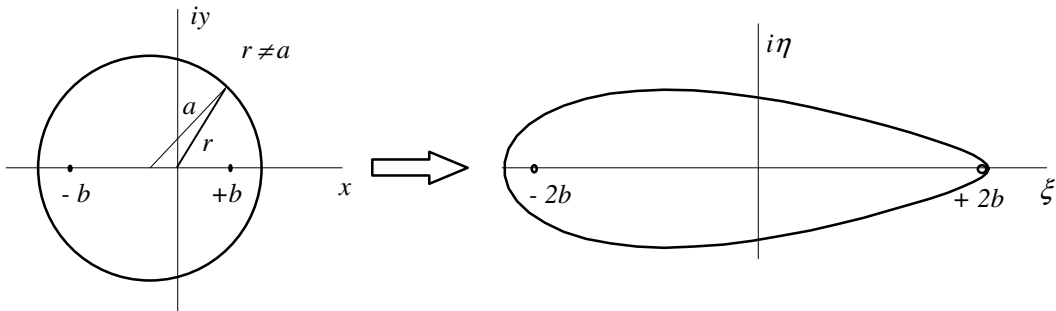
$$t_{max} = 2 \left(a - \frac{b^2}{a} \right)$$

→

$$\delta = \frac{t_{max}}{c} = \frac{1 - (b/a)^2}{1 + (b/a)^2}$$

7.2.5- Tekil noktanın etkisi, Yumurta biçimli şekil

Tekil noktanın, dairenin kendisine yakın olan kısmını sivrilttiği, hatta üzerinde yer alması halinde bu noktada eğriyi kırdığı dikkati çekmektedir. Buna göre elipsi veren dönüşüm halinde daire merkezi başlangıç noktasından sağa veya sola kaydırıldığı takdirde tekil noktanın daireye daha da yaklaşması nedeniyle bu kısmın daha sivri olacağı ve böylece yumurta kesiti şeklinde bir geometri elde edileceği beklenebilir.



Daire merkezinin, tekil noktalardan biri daire üzerine gelecek biçimde kaydırılması halinde ise bir tarafı bir kanat profilinin firar kenarı gibi sivri olan bir geometri elde edilmesi beklenir.

7.2.6- Dairenin simetrik profile dönüşümü

$z_1(x_1, iy_1)$ eksen takımında dairenin denklemi

$$|z_1| = a \quad \text{olup burada} \quad z_1 = z + f \quad \text{konarak}$$

$$|z + f| = a \quad \text{veya} \quad z = re^{i\theta} \quad \text{olmak üzere}$$

$$|re^{i\theta} + f| = a \quad \rightarrow \quad |(r \cos \theta + f) + ir \sin \theta| = a$$

Sol tarafın modülü alınarak ve $a = f + b$ olmak üzere

$$(r \cos \theta + f)^2 + (r \sin \theta)^2 = (f + b)^2$$

$$r^2 + 2f \cos \theta r + f^2 = f^2 + b^2 + 2bf \quad \rightarrow \quad r^2 + 2f \cos \theta r - (b^2 + 2bf) = 0$$

Denklemin çözümü

$$r = -f \cos \theta + \sqrt{b^2 + 2bf + f^2 \cos^2 \theta}$$

Buna göre daire üzerinde θ açısal konumuyla belirlenen nokta için $r(\theta)$ hesaplanır

$$\xi = \left(r + \frac{b^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$\eta = \left(r - \frac{b^2}{r} \right) \sin \theta$$

veya

$$\frac{\xi}{b} = \left(\frac{r}{b} + \frac{b}{r} \right) \cos \theta$$

$$\frac{\eta}{b} = \left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r} \right) \sin \theta$$

ile profil koordinatları elde edilir.

Burada $\frac{r}{b} = -F \cos \theta + \sqrt{1 + 2F + F^2 \cos^2 \theta}$; $F = \frac{f}{b}$ şeklinde tanımlanabilir

Simetrik profilin yaklaşık koordinatları

$$(1 + 2F + F^2 \cos^2 \theta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2F + F^2 \cos^2 \theta) + \dots \cong 1 + F$$

$$\frac{r}{b} \cong 1 + F - F \cos \theta$$

$$\frac{b}{r} \cong 1 - F + F \cos \theta$$

\rightarrow

$$\frac{\xi}{b} \cong 2 \cos \theta$$

$$\frac{\eta}{b} \cong 2F(1 - \cos \theta) \sin \theta$$

\rightarrow

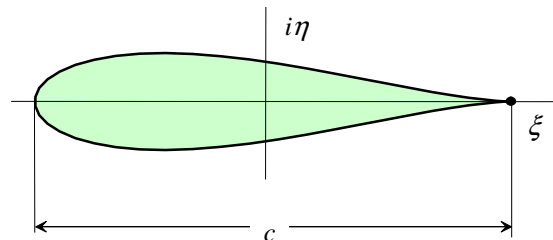
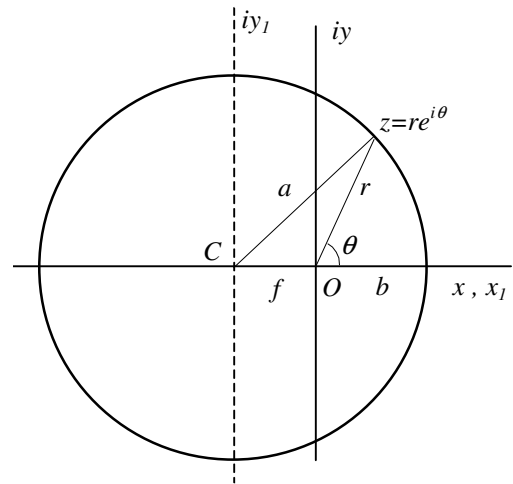
$$\xi(\theta) = \xi(-\theta)$$

$$\eta(\theta) = -\eta(-\theta)$$

Buna göre elde edilen şekil reel eksene göre simetriktir. Profilin veter uzunluğu

$$c = \left| \xi \right|_{\theta=0} + \left| \xi \right|_{\theta=\pi} \rightarrow c \cong 4b$$

olarak hesaplanabilir.



$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta/d\theta}{d\xi/d\theta} = 0 \rightarrow \frac{d\eta}{d\theta} = 0 \rightarrow 2f [\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta] = 0$$

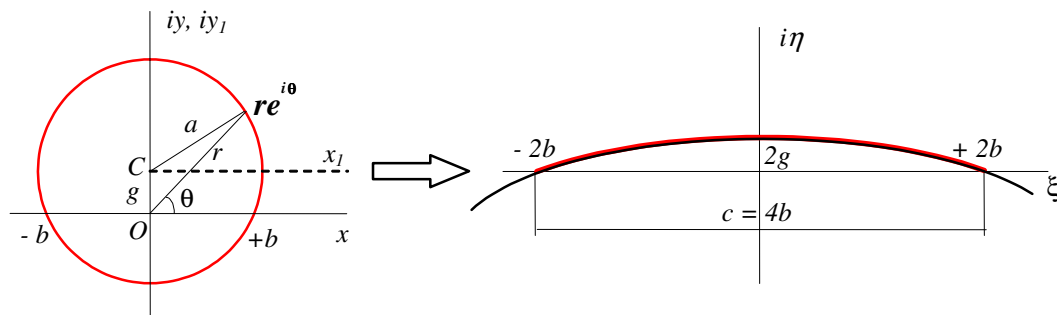
$$-2 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1 = 0 \rightarrow (1 + 2 \cos \theta) \cdot (1 - \cos \theta) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} 1 + 2 \cos \theta = 0 \\ 1 - \cos \theta = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \cos \theta = -1/2 \\ \cos \theta = 1 \end{array}$$

$\theta = 0$ da minimum var: Fırar kenarı iç açısı sıfır

$$\theta = 2\pi/3 \text{ de maksimum var} \quad t_{\max} = |\eta|_{\theta=\pi/3} + |\eta|_{\theta=-\pi/3} \rightarrow \boxed{t_{\max} = 3\sqrt{3} f}$$

$$\text{Kalınlık oranı} \quad \delta = \frac{t_{\max}}{c} = \frac{3\sqrt{3} f}{4b} = \frac{3\sqrt{3}}{4} F \rightarrow \boxed{\delta \cong 1.3 F}$$

7.2.7- Dairenin yay profiline dönüşümü



$$|z_1| = a \rightarrow z_1 = z - ig \rightarrow |z - ig| = a \rightarrow |re^{i\theta} - ig| = a$$

$$|r \cos \theta + i(r \sin \theta - g)| = \sqrt{g^2 + b^2} \rightarrow r^2 - 2g \sin \theta r - b^2 = 0$$

$$\begin{array}{l} r = g \sin \theta + \sqrt{b^2 + g^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{1}{r} = \frac{1}{b^2} \cdot (\sqrt{b^2 + g^2 \sin^2 \theta} - g \sin \theta) \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \xi = 2\sqrt{b^2 + g^2 \sin^2 \theta} \cos \theta \\ \eta = 2g \sin^2 \theta \end{array}}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \rightarrow \frac{\xi^2}{4(b^2 + g\eta/2)} + \frac{\eta}{2g} = 1 \rightarrow \boxed{\xi^2 + \eta^2 + 2\left(\frac{b^2 - g^2}{g}\right)\eta - 4b^2 = 0}$$

Bu denklem bir daire çemberini temsil eder.

$$\text{Merkezinin koordinatları ve yarıçapı:} \quad \xi_c = 0, \quad \eta_c = -\frac{b^2 - g^2}{g}, \quad R = \frac{b^2 + g^2}{g}$$

Ancak $\eta = 2g \sin^2 \theta \geq 0$ olup çemberin sadece ξ ekseninin üstünde kalan kısmı geçerlidir.

$$\eta = 0 \text{ için } \xi = \pm 2b \rightarrow \boxed{c = 4b} \text{ veter uzunluğu}$$

$$\eta_{\max} = e_{\max} = 2g \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{e_{\max}}{c} = \frac{2g}{4b} = \frac{g}{2b} \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{G}{2}} \quad \text{kamburluk oranı}$$

