TAŞINIM-YAYINIM PROBLEMLERİ İÇİN SHY

Akışkan akışının önemli rol oynadığı problemlerde taşınım etkilerinin hesaba katılması gerekir. *Doğada taşınım sırasında daima yayınım da oluşur*. Bu bakımdan bu bölümde taşınım ve yayınım etkilerini birlikte inceleyecek yöntemler incelenecektir

Daimi-halde transport denklemi $$\nabla(\rho\vec{u}\phi) = \nabla(\Gamma\nabla\phi) + S_\phi$$

Bir kontrol hacmide integral alınıp diverjans teoremi uygulanarak
$$\underbrace{\iint_A (\rho\phi\vec{u})\,\vec{n}dA}_{Taşınımsal\ akı} = \underbrace{\iint_A (\Gamma\nabla\phi)\,\vec{n}dA}_{Yayıayınım\ akı} + \underbrace{\iiint_\upsilon S_\phi d\upsilon}_{Kaynak\ terimi}$$

Buradaki *yayınım* ve *kaynak* terimlerinin ayrıklaştırılması için önceki bölümde iyi çalışan uygulamanın burada da kullanılmasının uygun olacağı aşikar gibidir.

Ancak, yayınım olayı, yayınan bir büyüklüğün her yöndeki değişimleri (gradyant) ile ilgiliyken taşınım olayı sadece akış doğrultusunda etkindir.

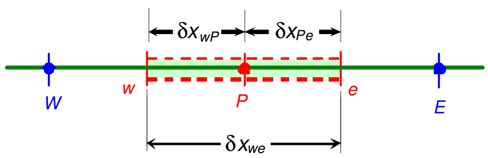
Bu husus *merkezi farklarla kararlı bir taşınım-yayınım hesaplaması* yapılabilmesi için *hücre boyutları üzerinde taşınım ve yayınım şiddetlerinin oranına bağlı bir sınırlama getirir.*

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Kaynak terimi olmaması halinde *u* hızındaki 1-B akımda ϕ özelliğinin daimi haldeki taşınım ve yayınımı
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\rho u\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)}$$

Akımda sürekliliğin de sağlanması gerekir
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\rho u) = 0}$$

Her iki denklem şekildeki kontrol hacmi içerisinde integre edilerek



$$(\rho uA\,\phi)_e - (\rho uA\,\phi)_w = \left(\Gamma A\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma A\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w$$

$$(\rho uA)_e - (\rho uA)_w = 0$$

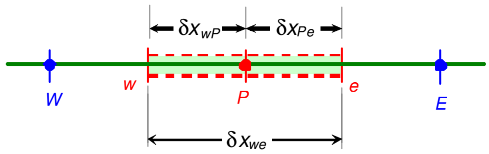
Ayrıklaştırılmış denklemleri elde etmek için bu denklemlerdeki terimlerin yaklaşık ifadelerinin yazılması gereklidir. Bu amaçla şu tanımlamalar faydalı olur:

- birim alan başına *taşınımsal kütle akısı* $F = \rho u$

- hücre yüzlerinden *yayınım iletkenliği* $D = \frac{\Gamma}{\delta x}$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Bu büyüklüklerin hücre duvarlarındaki değerleri



$$F_w = (\rho u)_w\,, \quad F_e = (\rho u)_e$$

$$D_w = \frac{\Gamma}{\delta x_{WP}}\,, \quad D_e = \frac{\Gamma}{\delta x_{PE}}$$

Bu büyüklükler integre edilmiş denklemlerde kullanılarak ve yayınım terimlerinin katkısı merkezi farklarla ayrıklaştırılarak, $A_w = A_e = A$ olmak üzere

$$(\rho u A\phi)_e - (\rho u A\phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \quad \Longrightarrow \quad F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

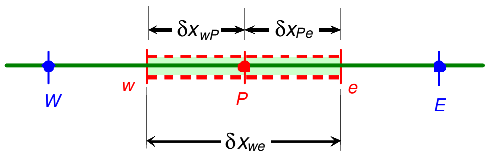
$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_e - F_w = 0$$

Hız alanının bir şekilde bilindiği varsayılmış olup, bu hız alanının hesabı sırasında F_e ve F_w nin değerleri dikkate alınmış olmalıdır. Transport denkleminin çözümü için e ve w hücre yüzlerinde ϕ özelliğini değerlerinin hesaplanmış olması gereklidir. Buna yönelik çeşitli şemalar mevcuttur.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Merkezi fark şeması:

Üniform bir ağ için ϕ özelliğinin hücre yüzlerindeki değerleri



$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2\,, \qquad \phi_w = (\phi_P + \phi_W)/2$$

Transport denkleminde kullanılarak
$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Düzenlenerek
$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2}\right)\right]\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

Veya
$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) + (F_e - F_w)\right]\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

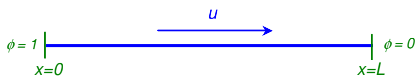
Daha önceki standart düzenlemeye benzer biçimde $\boxed{a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E}$

Burada $\boxed{a_W = D_w + \frac{F_w}{2}\,, \quad a_E = D_e - \frac{F_e}{2}\,, \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)}$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem:

Bir ϕ özelliği şekildeki bir-boyutlu bölgede taşınım ve difüzyon yoluyla nakledilmekte olup sınır şartları x=0 da ϕ_0=1 ve x=L de ϕ_L=0 şeklindedir.



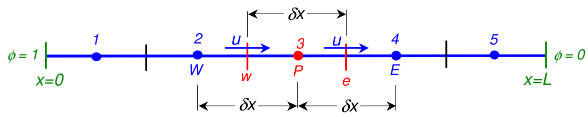
Eşit boyda beş hücre alarak ve taşınım ve yayınım için merkezi fark ayrıklaştırması kullanarak ϕ nin x ile değişimini (i) u=0.1 m/s, (ii) u=2.5 m/s hallerinde hesaplayınız. Elde edilen sonuçları analitik çözümle karşılaştırınız. (iii) u=2.5m/s halindeki çözümü 20 ağ noktası için tekrarlayınız ve analitik çözümle karşılaştırınız.

Hesaplamalarda uzunluk L=1.0m, yoğunluk ρ=1.0kg/m³, Γ=0.1kg/m/s alınacaktır.

Analitik çözüm:

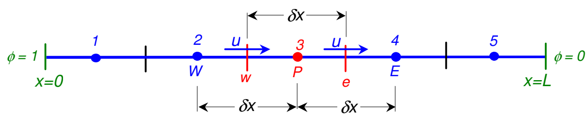
$$\frac{\phi-\phi_0}{\phi_L-\phi_0}=\frac{\exp(\rho u x/\Gamma)-1}{\exp(\rho u L/\Gamma)-1}$$

Çözüm bölgesi, δx=*0.2m* olmak üzere 5 hücreye bölünerek



Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem:



Bütün hücrelerde

F_e=F_w=F=u, D_e=D_w=D=$\Gamma/\delta x$

olup, sınırlar *A* ve *B* ile belirtilecektir.

1 numaralı sınır hücresi için

Doğu yüzünde yayınım ve taşınım akılarının her ikisinde de merkezi fark ayrıklaştırması uygulanabilir.

Hücrenin batı yüzünde ise ϕ büyüklüğünün değeri ϕ_w=ϕ_A=*1* olarak verilmiş olup taşınımsal akı terimi için herhangi bir yaklaşım yapmaya gerek yoktur.

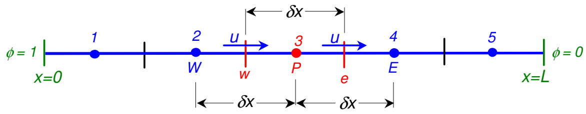
Yayınım terimi ise daha önce olduğu gibi ileri farklarla ayrıklaştırılacaktır.

Buna göre

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P+\phi_E)-F_A\phi_A=D_e(\phi_E-\phi_P)-2D_A(\phi_P-\phi_A)$$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem:



5 numaralı sınır hücresi için

Hücrenin doğu yüzünde $\phi_w=\phi_B=0$ verilmiştir.

Yayınım terimi ise daha önce olduğu gibi geri farklarla ayrıklaştırılacaktır.

Batı yüzünde yayınım ve taşınım akıları için merkezi fark ayrıklaştırması uygulanabilir.

Buna göre $$F_B\phi_B - \frac{F_w}{2}(\phi_P+\phi_W) = 2D_B(\phi_B-\phi_P) - D_w(\phi_P-\phi_W)$$

Sınır hücreler için elde edilen denklemler standart biçimde yeniden düzenlenerek

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u$$

Burada $$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_p$$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem:

Bütün hücreler için katsayılar $D_w=D_e=D_A=D_B=\Gamma/\delta x=D$ ve $F_w=F_e=F_A=F_B=F$ olmak üzere

Nokta	a_W	a_E	S_p	S_u
1	0	D-F/2	-(2D+F)	(2D+F) ϕ_A
2,3,4	D+F/2	D-F/2	0	0
5	D+F/2	0	-(2D-F)	(2D-F) ϕ_B

(i) $u=0.1\ m/s$, $\rho=1.0\ kg/m^3$, $\Gamma=0.1\ kg/m/s$ verilmiş ve $\delta x=0.2m$ için $F=\rho u=0.1$, $D=\Gamma/\delta x=0.5$ olup

Nokta	a_W	a_E	S_p	$a_P=a_W+a_E-S_p$	S_u
1	0	0.45	-1.1	1.55	1.1 ϕ_A
2	0.55	0.45	0	1.0	0
3	0.55	0.45	0	1.0	0
4	0.55	0.45	0	1.0	0
5	0.55	0	-0.9	1.45	0.9 ϕ_B

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem: $\phi_A=1$ ve $\phi_B=0$ olmak üzere denklem takımı ve çözümü

$$\begin{bmatrix} 1.55 & -0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9421 \\ 0.8006 \\ 0.6276 \\ 0.4163 \\ 0.1579 \end{Bmatrix}$$

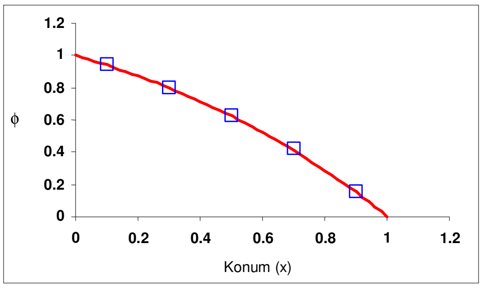
Verilen büyüklüklerle problemin analitik çözümü $\phi(x) = \dfrac{2.7183 - \exp(x)}{1.7183}$

Nokta	Mesafe	FVM	Analitik	Fark	Yüzde hata
1	0.1	0.9421	0.9387	-0.003	-0.36
2	0.2	0.8006	0.7963	-0.004	-0.53
3	0.3	0.6276	0.6224	-0.005	-0.83
4	0.4	0.4163	0.4100	-0.006	-1.53
5	0.5	0.1579	0.1505	-0.007	-4.91

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem:

Ağ yapısının kaba olmasına karşın merkezi fark şeması analitik çözümlerle kabul edilebilir bir uyum göstermiştir



(ii) $u=2.5$ m/s, $\rho=1.0$ kg/m³, $\Gamma=0.1$ kg/m/s verilmiş ve $\delta x= 0.2$m için $F=\rho u=2.5$, $D=\Gamma/\delta x=0.5$ olup katsayılar

Nokta	a_W	a_E	S_p	$a_P=a_W+a_E-S_p$	S_u
1	0	-0.75	-3.5	2.75	$3.5\ \phi_A$
2	1.75	-0.75	0	1	0
3	1.75	-0.75	0	1	0
4	1.75	-0.75	0	1	0
5	1.75	0	1.5	0.25	$-1.5\ \phi_B$

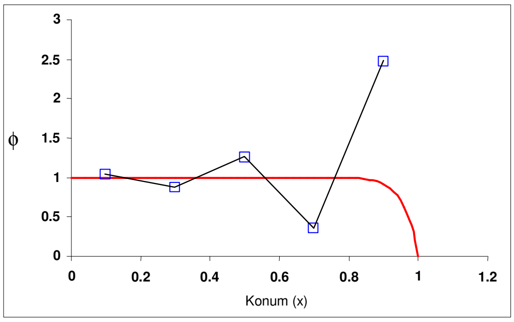
Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem:

Bu haldeki analitik çözüm

$$\phi(x) = 1 + \frac{1-\exp(25x)}{7.20\times 10^{10}}$$

Nokta	Mesafe	FVM	Analitik	Fark	Yüzde hata
1	0.1	1.0356	1.0000	-0.035	-3.56
2	0.3	0.8694	0.9999	0.131	13.05
3	0.5	1.2573	0.9999	-0.257	-25.74
4	0.7	0.3521	0.9994	0.647	64.70
5	0.9	2.4644	0.9179	-1.546	-168.48



Bu kez merkezi fark şeması analitik çözüm etrafında çalkantı gösteren bir çözüm vermiştir.