7.2.8- Dairenin kamburluklu profile dönüşümü

$$|z_I| = a \quad \rightarrow \quad z_I = z + f - ig$$

$$|z + f - ig| = a \quad \rightarrow \quad |re^{i\theta} + f - ig| = a$$

$$|(r \cos \theta + f) + i(r \sin \theta - g)| = a$$

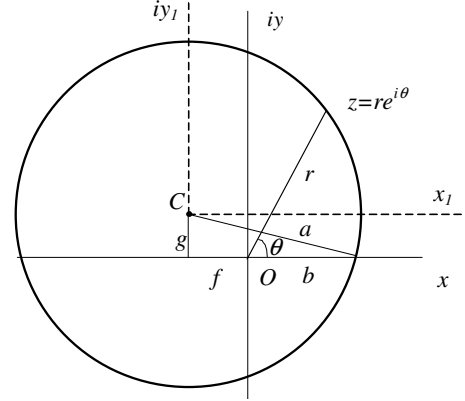
$$(r \cos \theta + f)^2 + (r \sin \theta - g)^2 = a^2 = (b+f)^2 + g^2$$

$$r^2 - 2(g \sin \theta - f \cos \theta)r - (b^2 + 2bf) = 0$$

$$\boxed{r = g \sin \theta - f \cos \theta + \sqrt{b^2 + 2bf + (g \sin \theta - f \cos \theta)^2}}$$

$$\boxed{\frac{r}{b} = G \sin \theta - F \cos \theta + \sqrt{1 + 2F + (G \sin \theta - F \cos \theta)^2}}$$

$$\boxed{F = \frac{f}{b}, \quad G = \frac{g}{b}}$$

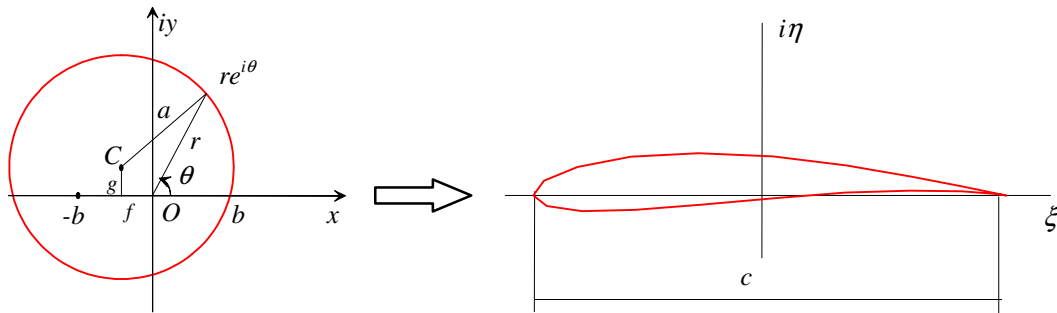


Seçilen θ için $r(\theta)$ hesaplanır,

$$\xi = \left(r + \frac{b^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$\eta = \left(r - \frac{b^2}{r} \right) \sin \theta$$

ile profil koordinatları elde edilir.



Kamburluklu profilin yaklaşık koordinatları

$$\sqrt{1 + 2F + (G \sin \theta - F \cos \theta)^2} = [1 + 2F + (G \sin \theta - F \cos \theta)^2]^{1/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}[2F + (G \sin \theta - F \cos \theta)^2] + \dots$$

$$\cong 1 + F$$

Böylece

$$\begin{aligned} \frac{r}{b} &\cong 1 + F - F \cos \theta + G \sin \theta \\ \frac{b}{r} &\cong 1 - F + F \cos \theta - G \sin \theta \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\xi}{b} &= \left(\frac{r}{b} + \frac{b}{r} \right) \cos \theta \\ \frac{\eta}{b} &= \left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r} \right) \sin \theta \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\xi}{b} &\cong 2 \cos \theta \\ \frac{\eta}{b} &\cong 2F(1 - \cos \theta) \sin \theta + 2G \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Veter uzunluğu: $c = |\xi|_{\theta=0} + |\xi|_{\theta=\pi} \rightarrow c \cong 4b$

Kalınlık dağılımı: $t = \eta(\theta) - \eta(-\theta) \rightarrow t \cong 4f(1 - \cos \theta) \sin \theta$

Maksimum kalınlık için $\frac{dt}{d\theta} = 0 \rightarrow 4f [\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta] = 0$

$$(1 + 2 \cos \theta) \cdot (1 - \cos \theta) = 0 \rightarrow \theta_{t_{\max}} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{t_{\max} = 3\sqrt{3} f}$$

Kalınlık oranı $\delta = \frac{t_{\max}}{c} = \frac{3\sqrt{3} f}{4b} = \frac{3\sqrt{3}}{4} F \rightarrow \boxed{\delta \cong 1.3F}$

Kamburluk dağılımı $e = \frac{1}{2} [\eta(\theta) + \eta(-\theta)] \rightarrow e = 2g \sin^2 \theta$

Maksimum kamburluk için $\frac{de}{d\theta} = 0 \rightarrow 4g \sin^2 \theta = 0$

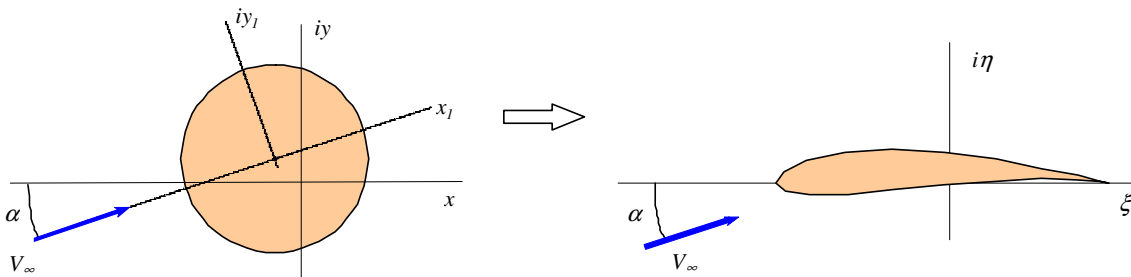
$$\theta_{e_{\max}} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{e_{\max} = 2g}$$

Kamburluk oranı $\gamma = \frac{e_{\max}}{c} = \frac{2g}{4b} = \frac{g}{2b} \rightarrow \boxed{\gamma = \frac{G}{2}}$

7.3- Daire etrafındaki akım alanının dönüşümü

$$|z| \rightarrow \infty \text{ için } \left| \zeta = z + \frac{b^2}{z} \right| \rightarrow |z|$$

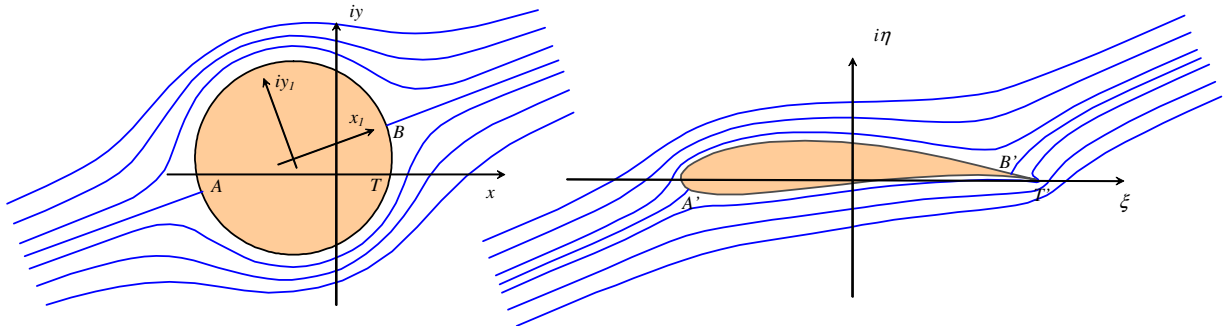
O halde Joukowsky dönüşümü serbest akım şartlarını değiştirmez. Profil için hangi hücum açısı öngörülmüş ise daire etrafındaki akım için de hücum açısı aynı olacaktır.



Daire etrafında *serbest akım hızına bağlı z_1 eksen takımında simetrik akım* için kompleks potansiyel fonksiyonu

$$f(z_1) = V_\infty \left(z_1 + \frac{a^2}{z_1} \right)$$

Daire etrafında akım çizgileri çizilir ve Joukowsky dönüşümü ile profil etrafına aktarılırsa profil etrafında şekildeki gibi bir görüntü ortaya çıkar.



Daire etrafındaki akım alanının bu şekilde simetrik olması halinde A ve B noktaları durma noktaları olup dairenin reel eksenini kestiği T noktasında hız sıfırdan farklıdır.

Diğer taraftan profil ve daire düzlemindeki hızlar arasında $V_\zeta = \frac{V_z}{|d\zeta/dz|}$

şeklinde bir bağıntı vardır. T noktası dönüşümün tekil noktalarından biri olup bu noktada

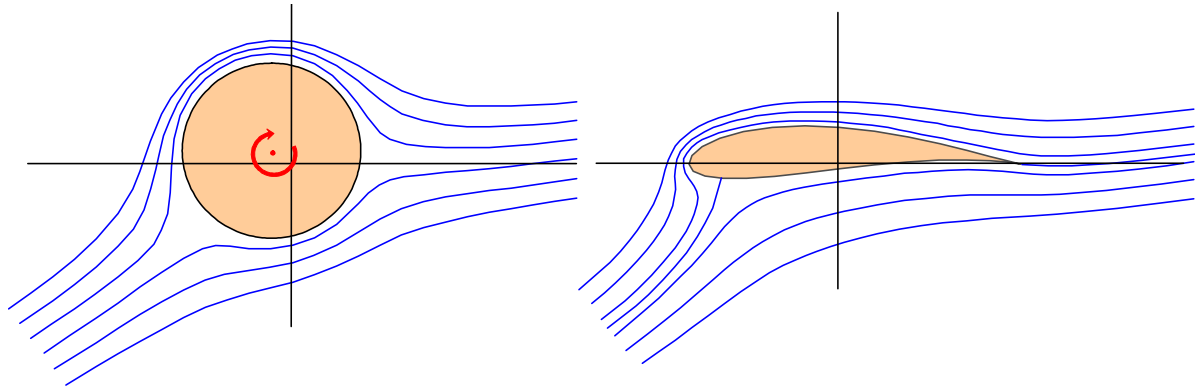
$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_T = \left| 1 - \frac{b^2}{z^2} \right|_T = \left| 1 - \frac{b^2}{b^2} \right|_T = 0$$

Buna göre profiling firar kenarı olan T' noktasındaki hız için

$$V_{T'} = \frac{V_T}{|d\zeta/dz|_T} = \frac{V_T}{0} \rightarrow \infty$$

sonucu elde edilir. Oysa hız fiziksel olarak hiçbir zaman sonsuz olamaz.

Firar kenarındaki tekilliği ortadan kaldırmanın tek yolu daire üzerindeki durma noktasının tekil nokta üzerine kaydırılmasıdır. Bu durumda daire ve profil etrafındaki akım alanları şekilde görüldüğü gibi olur. Profil üzerindeki akım artık *profili firar kenarından düzgün olarak terk etmektedir*. Bu durum literature bir kural olarak girmiş olup, "*Kutta şartı*" olarak bilinir.



Daire etrafındaki bu yeni akım alanı daire merkezine bir *girdap ilavesiyle* elde edilir.

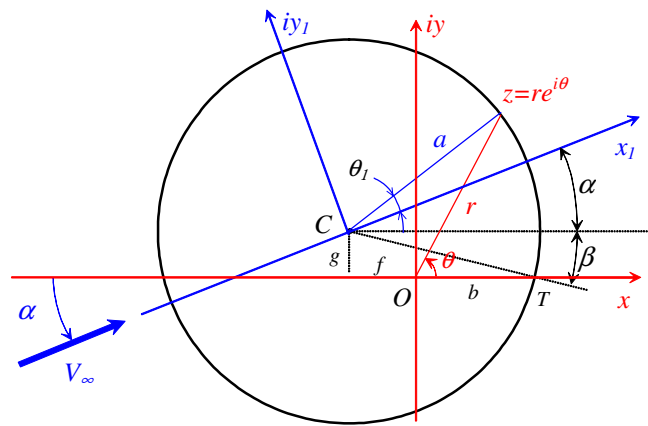
Serbest akım doğrultusuna bağlı z_1 eksen takımında:

Kompleks potansiyel fonksiyonu

$$f(z_1) = V_\infty \left(z_1 + \frac{a^2}{z_1} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \text{Ln} \left(\frac{z_1}{a} \right)$$

Kompleks eşlenik hız fonksiyonu

$$w^*(z_1) = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z_1^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z_1}$$



Buradaki Γ değeri, T noktası *Kutta şartı gereği* durma noktası yapılarak belirlenir.

Tekil noktanın yeri z_1 düzleminde

$$z_T = a e^{-i(\alpha+\beta)}$$

Tekil noktada hız sıfıra eşitlenerek

$$w_T^* = V_\infty \left[1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-i(\alpha+\beta)2}} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i(\alpha+\beta)}} = 0$$

Gerekli düzenlemeler yapılarak sirkülasyon şiddeti için

$$\Gamma = 4\pi a V_\infty \sin(\alpha + \beta)$$

bulunur. Burada

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{g}{b+f} \right)$$

Sirkülasyonun bu değeri ile kompleks eşlenik hız fonksiyonu

$$w^*(z_1) = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z_1^2} \right) + 2a V_\infty \sin(\alpha + \beta) \frac{i}{z_1}$$

Daire üzerindeki bir noktanın z_1 düzlemindeki koordinatı $z_1 = a e^{i\theta_1}$ olup, kompleks eşlenik hız ifadesinde kullanılarak gerekli düzenlemelerden sonra

$$w^*(z_1) = i e^{-i\theta_1} 2V_\infty [\sin \theta_1 + \sin(\alpha + \beta)]$$

Bu ifadenin modülü alınarak hızın şiddeti

$$V_{z_1} = 2V_\infty \left| \sin \theta_1 + \sin(\alpha + \beta) \right|$$

Joukowski dönüşümünde daire üzerindeki noktalar θ açısal konumlarıyla belirlendiğinden hızların bu noktalarda elde edilebilmesi için z ve z_1 düzlemlerindeki θ ve θ_1 açıları arasında ilişki kurmak gereklidir.

Problemin geometrisinden:

$$\theta_1 = \theta - \alpha - \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{a} \sin \left(\theta + \tan^{-1} \frac{g}{f} \right) \right]$$

Profil üzerindeki hız

$$V_\zeta = \frac{V_z}{\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|} = \frac{V_{z_1}}{\left| \frac{dz_1}{dz} \right|}$$

$$z_1 = [z - (f + ig)] e^{i\alpha} \rightarrow \left| \frac{dz_1}{dz} \right| = |e^{i\alpha}| = 1 \rightarrow$$

$$V_\zeta = \frac{V_{z_1}}{\left| d\zeta / dz \right|}$$

Dönüşüm fonksiyonunun türevi

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{b^2}{z^2}$$

Daire üzerinde $z = r e^{i\theta}$ olup

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \sqrt{1 - 2(b/r)^2 \cos 2\theta + (b/r)^4}$$

Firar kenarındaki hız:

Kutta şartı gereği firar kenarında

$$V_{T'} = \frac{V_T}{\left| d\zeta / dz \right|_T} = \frac{0}{0}$$

Belirsizlik nedeniyle firar kenarındaki hızın bir limit işlemiyle bulunması gerekir.

Profil üzerindeki hızlar için bulunan ifade

$$V_\zeta = \frac{V_{z_1}}{\left| d\zeta / dz \right|}$$

Burada

$$V_{z_1} = |w^*(z_1)| = V_\infty \left| 1 - \frac{a^2}{z_1^2} + \frac{i 2 a \sin(\alpha + \beta)}{z_1} \right|$$

Tekil nokta için hız yazılırsa

$$V_{T'} = \frac{V_\infty \left| 1 - \frac{a^2}{z_1^2} + \frac{i 2 a \sin(\alpha + \beta)}{z_1} \right|_T}{\left| 1 - \frac{b^2}{z^2} \right|_T} = \frac{0}{0}$$

Daire üzerindeki herhangi bir nokta z ve z_1 kompleks koordinatlarıyla temsil edilebilir. Bu nokta tekil noktaya yaklaştırılarak ($z \rightarrow b$) ve ($z_1 \rightarrow a e^{-i(\alpha+\beta)}$) için limit alınırsa

Hospital kuralı uygulanarak,

$$V_{T'} = V_{\infty} \lim_{\substack{z \rightarrow -b \\ z_1 \rightarrow ae^{-i(\alpha+\beta)}}} \frac{\frac{d}{dz_1} \left| 1 - \frac{a^2}{z_1^2} + \frac{i 2 a \sin(\alpha + \beta)}{z_1} \right|}{\frac{d}{dz} \left| 1 - \frac{b^2}{z^2} \right|}$$

$$q_{FK} = V_{\infty} \lim_{\substack{z \rightarrow -b \\ z_1 \rightarrow ae^{-i(\alpha+\beta)}}} \frac{\frac{2a^2}{z_1^3} - \frac{i 2 a \sin(\alpha + \beta)}{z_1^2}}{\left| -\frac{2b^2}{z^3} \right|}$$

Sonuç olarak

$$V_{T'} = V_{\infty} \frac{b}{a} \cos(\alpha + \beta)$$

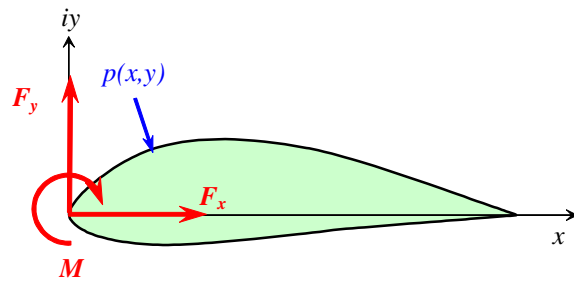
7.4- Bir Cisme Etkiyen Kuvvet ve Momentler (Blasius Formülleri)

Şekildeki gibi iki-boyutlu bir cisme üzerindeki basınç dağılımı nedeniyle etkiyen kuvvet ve momentler sırasıyla

$$F_x = \oint p \, dy$$

$$F_y = -\oint p \, dx$$

$$M_o = \oint p (x \, dx + y \, dy)$$



şeklinde hesaplanabilir.

Kuvvet bileşenleri kompleks bir büyüklük içerisinde birleştirilebilir.

$$F = F_x + i F_y = \oint p (dy - i dx) = -i \oint p (dx + i dy) \rightarrow F = -i \oint p \, dz$$

Moment ifadesi ise kompleks büyüklüklerle

$$M = \oint p \operatorname{Re}\{z \, dz^*\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Daimi sıkıştırılmaz potansiyel akım halinde Bernoulli denklemini gereği

$$P_T = p + \frac{1}{2} \rho V^2 = S b \quad \rightarrow \quad p = P_T - \frac{1}{2} \rho V^2$$

olup, bu eşitlik kuvvet ve moment için yukarıda bulunan integral bağıntılarında kullanılarak

$$F = -i \oint \left(P_T - \frac{1}{2} \rho V^2 \right) dz = -i P_T \oint dz + \frac{1}{2} \rho i \oint V^2 dz$$

$$M = \oint \left(P_T - \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \operatorname{Re}\{z dz^*\} = P_T \oint \operatorname{Re}\{z dz^*\} - \frac{1}{2} \rho \oint V^2 \operatorname{Re}\{z dz^*\}$$

Kapalı bir eğri boyunca alınan bu integraller için

$$\oint dz = 0, \quad \oint z dz^* = 0$$

olup

$$F = \frac{1}{2} \rho i \oint V^2 dz$$

$$M = -\frac{1}{2} \rho \oint V^2 \operatorname{Re}\{z dz^*\}$$

Kompleks hız ve eşleniği için, kompleks potansiyel fonksiyonu f olmak üzere

$$w = V \cdot e^{i\theta} = \frac{df^*}{dz^*} \quad \rightarrow \quad V^2 = w^* \cdot w = \frac{df}{dz} \cdot \frac{df^*}{dz^*}$$

$$w^* = V \cdot e^{-i\theta} = \frac{df}{dz}$$

yazılarak

$$F = \frac{1}{2} \rho i \oint \frac{df}{dz} \cdot \frac{df^*}{dz^*} dz \quad M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint \frac{df}{dz} \cdot \frac{df^*}{dz^*} z \cdot dz^* \right\}$$

ϕ potansiyel fonksiyonu, ψ akım fonksiyonu olmak üzere

$$f(z) = \phi + i\psi$$

Bir akım çizgisi üzerinde

$$\psi = Sb \quad \rightarrow \quad d\psi = 0 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{df = d\phi = df^*}$$

Böylece

$$F = \frac{1}{2} \rho i \oint \frac{df^*}{dz^*} \frac{df}{dz} dz \quad M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint \frac{df}{dz} \frac{df^*}{dz^*} z dz^* \right\}$$

Kuvvet için bulunan bağıntının eşleniği alınarak

$$\boxed{F^* = -\frac{1}{2} \rho i \oint \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz}$$

Moment bağıntısı düzenlenerek

$$\boxed{M_o = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right\}}$$

Elde edilir. Bu bağıntılar literatürde *BLASIUS formülleri* olarak bilinir.

7.5- Joukowsky profiline etkiyen kuvvet ve momentler

Joukowsky profillerinin z düzlemindeki bir daireden dönüşümle ζ düzleminde elde edildiği düşünüldüğünde Blasius denklemleri bu düzlemde

$$F^* = -\frac{1}{2} \rho i \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta, \quad M_o = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \zeta d\zeta \right\}$$

şeklinde uygulanabilir. *Ancak* problemin çözümünün aslında daire düzleminde gerçekleştirildiği düşünülerek bu integrallerin z düzlemine aktarılması gerekir.

$$F^* = -\frac{1}{2} \rho i \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} dz,$$

$$M_0 = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \zeta \frac{d\zeta}{dz} dz \right\}$$

Bu integrallerin hesaplanabilmesi için bütün büyüklüklerin z değişkeni cinsinden ifade edilmesi gereklidir.