Bu çalkantılar literatürde genellikle "wiggles" olarak adlandırılır.

$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_p$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem:

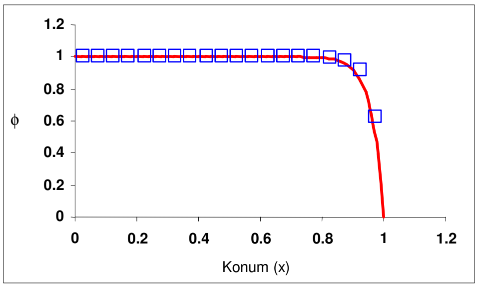
(*iii*) *u=2.5 m/s* halinde *20* nokta için $\delta x=0.05$, $F=\rho u=2.5$, $D=\Gamma/\delta x=0.1/0.05=2.0$ olup

Nokta	a_W	a_E	S	S_p	$a_P=a_W+a_E-S_p$
1	0	0.75	$6.5\ \phi_A$	-6.5	7.25
2-19	3.25	0.75	0	0	4.00
20	3.25	0	$5\ \phi_B$	-1.5	4.75

Şimdi nümerik ve analitik çözümlerin uyumu iyi gözükmektedir.

Bu haldeki verilerle (ii) halindeki veriler karşılaştırıldığında hücre genişliklerinin azalmasıyla *F/D* oranının *5* den *1.25* e indiği görülmektedir.

Merkezi fark şemasının *F/D* oranının küçük değerleri için doğru sonuçlar verdiği görülmektedir.



Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Ayrıklaştırma şemalarının özellikleri :

Hücre sayısının sonsuz büyük olması halinde, kullanılan fark yöntemine bağlı olmaksızın, tam (exact) çözümden ayırt edilemeyen nümerik çözümler elde edilmesi teorik olarak mümkündür.

Ancak pratikte *sonlu* sayıda (bazen çok az sayıda) hücre kullanmak zorunda kalınır. Bu durumda ancak ayrıklaştırma şeması bazı temel hususiyetlere sahipse *nümerik sonuçlar fiziksel olarak gerçekçi* olur.

En önemli hususiyetler şunlardır:

- Korunumsallık (Conservativeness)
- Sınırlılık (Boundedness)
- Nakledilebilirlik (Transportiveness)

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

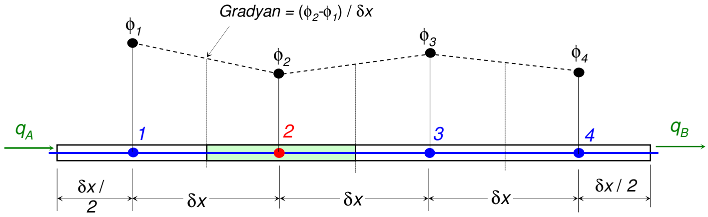
Korunumsallık (Conservativeness):

Sonlu hacim yönteminde taşınım-yayınım denklemi sonlu sayıda hücre içerisinde integre edilerek, taşınan ϕ büyüklüğünün kontrol hacmi yüzlerinden geçen akılarını içeren ayrıklaştırılmış korunum denklemlerinden oluşan bir denklem takımı elde edilmektedir.

ϕ büyüklüğünün *çözüm bölgesinin bütününde korunumunun sağlanabilmesi* için ϕ nin herhangi bir kontrol hacmini bir duvardan terk eden akısının, komşu kontrol hacmine aynı duvardan giren akısına eşit olması gerekir.

Bunun sağlanabilmesi için de *akı*nın herhangi bir genel hücre duvarı için komşu hücre ile uygun biçimde yazılması gerekir

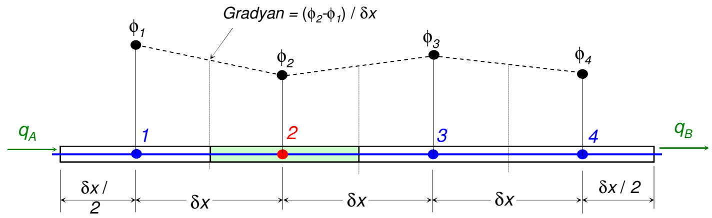
Örnek olarak şekildeki, *kaynak terimi olmayan daimi bir-boyutlu yayınım* problemini ele alalım.



Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Korunumsallık:

Hesap bölgesinin sınırlarından geçen akılar q_A ve q_B ile belirtilmiştir.



Çözüm bölgesini dört hücreye bölerek hücre yüzlerinden geçen yayınımsal akıları hesaplamak için merkezi fark uygulayalım.

Örneğin, 2 noktasını içeren hücrenin batı ve doğu yüzlerinden geçen yayınımsal akılar:

$$\Gamma_{w2}\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{\delta x}\right), \qquad \Gamma_{e2}\left(\frac{\phi_3-\phi_2}{\delta x}\right)$$

Şimdi, 1 ve 4 numaralı sınıra komşu kontrol hacimleri için sınırdan geçen akıları da dikkate alarak bütün kontrol hacimlerine ait net akıları toplamak suretiyle çözüm bölgesinin tamamı için bir akı bilançosu yazılırsa:

$$\left[\Gamma_{e1}\frac{(\phi_2-\phi_1)}{\delta x}-q_A\right]+\left[\Gamma_{e2}\frac{(\phi_3-\phi_2)}{\delta x}-\Gamma_{w2}\frac{(\phi_2-\phi_1)}{\delta x}\right]+\left[\Gamma_{e3}\frac{(\phi_4-\phi_3)}{\delta x}-\Gamma_{w3}\frac{(\phi_3-\phi_2)}{\delta x}\right]+$$
$$\left[q_B-\Gamma_{w4}\frac{(\phi_4-\phi_3)}{\delta x}\right]=q_B-q_A$$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

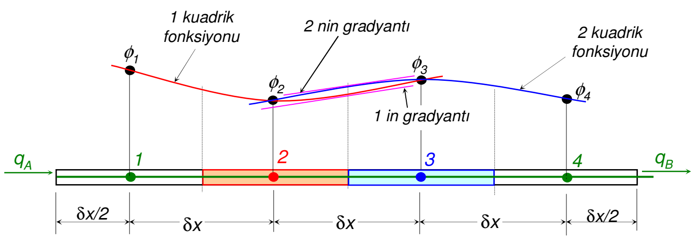
Korunumsallık:

$$\left[\Gamma_{e1}\frac{(\phi_2-\phi_1)}{\delta x}-q_A\right]+\left[\Gamma_{e2}\frac{(\phi_3-\phi_2)}{\delta x}-\Gamma_{w2}\frac{(\phi_2-\phi_1)}{\delta x}\right]+$$
$$\left[\Gamma_{e3}\frac{(\phi_4-\phi_3)}{\delta x}-\Gamma_{w3}\frac{(\phi_3-\phi_2)}{\delta x}\right]+\left[q_B-\Gamma_{w4}\frac{(\phi_4-\phi_3)}{\delta x}\right]=q_B-q_A$$

burada $\Gamma_{e1}=\Gamma_{w2}$, $\Gamma_{e2}=\Gamma_{w3}$ ve $\Gamma_{e3}=\Gamma_{w4}$ olduğundan, bütün bölge üzerinde yapılan toplama sonucunda eş akılar birbirini götürmektedir. Sonuçta sadece iki sınır akısı q_A ve q_B kalmakta olup ϕ özelliğinin bütünsel korunumu sağlanmaktadır.

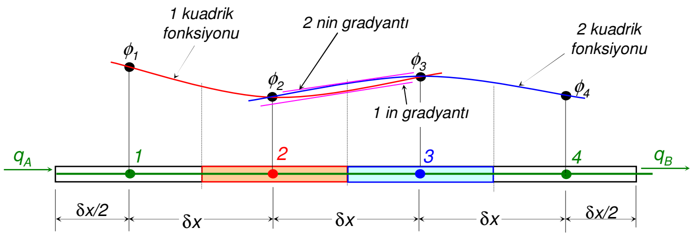
Uygun olmayan interpolasyon formülleri bütünsel akı korunumunu sağlamayan uygunsuz şemalara götürebilir.