Joukowsky dönüşümü gereği hatırlanır.

$$\zeta = z + \frac{b^2}{z}, \quad \frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{b^2}{z^2}$$

olduğu

Ayrıca, A_0, A_1, A_2, \dots ileride hesaplanacak kompleks katsayılar olmak üzere $(df/d\zeta)^2$ fonksiyonunun

$$\left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

şeklinde bir seriye açıldığı farzedilirse Blasius formülleri

$$F^* = -\frac{1}{2} \rho i \oint \left[A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2 - A_0 b^2}{z^2} + \dots \right] dz$$

$$M_0 = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \oint \left[A_0 z + A_1 + \frac{A_2}{z} + \frac{A_3}{z^2} + \dots \right] dz \right\}$$

şeklinde düzenlenebilir. Her iki ifadede

$$I = \oint \left[D_{-1} z + D_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} + \dots \right] dz$$

şeklinde türevlerin yer aldığı dikkati çekmektedir. Cauchy-Goursat integral teoreminin bir sonucu olarak bu ifadede $1/z$ 'li terim dışındaki bütün diğer terimlerin integralleri sıfır olup integralin sonucu

$$I = \oint \frac{D_1}{z} dz = -2\pi i D_1$$

şeklinde (Bakınız Ek). Buna göre aerodinamik kuvvet ve momentlerle ilgili integrallerin

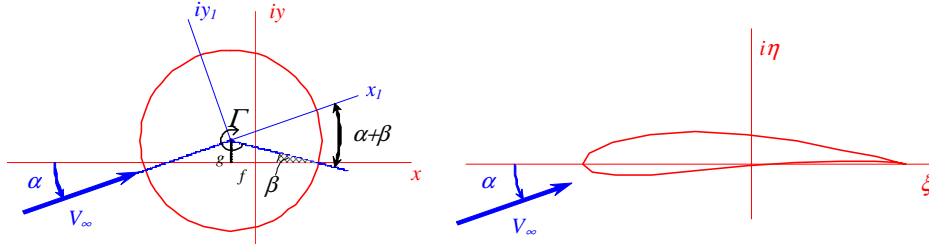
$$F^* = -\rho \pi A_1, \quad M_0 = -\rho \pi \operatorname{Im}\{A_2\}$$

şeklinde sonuçlanacağı görülebilir. Joukowsky profiline etkiyen kuvvet ve momenti elde etmek için yapılması gereken A_1 ve A_2 katsayılarının bulunmasından ibarettir.

Joukowsky dönüşümünde profili veren daire etrafındaki akıma ait kompleks potansiyel fonksiyonu, şekildeki gibi daire merkezine ve serbest akım doğrultusuna bağlı z_1 eksen takımında

$$f(z_1) = V_\infty \left(z_1 + \frac{a^2}{z_1} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_1}{a}$$

şeklinde olup, buradaki sirkülasyonun değeri Kutta şartı gereği $\Gamma = 4\pi a V_\infty \sin(\alpha + \beta)$ 'dir.



Kompleks potansiyel fonksiyonunun türevi
$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dz} = \left[V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z_1^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} \right] \frac{dz_1}{dz}$$

z_1 ve z düzlemlerinin ilişkisinden
$$z_1 = (z + f - ig)e^{-i\alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{dz_1}{dz} = e^{-i\alpha}$$

Böylece
$$\frac{df}{dz} = \left\{ V_\infty \left[1 - \frac{a^2}{(z + f - ig)^2 e^{-i2\alpha}} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi(z + f - ig)e^{-i\alpha}} \right\} e^{-i\alpha}$$

$$= V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{U_\infty a^2 e^{i\alpha}}{z^2} \left[1 + \frac{f - ig}{z} \right]^{-2} + \frac{i\Gamma}{2\pi z} \left[1 + \frac{f - ig}{z} \right]^{-1}$$

Binom serisine açılarak
$$\frac{df}{dz} = V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi z} - \left[V_\infty a^2 e^{i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi} (f - ig) \right] \frac{1}{z^2} + \dots$$

bulunur.

Kompleks potansiyel fonksiyonunun ζ profil düzlemindeki türevi
$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}$$

Burada
$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{b^2}{z^2} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{b^2}{z^2} + \dots \right)$$

Gerekli düzenlemelerle,
$$\frac{df}{d\zeta} = V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \left[V_\infty b^2 e^{-i\alpha} + V_\infty a^2 e^{i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi} (f - ig) \right] \frac{1}{z^2} + \dots$$

Bu türev ifadesinin karesi alınıp düzenlenerek sonuçta

$$A_0 = V_\infty^2 e^{-i2\alpha}$$

$$A_1 = \frac{i\Gamma}{\pi} V_\infty e^{-i\alpha}$$

$$A_2 = 2V_\infty^2 b^2 e^{-i2\alpha} - 2V_\infty^2 a^2 - \frac{i\Gamma V_\infty e^{-i\alpha}}{\pi} (f - ig) - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$$

elde edilir.

Aerodinamik kuvvet ve katsayılar:

A_1 katsayısı kullanılarak

$$F^* = F_x - iF_y = -i\rho V_\infty \Gamma e^{-i\alpha}$$

Eşleniği alınarak

$$F = F_x + iF_y = i\rho V_\infty \Gamma e^{i\alpha}$$

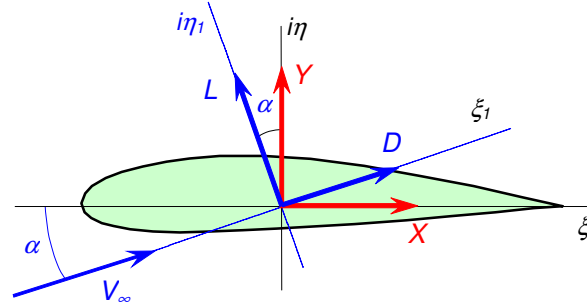
elde edilir. Ancak aerodinamik kuvvetler şekilde görüldüğü gibi hız doğrultusuna bağlı bir eksen takımında tanımlanırlar. Bu bakımdan son bağıntı sözü edilen (ξ_1, η_1) eksen takımına aktarılırsa

$$F = D + iL = (X + iY)e^{-i\alpha} = i\rho V_\infty \Gamma$$

veya bileşenlere ayrılarak

$$D = 0, \quad L = \rho U_\infty \Gamma$$

elde edilir.



Bu son bağıntılardan görüldüğü gibi

Bu son bağıntılardan görüldüğü gibi Joukowski profiline etkiyen taşıma kuvveti dönüşüm dairesi etrafında oluşan sirkülasyonun değerine bağlı iken, hiç bir sürüklenme kuvveti oluşmamaktadır. Potansiyel akımda sürüklenme kuvvetinin meydana gelmemesi literatürde "d'Alembert paradoksu" olarak bilinir.

Sirkülasyonun bilinen değeri ile taşıma kuvveti için bulunan son bağıntı birlikte kullanılarak profilin taşıma katsayısı için

$$C_L = 8\pi \frac{a}{c} \sin(\alpha + \beta)$$

bulunur

Yunuslama momenti

A_2 için bulunan değer yunuslama momenti için bulunan bağıntıda kullanılarak

$$M_o = 2\rho\pi b^2 V_\infty^2 \sin(2\alpha) + \rho V_\infty \Gamma (f \cos \alpha - g \sin \alpha)$$

ve yunuslama katsayısı da

$$C_{M_o} = 4\pi \frac{b^2}{c^2} \sin(2\alpha) + 8\pi \frac{a}{c} \sin(\alpha + \beta) \left(\frac{f}{c} \cos \alpha - \frac{g}{c} \sin \alpha \right)$$

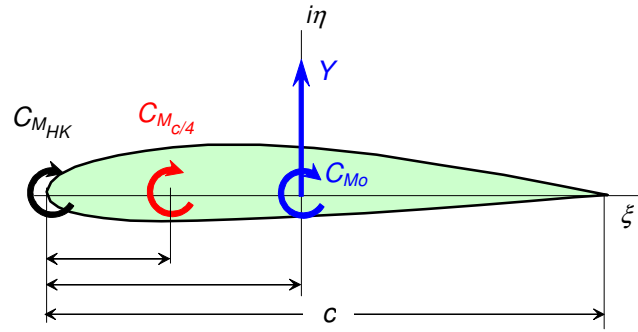
şeklinde elde edilir.

Bu ifadelerdeki "o" alt-indisi yunuslama momentinin etrafında hesaplandığı noktanın eksen takımının başlangıç noktası olduğunu belirtmek üzere kullanılmıştır. Kanat profilinin veter orta noktası civarına isabet eden bu nokta etrafında ölçülen yunuslama momentinin pratikte pek önemi yoktur. Bu bakımdan yunuslama momenti daha ziyade hücum kenarı etrafında veya çeyrek veter noktası etrafında ölçülür.

Hücum kenarı ve çeyrek veter noktası etrafındaki yunuslama katsayıları sırasıyla

$$C_{M_{HK}} = C_{M_o} - C_Y \frac{\xi_{HK}}{c}$$

$$C_{M_{c/4}} = C_{M_o} - C_Y \left(\frac{\xi_{HK}}{c} - \frac{1}{4} \right)$$



şeklinde hesaplanabilir. Burada

$$C_Y = C_L \cos \alpha$$

Kuvvet ve moment katsayıları için yaklaşık ifadeler

Joukowsky dönüşümünde $F \ll 1$, $G \ll 1$ olup bu büyüklüklerin kareleri ve birbirleriyle çarpımları ihmal edilerek,

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \sqrt{(1+F)^2 + G^2} = (1+2F+F^2+G^2)^{1/2} \cong 1+F \\ \frac{c}{b} &\cong 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{a}{c} \cong \frac{1+F}{4}$$

$$\frac{\xi_{HK}}{c} \cong \frac{1}{2}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{G}{1+F} \right) \cong G(1+F)^{-1} \cong G(1-F) \cong G$$

ayrıca α , β açıları çok küçük olup

$$\sin \alpha \cong \alpha, \quad \sin \beta \cong \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) \cong \alpha + \beta, \quad \sin(2\alpha) \cong 2\alpha$$

yazılabilir. Bu yaklaşık ifadeler taşıma katsayısı için bulunan bağıntıda kullanılarak

$$C_L \cong 8\pi \frac{1+F}{4} (\alpha + G) = 2\pi(1+F)\alpha + 2\pi G$$

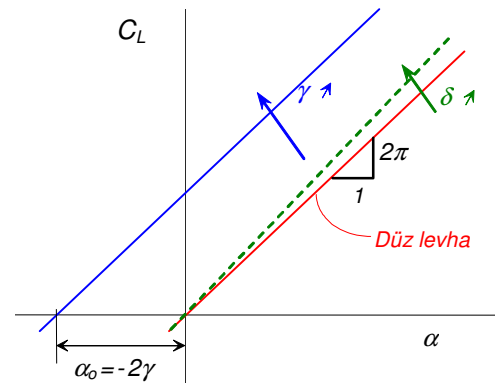
veya ayrıca $F \cong \delta/1.3$, $G \cong 2\gamma$ olduğu hatırlanarak

$$C_L \cong 2\pi(1+0.77\delta)\alpha + 4\pi\gamma$$

elde edilir.

Taşıma katsayısıyla ilgili önemli sonuçlar:

- Taşıma katsayısı hücum açısıyla lineer olarak değişmektedir.



- Düz levhanın taşıma eğrisi eğimi 2π olup, kalınlık etkisiyle taşıma eğrisi eğimi çok az ($2\pi \times 0.77\delta$ mertebesinde) artmaktadır.
- Kamburluk etkisiyle taşıma katsayısı, bütün hücum açılarında $4\pi\gamma$ mertebesinde artmaktadır. Sıfır hücum açısındaki taşıma katsayısı $C_{L_0} = 4\pi\gamma$ şeklinde, sıfır taşıma hücum açısı da $\alpha_0 = -2\gamma$ şeklinde kamburluk oranına doğrudan bağlıdır.

Yukarıda yazılan yaklaşık büyüklükler bir defa da yunuslama momenti için bulunan bağıntılarda kullanılarak

$$C_{M_o} \cong 4\pi \frac{1}{16} 2\alpha + [2\pi(1+F) + 2\pi G][F/4 - G/4]\alpha \cong \frac{\pi}{2} \alpha(1+F)$$

$$C_Y \cong C_L$$

$$C_{M_{HK}} \cong \frac{\pi}{2} \alpha(1+F) - [2\pi(1+F)\alpha + 2\pi G] \frac{1}{2} \cong -\frac{\pi}{2} (1+F)\alpha - \pi G$$

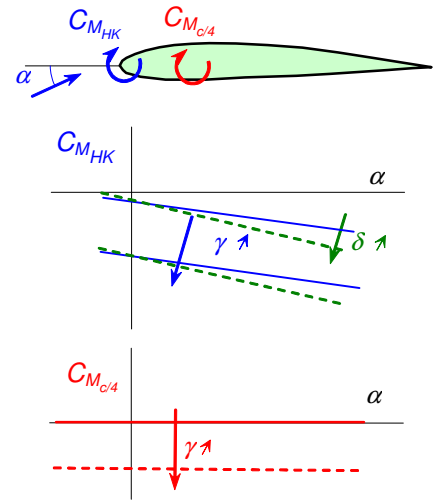
$$C_{M_{c/4}} \cong \frac{\pi}{2} \alpha(1+F) - [2\pi(1+F)\alpha + 2\pi G] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \cong -\frac{\pi}{2} G$$

ya da yine F ve G 'nin kalınlık ve kamburluk oranları cinsinden yaklaşık değerleri kullanılarak

$$C_{M_o} \cong \frac{\pi}{2} \alpha(1 + 0.77\delta)$$

$$C_{M_{HK}} \cong -\frac{\pi}{2} (1 + 0.77\delta)\alpha - 2\pi\gamma$$

$$C_{M_{c/4}} \cong -\pi\gamma$$



bulunur. Yunuslama momenti için önemli sonuçlar

- Hücum kenarı etrafındaki yunuslama momenti pozitif hücum açılarında negatif yönlü (burun aşağı) olup, kalınlık ve kamburluk oranlarıyla negatif yönde artmaktadır.
- Çeyrek veter noktası etrafındaki yunuslama momenti hücum açısından, ve dolayısıyla taşımadan hemen hemen bağımsız olup, bu nokta aerodinamik merkez olarak kabul edilebilir. Bu nokta etrafındaki yunuslama momenti simetrik profil için sıfır olup, pozitif kamburluk oranıyla negatif yönde $\pi\gamma$ mertebesinde artmaktadır.

Örnek Sorular

Soru 1

z kompleks düzleminde

$$\zeta = z - \frac{b^2}{z}$$

konform dönüşüm fonksiyonu verilmiştir.

a) Bu fonksiyonunun tekil noktalarının imajiner eksen üzerinde bulunacağını gösteriniz.

b) Bu dönüşümün z kompleks düzleminde merkezi başlangıç noktasında yer alan b yarıçaplı bir daireye uygulanması halinde ζ düzleminde imajiner eksen üzerinde $z=-2ib$ ve $z=2ib$ noktaları arasında yer alan bir **doğru parçası** elde edileceğini gösteriniz.

c) Aynı dönüşümün merkezi $z=-if$ noktasında yer alan $a=b+f$ yarıçaplı ($f/b \ll 1$) bir daireye uygulanması halinde ζ düzleminde nasıl bir şekil elde edileceğini inceleyiniz. Bu şeklin önemli geometrik özelliklerini hesaplayınız.

Soru 2

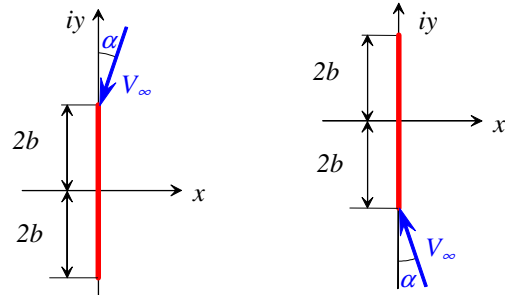
z kompleks düzleminde

$$\zeta = z + b - \frac{b^2}{z-b}$$

konform dönüşüm fonksiyonu verilmiştir. Dönüşüm fonksiyonunun tekil noktalarını bulunuz. Bu fonksiyonunun, merkezi $z=b$ noktasında yer alan ve tekil noktalardan geçen b yarıçaplı bir daireye uygulanması halinde ζ düzleminde bir **doğru parçası** elde edileceğini gösteriniz. Bu doğru parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Soru 3

z kompleks düzleminde şekilde görüldüğü gibi yer alan düz levhanın bir daireden Joukowsky dönüşümü ile nasıl elde edilebileceğini gösteriniz. Düz levha üzerindeki hız dağılımını daire düzlemindeki parametreler cinsinden hesaplayınız.



Soru 4

z kompleks düzleminde verilen

$$\zeta = z - \frac{b^2}{z}$$

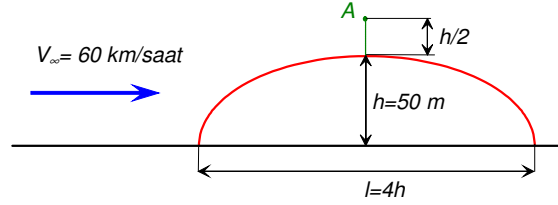
konform dönüşüm fonksiyonunun tekil noktalarının imajiner eksen üzerinde bulunduğunu gösteriniz. Bu fonksiyonunun, merkezi reel eksen üzerinde $z=-g$ noktasında yer alan ve tekil noktalardan geçen a yarıçaplı bir daireye uygulanması halinde ζ düzleminde bir **dairesel yay parçası** elde edileceğini gösteriniz. Bu yay parçasının veter uzunluğunu ve kamburluk oranını hesaplayınız

Soru 5

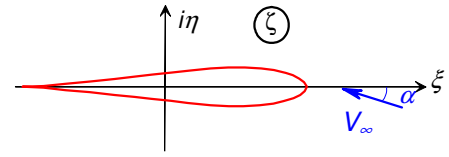
Yüksekliği $15 m$, genişliği $50 m$ ve uzunluğu $100 m$ olan yarı elips şeklinde bir hangar tasarlanırken bu hangarın yandan $90 km/saat$ hızında bir rüzgara maruz kalabileceği düşünülmüştür. Hangarın deniz seviyesindeki standart atmosfer şartlarında yer aldığını ve etrafındaki akımın daimi, iki boyutlu, sıkıştırılmaz ve potansiyel olduğunu kabul ederek ve ayrıca hangar içerisindeki basıncı durma basıncına (veya serbest akım basıncına) eşit alarak hangar üzerindeki basınç dağılımını ve hangara etkiyecek bileşke kuvveti hesaplayınız.

Soru 6

Düz bir ova üzerinde yer alan yarı elips şeklindeki bir tepeye doğru $V_\infty = 60 \text{ km/saat}$ hızla rüzgar esmektedir. Tepe üzerinde uçmakta olan bir planörün tepenin en yüksek noktası hizasında, şekilde belirtilen A noktasında maruz kalacağı rüzgar hızını hesaplayınız. (Akımı iki-boyutlu, potansiyel kabul ederek Joukowsky dönüşümünden yararlanınız.)

**Soru 7**

ζ kompleks düzleminde şekilde görüldüğü gibi sağdan sola doğru akmakta olan üniform paralel akım içerisinde yer alan simetrik Joukowsky profilinin yaklaşık koordinatlarını ve hız dağılımını, bu profili dönüşümle veren daire düzlemindeki parametreler cinsinden elde ediniz.

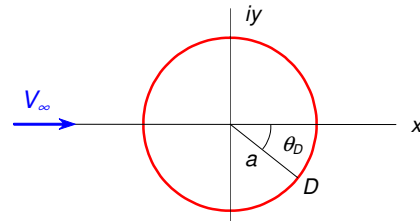
**Soru 8**

z kompleks düzleminde verilen
$$\zeta = z - \frac{b^2}{z}$$

konform dönüşüm fonksiyonunun tekil noktalarını bulunuz. Bu fonksiyonunun, merkezi $z = -if$ noktasında yer alan ve tekil noktalardan birinin üzerinden geçip diğerini içine alan a yarıçaplı bir daireye uygulanması halinde ζ düzleminde bir kanat profili şekli elde edileceğini gösteriniz. Bu profilin kalınlık ve kamburluk oranları ile firar kenarı açısını inceleyiniz.

Soru 9

Şekilde görüldüğü gibi z kompleks düzleminin reel eksenini doğrultusunda soldan sağa doğru akmakta olan üniform paralel akım içerisinde merkezi başlangıç noktasında olmak üzere yer alan a yarıçaplı daire etrafındaki potansiyel akımda sirkülasyon mevcuttur. Γ sirkülasyon miktarı, daire üzerinde belirtilen D noktası durma noktası olacak biçimde ayarlanmıştır.



a) Akımın kompleks potansiyel ve kompleks eşlenik hız fonksiyonlarını yazınız. Γ sirkülasyonunu D noktasının θ_D açısal konumu cinsinden hesaplayınız.

b) Bir cisme etkiyen aerodinamik kuvvet için Blasius formülü
$$F^* = -\frac{1}{2} \rho i \oint \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz$$

şeklinde verildiğine göre bu daireye etkiyen taşıma ve sürüklenme kuvvetlerini ve katsayılarını hesaplayınız.

Soru 10

ζ kompleks düzleminde yer alan bir Joukowsky profili etrafındaki sıkıştırılmaz potansiyel akımda kompleks potansiyel fonksiyonu

$$\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

şeklinde seriye açılarak, bu kanat profiline etkiyen kuvvet ve moment

$$F^* = X - iY = -\rho \pi A_1, \quad M_0 = -\rho \pi \text{Im}\{A_2\}$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada z Joukowsky profilini veren dairenin yer aldığı düzlemi; X ve Y profile sırayla veter doğrusunda ve buna dik doğrultuda etkiyen aerodinamik kuvvet bileşenlerini, ρ havanın yoğunluğunu belirtmektedir. Serideki katsayılar kompleks sayılar olup

$$A_1 = \frac{i\Gamma}{\pi} V_\infty e^{-i\alpha}$$

$$A_2 = 2V_\infty^2 b^2 e^{-i2\alpha} - 2V_\infty^2 a^2 - \frac{i\Gamma V_\infty e^{-i\alpha}}{\pi} (f - ig) - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada

$$\Gamma = 4\pi a V_\infty \sin(\alpha + \beta)$$

profil etrafındaki sirkülasyon olup, a dairenin yarıçapını, f ve g daire merkezinin z düzlemindeki konumunu belirten parametrelerdir. Ayrıca b Joukowsky dönüşüm parametresi α hücum açısı ve β 'da profil kamburluğunu belirleyen bir parametredir. Buna göre:

f ve g parametrelerinin b yanında çok küçük kaldığını ve ayrıca hücum açısının da yeterince küçük olduğunu kabul ederek bir Joukowsky profiline etkiyen taşıma sürüklenme ve çeyrek veter noktasına göre yunuslama momenti katsayıları için birer yaklaşık ifadeyi profin kalınlık ve kamburluk oranları cinsinden elde ediniz. Kalınlık ve kamburluk oranlarıyla hücum açısının bu katsayılar üzerindeki etkilerini birer şekil üzerinde göstererek yorumlayınız.

Soru 11

Bir Joukowsky profiline etkiyen taşıma kuvveti için Γ sirkülasyonuna bağlı

$$L = \rho V_\infty \Gamma$$

şeklinde bir bağıntı bulmak mümkündür.

a) Kutta şartını kullanarak sirkülasyonun değerini α hücum açısı, β kamburluk açısı ve Joukowsky profilini dönüşümle veren dairenin a yarıçapı cinsinden bulunuz.

b) Taşıma katsayısını bulunuz. Bu bağıntıyı, yaklaşımlar yaparak basitleştiriniz ve hücum açısı ile profilin kalınlık ve kamburluk oranları cinsinden yaklaşık olarak ifade ediniz.

c) Taşıma için bulduğunuz yaklaşık ifadeyi yorumlayınız.

EK 7.1**CAUCHY INTEGRALI****Cauchy-Goursat teoremi :**

z düzleminde bir $f(z)$ fonksiyonu kapalı bir C eğrisinin üzerinde ve içindeki bölgede (Şekil-1a) analitikse bu fonksiyonun C eğrisi boyunca çizgisel integralinin değeri sıfıra eşittir.

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

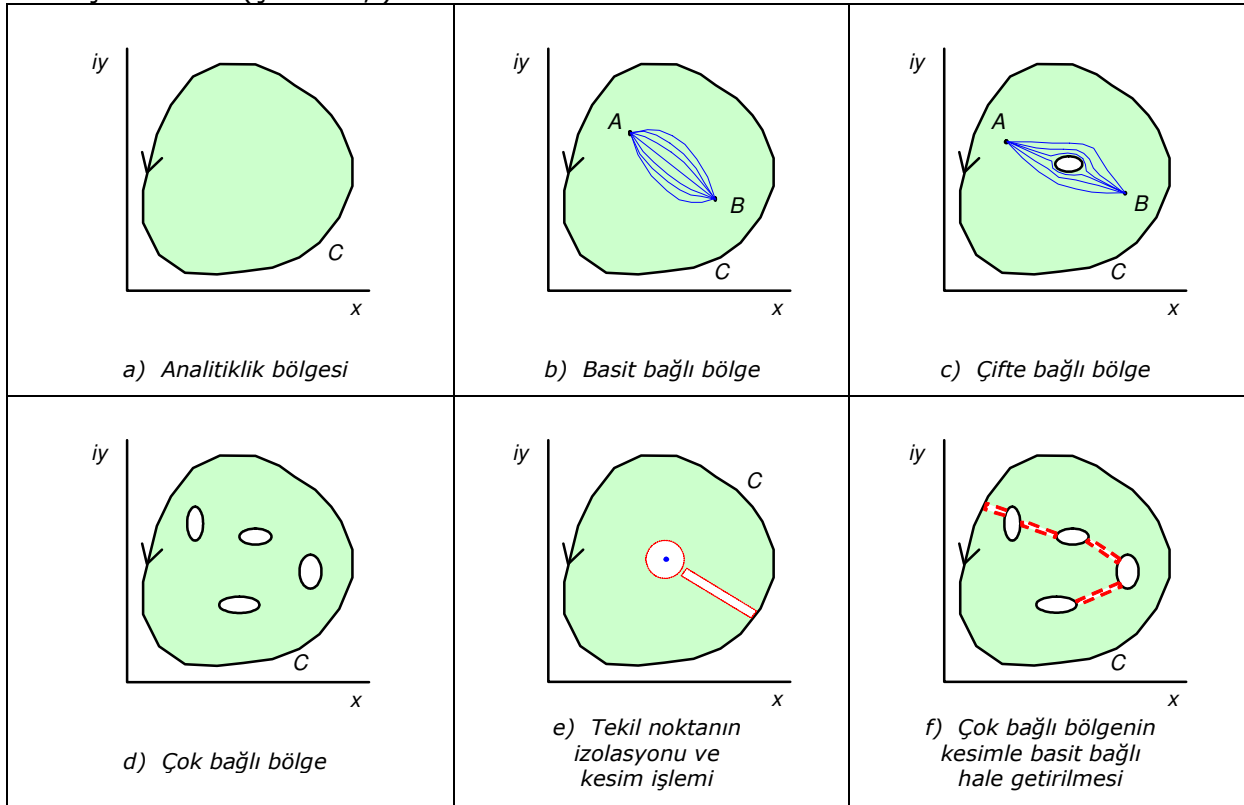
Buradaki integralin yönü, integral sırasında bölge daima sağda kalacak şekilde seçilmiştir.

Basit ve çok bağılı bölgeler :

İçerisindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün eğriler sürekli deformasyonla bölge dışına taşmadan üstüste getirilebilen bölgeye "**basit bağılı bölge**" adı verilir (Şekil-1b).

Bağılı bölge içerisinde bir veya daha fazla delik (fonksiyonun analitik olmadığı nokta) varsa bu bölgeye "**çok bağılı bölge**" adı verilir ve bağılılık derecesi delik sayısının bir fazlası olarak alınır (Şekil-1c,d).

Bir $f(z)$ fonksiyonunun bir bölge içerisinde analitik olmadığı noktalar sonsuz küçük yarıçaplı dairelerle çevrilerek bölgeden izole edilebilir. Bu şekilde meydana gelen çok bağılı bölge ise delikler "**kesim**" yoluyla bölge sınırlarına birleştirilerek basit bağılı hale dönüştürülebilir (Şekil-1e,f)



Şekil-1: Analitiklik bölgesi, basit ve çok bağılı bölgeler, izolasyon ve kesim işlemleri

Kompleks serinin integralinin hesaplanması

Bir C kapalı eğrisi boyunca hesaplanmak istenen saat ibreleri yönündeki

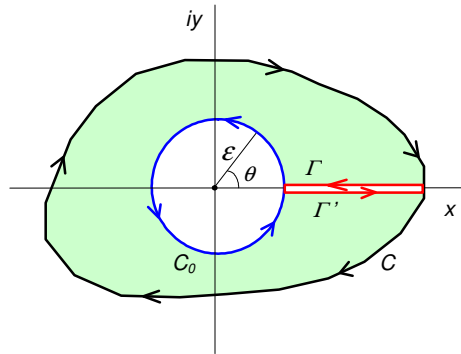
$$I = \oint_C \left[D_{-1}z + D_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} + \dots \right] dz$$

çizgisel integrali daha genel bir ifadeyle

$$I = \sum_{n=-1}^{\infty} \oint_C \frac{D_n}{z^n} dz$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerdeki D_n katsayıları reel veya kompleks birer sabit olup integral dışına çıkartılabilir. $f(z) = 1/z^n$ fonksiyonu ise bütün n değerleri için $z=0$ noktasında tekillik göstermektedir. Bu tekil nokta ε yarıçaplı bir C_0 daresiyle izole edilerek ve bu daire de kesim yoluyla C eğrisine birleştirilerek C eğrisi içerisindeki bölge basit bağlı hale dönüştürülebilir (Şekil-2). $f(z) = 1/z^n$ Fonksiyonu bu bölgenin tamamında ve sınırları üzerinde analitik olup, bölge sınırları boyunca alınacak çizgisel integral için Cauchy-Goursat teoremi gereği

$$\oint_{C+\Gamma+C_0+\Gamma'} \frac{dz}{z^n} = 0$$



Şekil-2: Integral için bölgenin basit bağlı hale getirilmesi

yazılabilir. Burada Γ ve Γ' kesim çizgilerini belirtmekte olup bu çizgiler boyunca alınan integraller birbirine zıt yönlü olduklarından birbirlerini yokederler. Böylece yukarıdaki integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = - \oint_{C_0} \frac{dz}{z^n}$$

şekline gelir. Diğer taraftan C_0 daresi üzerindeki noktalar $z = \varepsilon e^{i\theta}$ şeklinde gösterilir ve bu ifadenin $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ şeklindeki türevi de kullanılırsa yukarıdaki integral

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = - \oint_{C_0} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon^n e^{in\theta}} = - \int_0^{2\pi} i\varepsilon^{1-n} e^{i(1-n)\theta} d\theta = - \frac{i\varepsilon^{1-n}}{i(1-n)} \left[e^{i(1-n)\theta} \right]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} = - \frac{\varepsilon^{1-n}}{(1-n)} e^{i(1-n)\theta_0} \left[e^{i(1-n)2\pi} - e^0 \right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu integralin değerinin $n \neq 1$ için sıfır olacağı ve sadece $n=1$ için bir belirsizlik göstereceği açıktır. Buna göre $n=1$ hali için integral yeniden incelenirse

$$\oint_{C_0} \frac{dz}{z} = - \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = -i \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta = -2\pi i$$

elde edilir. Buna göre başlangıçta ele alınan serinin integralinde sadece $1/z$ terimi sıfırdan farklı sonuç vermekte olup bu integralin değeri

$$I = \oint_C \left[D_{-1}z + D_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} + \dots \right] dz = -2\pi i D_1$$

olmaktadır.

EK 7.2**KARMAN-TREFFTZ PROFİLLERİ****Karman-Trefftz dönüşümü :**

Bölüm 7.1 'de konform dönüşümle ilgili bir örnek incelemede

$$\zeta - \zeta_0 = (z - z_0)^m$$

tipindeki bir fonksiyonun z düzleminin z_0 noktasında kesişen iki eğriyi, aralarındaki açı ζ düzleminde m katı artacak tarzda dönüştüreceği gösterilmişti. Bu dönüşüm daha da genelleştirilerek

$$\zeta - \zeta_0 = F(z_0) \cdot (z - z_0)^m$$

şeklinde yazıldığı takdirde bu fonksiyonun z düzlemindeki herhangi bir şekli $F(z_0)$ çarpanının modülü kadar büyüttüğünü (ve/veya küçülttüğünü) ve argümanı kadar da döndürdüğünü, fakat z_0 noktasının yakın civarında dönüşüm üzerinde $(z - z_0)^m$ çarpanının hakim olduğunu göstermek mümkündür. Yani z_0 noktasında kesişen iki eğri arasındaki açı ζ_0 noktasında m katı daha büyük bir açı haline dönüşür.

Diğer taraftan genel olarak

$$\zeta = z + b^2 / z$$

şeklinde verilen Joukowsky dönüşümünün de $z = \pm b$ noktalarında birer tekillik gösterdiği ve dönüşüm dairesinin bu noktaların herhangi birinden geçmesi halinde ζ düzleminde bu noktanın karşılığı olan noktada bir keskin kenar elde edileceği daha önceki incelemelerde belirtilmişti. Aslında Joukowsky dönüşümünün de yukarıda belirtilen tipten dönüşüm olduğunu göstermek mümkündür. Bu amaçla Joukowsky dönüşümü birer defa

$$\zeta - 2b = \frac{1}{2}(z - b)^2 \quad \text{ve} \quad \zeta + 2b = \frac{1}{2}(z + b)^2$$

şekillerinde yazılır ve bu iki ifade birbiriyle oranlanırsa dönüşüm

$$\frac{\zeta - 2b}{\zeta + 2b} = \left(\frac{z - b}{z + b} \right)^2 \quad (\text{Ek7.2-1})$$

şekline getirilebilir. Bu son ifade $z = b$ noktası ve bunun dönüşüm sonucu karşılığı olan $\zeta = 2b$ noktasının yakın civarında yaklaşık olarak

$$\frac{\zeta - 2b}{4b} \cong \frac{(z - b)^2}{4b^2} \quad \text{veya} \quad \zeta - 2b \cong \frac{1}{b}(z - b)^2$$

şekline getirilebilir. Benzeri şekilde $z = -b$ ve $\zeta = -2b$ noktalarının yakın civarında da

$$\zeta + 2b \cong -\frac{1}{b}(z + b)^2$$

yazılabilir. Bu iki ifade $z = b$ ve $z = -b$ noktalarında kesişen iki eğrinin arasındaki açının Joukowsky dönüşümü sonucu iki katına çıkartıldığını göstermektedir. Nitekim, bu

noktaların herhangi birinden geçen bir daire yayı ikiye katlanarak keskin bir firar kenarını meydana getirmektedir.

Tekil noktadan geçen daire yayı için π olan açının ζ düzleminde 2π olmasının sorumlusunun $(z \pm z_0)^2$ teriminin üssü olduğu ve bu üssün 2 yerine m gibi bir büyüklük olması halinde profil kenarındaki dış açının $m\pi$ kadar olacağını söylemek mümkündür. Buna göre, Joukowski dönüşümünün (Ek7.2-1) ile verilen şekli, üssü değiştirilerek daha genel bir halde

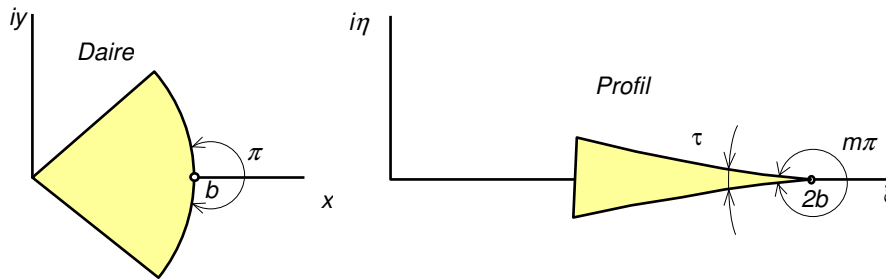
$$\frac{\zeta - mb}{\zeta + mb} = \left(\frac{z - b}{z + b} \right)^m \quad (\text{Ek7.2-2})$$

şeklinde yazılabilir. Böylece m sayısı için uygun değerler seçilerek firar kenarı çok keskin olmayan profiller elde edilebilir. Yukarıdaki dönüşüme Karman-Trefftz dönüşümü adı verilir. Bu dönüşüm ile daireden elde edilen profiller de Karman-Trefftz profilleri olarak adlandırılmaktadırlar.

Karman-Trefftz dönüşümündeki m parametresi daha genel bir ifadeyle

$$m = 2 - \tau / \pi \quad (\text{Ek7.2-3})$$

şeklinde yazıldığı taktirde, bu ifadedeki τ profilin firar kenarındaki iç açığı belirtir (Şekil Ek7.2-1).



Şekil Ek7.2-1 : Karman-Trefftz profilinin firar kenarı iç açığı

Karman-Trefftz profilinin koordinatları ve hız dağılımı:

(Ek7.2-2) ile verilen Karman-Trefftz dönüşümünü daha kolay inceleyebilmek için

$$\zeta = mb \frac{(z + b)^m + (z - b)^m}{(z + b)^m - (z - b)^m} \quad (\text{Ek7.2-4})$$

şeklinde düzenlemek daha uygun olur. Bu ifadenin türevi de

$$\frac{d\zeta}{dz} = 4m^2 b^2 \frac{(z^2 - b^2)^{m-1}}{[(z + b)^m - (z - b)^m]^2} \quad (\text{Ek7.2-5})$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu türev ifadesi sıfıra eşitlenerek Karman-Trefftz dönüşümünün tekil noktalarının da Joukowski dönüşümündeki gibi $z = \pm b$ noktaları olduğu görülür.

Buna göre dönüştürülecek daire $z = \pm b$ noktalarının birinden geçecektir. Dönüşümün pratikteki uygulanış tarzı Joukowski profili için yapılandan farklı değildir :

- z Düzleminde daire üzerindeki noktalar $z = re^{i\theta}$ şeklinde tanımlanır. θ için istenen değerler seçilerek (örneğin, $0 - 2\pi$ aralığında eşit $\Delta\theta$ aralıklarıyla alınabilir) r 'nin değerleri daha önce (7Ek3b) ifadesiyle verildiği gibi

$$\frac{r}{b} = G \sin \theta - F \cos \theta + \sqrt{1 + 2F + (G \sin \theta - F \cos \theta)^2}$$

şeklinde hesaplanır.

- Daire üzerindeki bu noktalara karşılık gelen profil noktalarının koordinatları Karman-Trefftz dönüşümü için verilen (Ek7.2-4) ifadesi reel ve imajiner kısımlarına ayrılarak hesaplanır. Bu amaçla (Ek7.2-4) ifadesinde

$$z + b = z_1 = R_1 e^{i\phi_1}, \quad z - b = z_2 = R_2 e^{i\phi_2}$$

değişken dönüşümleri kullanılarak reel ve imajiner kısımlar sırasıyla

$$\frac{\xi}{b} = m \frac{1 - t^{2m}}{1 + t^{2m} - 2t^m \cos m(\phi_2 - \phi_1)} \quad (\text{Ek7.2-6a})$$

$$\frac{\eta}{b} = m \frac{2t^m \sin m(\phi_2 - \phi_1)}{1 + t^{2m} - 2t^m \cos m(\phi_2 - \phi_1)} \quad (\text{Ek7.2-6b})$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$t = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{Ek7.2-6c})$$

$$\frac{R_1}{b} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{b}\right) \cos \theta} \quad (\text{Ek7.2-6d})$$

$$\frac{R_2}{b} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{b}\right) \cos \theta} \quad (\text{Ek7.2-6e})$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \tan^{-1} \left[\frac{2 \sin \theta}{r/b - b/r} \right] \quad (\text{Ek7.2-6f})$$

dir. Karman-Trefftz profilinin veter uzunluğu

$$c = |\xi|_{\theta=0^\circ} + |\xi|_{\theta=\pi} \quad \rightarrow \quad c = 2mb \frac{(1+F)^m}{(1+F)^m - F^m} \quad (\text{Ek7.2-7})$$

şeklinde bulunabilir. Kalınlık ve kamburluk oranları ise

$$\delta = \frac{\text{Max} \left\{ \sqrt{[\eta(\theta) - \eta(-\theta)]^2 + [\xi(\theta) - \xi(-\theta)]^2} \right\}}{c} \quad (\text{Ek7.2-8a})$$

$$\gamma = \frac{\max \{ [\eta(\theta) - \eta(-\theta)] / 2 \}}{c} \quad (\text{Ek7.2-8a})$$

ifadeleri yardımıyla hesaplanabilir. Yapılan incelemeler Karman-Trefftz profillerinin kalınlık oranlarının daha ziyade F parametresiyle, kamburluk oranının da daha ziyade G parametresiyle ilgili olduğunu göstermektedir. m dönüşüm parametresi ise firar kenarı iç açısını etkilediği gibi maksimum kalınlık noktasının veter boyunca bulunduğu yeri de etkilemektedir. Bu parametreler arasında ayrıca ikinci mertebeden etkileşimler de söz konusudur. İstenilen kalınlık ve kamburluk oranlarına sahip ve maksimum kalınlık noktası konumu veter boyunca istenilen noktada yer alan (veya firar kenarı iç açısı istenilen miktarda olan) bir Karman-Trefftz profili elde etmek için F , G ve m parametrelerinin almaları gereken değerleri iteratif olarak hesaplamak mümkündür[1,2] Karman-Trefftz profilinin hız dağılımı da

$$U_\zeta = U_z \left/ \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \right. \quad (\text{Ek7.2-9a})$$

bağıntısı yardımıyla bulunur. Burada U_z daire düzlemindeki hızın şiddeti olup, değeri

$$U_z = 2 \left| \sin \theta_1 + \sin(\alpha + \beta) \right| \quad (\text{Ek7.2-9b})$$

dir. θ_1 ve β açıları daire düzlemindeki geometri yardımıyla

$$\theta_1 = \theta - \alpha - \sin^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{F^2 + G^2}{(1+F)^2 + G^2}} \cdot \sin \left[\theta + \tan^{-1} \left(\frac{G}{F} \right) \right] \right\} \quad (\text{Ek7.2-9c})$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{G}{1+F} \right) \quad (\text{Ek7.2-9d})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca dönüşümün türevinin mutlak değeri de

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left(\frac{2m}{R_1/b} \right)^2 \frac{t^m}{1 + t^{2m} - 2t^m \cos m(\phi_2 - \phi_1)} \quad (\text{Ek7.2-9e})$$

şeklinde bulunur. Bütün bu bağıntıların $m=2$ halinde Joukowsky profili vereceğini görmek mümkündür.

Karman-Trefftz profiline etkiyen kuvvet ve momentler:

Karman-Trefftz profiline etkiyen kuvvet ve momentlerle ilgili hesap yöntemi daha önce Joukowsky profili için uygulananndan pek farklı değildir. Aradaki tek fark dönüşüm fonsiyonlarının farklılığından kaynaklanmaktadır. Şayet Karman-Trefftz dönüşümü

$$\zeta = z + \frac{m^2 - 1}{3} \frac{b^2}{z} + O \left\{ \frac{1}{z^3} \right\}$$

şeklinde seriye açılarak daha önce Joukowsky profilleri için yapılan incelemeler tekrarlanırsa Joukowsky profilleri için verilen A_i katsayılarının karşılığı olarak Karman-Trefftz profilleri için

$$A_0 = V_\infty^2 e^{-2i\alpha}$$

$$A_1 = \frac{i\Gamma}{\pi} V_\infty e^{-i\alpha}$$

$$A_2 = \frac{2}{3} (m^2 - 1) V_\infty^2 b^2 e^{-i2\alpha} - 2V_\infty^2 a^2 - \frac{i\Gamma V_\infty e^{-i\alpha}}{\pi} (f - ig) - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$$

elde edilir. Bu katsayılar Joukowsky profillerinde olduğu gibi aerodinamik kuvvetler ve yunuslama momenti için verilen genel bağıntılarda kullanılarak kuvvetler için

$$D = 0, \quad L = 4\pi a \rho V_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \quad (\text{Ek7.2-10})$$

ve eksen takımının başlangıç noktası etrafında (yaklaşık veter orta noktası) yunuslama momenti için de

$$M_o = \frac{2}{3} (m^2 - 1) \rho \pi b^2 V_\infty^2 \sin 2\alpha + 4\pi a \rho V_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) (f \cos \alpha - g \sin \alpha) \quad (\text{Ek7.2-11})$$

elde edilir. Kuvvet ve moment katsayıları

$$C_D = 0, \quad C_L = 8\pi \frac{a}{c} \sin(\alpha + \beta) \quad (\text{Ek7.2-12})$$

$$C_{M_o} = \frac{4}{3} (m^2 - 1) \pi \frac{b^2}{c^2} \sin 2\alpha + 8\pi \frac{a}{c} \sin(\alpha + \beta) \left(\frac{f}{c} \cos \alpha - \frac{g}{c} \sin \alpha \right) \quad (\text{Ek7.2-13})$$

olarak elde edilebilir. Hücum kenarı ve çeyrek veter noktası etrafındaki yunuslama katsayıları Joukowsky profilleri için yapılanlara benzer şekilde hesaplanabilir.

Uygulamalar

Karman Trefftz (ve özel olarak $m=2$ halinde Joukowsky) profillerinin koordinat ve hız dağılımları ile taşıma ve yunuslama katsayılarının hesaplanmasına yönelik birer örnek alt program vBasic dili için hazırlanmış olup Tablo Ek7.2-1 de verilmiştir. Okuyucunun bu programı kullanmak için gerekli girdileri sağlayan ve alt programdan gelen bilgilerin çıktılarını kaydeden bir ana program yazması yeterlidir. Bu programı FORTRAN veya başka bir dile aktarmak kolaylıkla mümkündür.

Alt programların girdileri F , G ve m parametrelerinin, istenilen kalınlık ve kamburluk oranlarıyla maksimum kalınlık noktası konumlarına sahip olacak Karman-Trefftz (veya Joukowsky) profili için gerekli değerleri olup bazı örnek profiller için bu değerler Tablo Ek7.2-2 'de sunulmuştur.

Bir örnek olarak kalınlık oranı %12, kamburluk oranı %3 ve maksimum kalınlık noktası konumu %35 olan bir Karman-Trefftz profili için elde edilen sonuçlar Tablo Ek7.2-3 ve Şekil Ek7.2-2 'de görülmektedir.

Kaynaklar

[1] M.A.Yükselen, M.Z. Erim, "A general iterative method to design Karman-Trefftz and Joukowsky airfoils", Int.J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.20, s.1349-1368, 1984.

[2] M.A.Yükselen, "Karman-Trefftz ve Joukowsky profillerinin karakteristikleri", I.T.Ü. Dergisi, Cilt:47 Sayı:4, 1989.

Tablo Ek7.2-1 : Karman-Trefftz profilleri için örnek alt-program (vBasic)

```

Sub KATJO(N1, F, G, m, Chord, AlfaD, x, y, Cu)

  ReDim x(N1), y(N1), Cu(N1)

  ' Parametrelerin hesabı

  N = N1 - 1
  b = Chord / (2 * m) * (1 - (F / (1 + F)) ^ m)
  mb = m * b
  Cbb = Chord / b
  XLE = m * b - Chord
  BetaR = Atn(G / (1 + F))
  A2 = (1 + F) * (1 + F) + G * G
  A = Sqr(A2)
  A1 = Sqr((F * F + G * G) / A2)
  If F > 0 Then AMU = Atn(G / F)

  AlfaR = AlfaD * pi / 180

  ' Sirkulasyon, tasima ve yunuslama katsayılarının hesabı

  GAMMA = 4 * pi * A * b * Sin(AlfaR + BetaR)
  CL = 2 * GAMMA / Chord
  CY = CL * Cos(AlfaR)
  C1 = 4 * (m * m - 1) / 3 / Cbb ^ 2 * pi * Sin(2 * AlfaR)
  C2 = F * Cos(AlfaR) - G * Sin(AlfaR)
  C2 = 8 * pi * A / (Cbb * Cbb) * C2 * Sin(AlfaR + BetaR)
  CMO = C1 + C2
  CMhk = CMO - CY * (Abs(XLE) / Chord)
  CMc4 = CMO - CY * (Abs(XLE) / Chord - 0.25)
  Alfa0 = -BetaR * 180 / pi

  Text_CL = Round(CL, 3)
  Text_CMc4 = Round(CMc4, 3)
  Text_Alfa0 = Round(Alfa0, 2)

  ' profil koordinatları

  NN = N / 2 + 1: If F = 0 Then NN = N / 2
  dTeta = 2 * pi / N

  For i = 2 To NN
    TETA = -(i - 1) * dTeta
    For K = 1 To 2
      SinT = Sin(TETA)
      CosT = Cos(TETA)
      ARG = -F * CosT + G * SinT
      R = ARG + Sqr(1 + 2 * F + ARG * ARG)
      R1 = Sqr(1 + R * R + 2 * R * CosT)
      R2 = Sqr(1 + R * R - 2 * R * CosT)
      T = R2 / R1
      If R < 1 Then
        DFI = Atn(2 * SinT / (R - 1 / R)) - pi
      ElseIf R = 1 Then
        DFI = pi / 2
      Else
        DFI = Atn(2 * SinT / (R - 1 / R))
      End If
      DENOM = 1 + T ^ (2 * m) - 2 * T ^ m * Cos(m * DFI)
      XX = mb * (1 - T ^ (2 * m)) / DENOM
      YY = mb * 2 * T ^ m * Sin(m * DFI) / DENOM
    Next K
  Next i

```

```

'      Profil üzerindeki hız dağılımı

      SinDlt = A1 * Sin(TETA + AMU)
      TanDlt = SinDlt / Sqr(1 - SinDlt ^ 2)
      Dlt = Atn(TanDlt)
      Teta1 = TETA - AlfaR - Dlt
      DET = (2 * m / R1) ^ 2 * T ^ (m - 1) / DENOM
      u = 2 * (Sin(Teta1) + Sin(AlfaR + BetaR)) / DET
      ii = i
      If K = 2 Then ii = N - i + 2
      x(ii) = XX - XLE
      y(ii) = YY
      Cu(ii) = u * u

      TETA = -TETA
    Next K
  Next i
  x(1) = Chord: x(N1) = x(1)
  y(1) = 0:      y(N1) = y(1)
  Cu(1) = 0
  If m = 2 Then Cu(1) = (Cos(AlfaR + BetaR)) ^ 2 / A2
  Cu(N1) = Cu(1)

End Sub

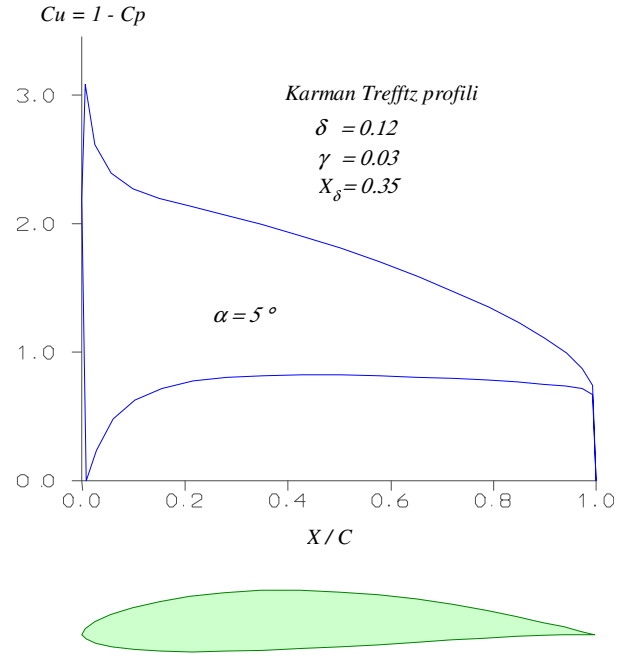
```

Tablo Ek7.2-2: Joukowsky ve Karman-Trefftz profilleri için F,G ve m parametrelerinin değerleri

γ	δ	Karman-Trefftz profilleri ($x/c = 0.40$)			Joukowsky profilleri		
		F	G	m	F	G	m
0.00	0.05	0.01703	0.00000	1.95941	0.04005	0.00000	2
	0.10	0.03462	0.00000	1.91808	0.08354	0.00000	2
	0.15	0.05279	0.00000	1.87614	0.13104	0.00000	2
	0.20	0.07160	0.00000	1.83365	0.18327	0.00000	2
0.05	0.05	0.01688	0.10359	1.95968	0.03989	0.10401	2
	0.10	0.03428	0.10700	1.91861	0.08320	0.10832	2
	0.15	0.05222	0.11025	1.87685	0.13048	0.11304	2
	0.20	0.07141	0.11337	1.83535	0.18245	0.11824	2
0.10	0.05	0.01655	0.20710	1.96066	0.03944	0.20788	2
	0.10	0.03397	0.21390	1.92107	0.08221	0.21644	2
	0.15	0.05135	0.22033	1.88001	0.12885	0.22575	2
	0.20	0.07099	0.22661	1.84047	0.18005	0.23598	2
0.15	0.05	0.01647	0.31051	1.96280	0.03872	0.31161	2
	0.10	0.03345	0.32057	1.92483	0.08065	0.32420	2
	0.15	0.05105	0.33020	1.88629	0.12629	0.33788	2
	0.20	0.06885	0.33935	1.84659	0.17627	0.35284	2

Tablo Ek7.2-3: Örnek uygulama

KARMAN-TREFFTZ Profili			
$\delta=0.12$ $\gamma=0.03$ $x_\delta/c=0.35$			
Hücum açısı = 5°			
I	X/C	Y/C	$C_u=1-C_p$
Cp			
1	1.00000	0.00000	0.00000
2	0.97232	-0.00022	0.71459
3	0.89785	-0.00244	0.75496
4	0.78699	-0.00790	0.78273
5	0.65104	-0.01617	0.80717
6	0.50203	-0.02536	0.82416
7	0.35250	-0.03263	0.82147
8	0.21524	-0.03505	0.77441
9	0.10302	-0.03049	0.62792
10	0.02782	-0.01843	0.23587
11	0.00000	0.00000	2.19403
12	0.02511	0.02467	2.61693
13	0.09825	0.05228	2.27503
14	0.21033	0.07530	2.13729
15	0.34953	0.08732	1.99706
16	0.50203	0.08536	1.81357
17	0.65344	0.07058	1.59121
18	0.79011	0.04787	1.34976
19	0.90004	0.02419	1.10877
20	0.97303	0.00657	0.87302
21	1.00000	0.00000	0.00000
C1 = 1.02233			
Cm(O) = 0.14656			
Cm(HK) = -0.36473			
Cm(C/4) = -0.11012			



Şekil Ek7.2-2 : Karman-Trefftz profilinin basınç dağılımı