Örneğin şekilde gösterilen problemde 2 ve 3 numaralı hücrelerin ortak duvarındaki akı hesabını ele alalım



Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Korunumsallık:



Şayet 2 numaralı hücrenin bu doğu duvarındaki akı için 1,2 ve 3 numaralı kontrol noktalarına dayanan bir parabolik eğri kullanılırken, 3 numaralı hücrenin bu batı duvarında bu defa 2,3 ve 4 numaralı kontrol noktalarına dayanan bir parabolik eğri kullanılırsa, bu iki eğrinin ortak hücre duvarı üzerindeki eğimlerinin aynı olmaması halinde 2 numaralı hücrenin doğu duvarından çıkan akı, 3 numaralı hücrenin batı duvarından giren akı ile aynı olmaz. Bu durumda da bütünsel korunum sağlanamaz

Bu örnek kuadratik interpolasyonun tamamıyla kötü olduğu anlamına gelmez. Nitekim, QUICK adı verilen uygun kuadratik ayrıklaştırma şeması pratikte çok popülerdir.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Sınırlılık (Boundedness):

Her bir kontrol noktasında ayrıklaştırılan denklemler sonuçta çözülmesi gereken bir *lineer denklem takımı* oluşturur.

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u \qquad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_p$$

Büyük denklem takımları için genellikle tahmini bir çözümden başlanarak yakınsamış bir çözüm elde edilinceye kadar tekrarlanan (iteratif) sayısal teknikler uygulanır.

Bir *tekrarlı yöntemin yakınsak olması için yeterli koşul* (Scarborough - 1958)

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a'_p|} \begin{cases} \le 1 & \text{Bütün noktalarda} \\ < 1 & \text{en az bir noktada} \end{cases}$$

Burada a'_p merkezi noktanın net katsayısı (yani, $a_P - S_P$) olup, sayaçtaki toplama bütün komşu noktalar (*nb*) üzerinde alınmaktadır.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Sınırlılık (Boundedness):

Şayet fark şeması yukarıdaki kriteri sağlayan katsayılar verirse ortaya çıkan matris *diyagonali baskın* bir matris olur.

Diyagonali baskın matris elde edebilmek için genel olarak $a'_P = a_P - S_P$ net katsayısının değerinin büyük olması gerekir.

Buna göre kaynak terimlerinin lineerleştirilmesi S_P yi daima negatif işaretli verecek biçimde olmalıdır. Şayet durum bu şekilde ise $-S_P$ daima pozitif işaretli olacak ve a_P ye eklenerek a'_P katsayısının büyümesini sağlayacaktır.

Diyagonalin baskın olması sınırlılık kriterinin sağlanması için istenen bir özelliktir. Bu husus kaynak olmaması halinde ϕ büyüklüğünün iç noktalardaki değerlerinin sınırlardaki değerleri vasıtasıyla sınırlanacağını ifade eder. Buna göre örneğin daimi halde kaynak içermeyen ve sınır sıcaklıkları *500°C* ve *200°C* olan bir ısı iletimi probleminde iç noktalarda *T* sıcaklığının değerleri *500°C* den küçük ve *200°C* den büyük olacaktır.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Sınırlılık (Boundedness):

Sınırlılık için diğer bir temel gerek de, *ayrıklaştırılmış denklemlerin bütün katsayılarının aynı işaretli* (ekseriyetle pozitif) olmasıdır.

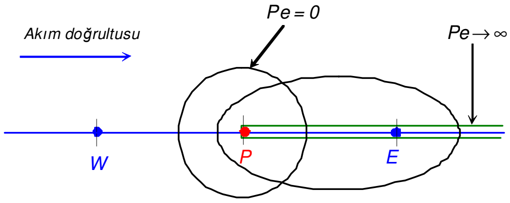
Bunun fiziksel anlamı, bir noktada ϕ değerinde oluşacak artımın komşu noktalardaki değerlerde de bir artış yaratmasıdır.

Şayet ayrıklaştırma şeması sınırlılık gereklerini sağlamazsa çözüm yakınsamayabilir.

Bu husus Örnek problemdeki 2 halinde gösterilmiştir. Bütün diğer örneklerde ayrıklaştırılmış denklemlerin a_P ve a_{nb} katsayıları pozitif işaretli iken 2 halinde doğu katsayılarının çoğu negatif işaretli olup çözümde aşağı yukarı yönde çalkantı şeklinde büyük sapmalar vardır.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Nakledilebilirlik (Transportiveness):



Nakledilebilirlik özelliği şekilde gösterildiği gibi bir *P* noktasında *sabit* bir ϕ *kaynağı* dikkate alınarak izah edilebilir (Roache, 1976).

Boyutsuz hücre *Peclet sayısı* taşınım ve yayınımın şiddetleri oranının ölçüsü olarak tanımlanır:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x}$$

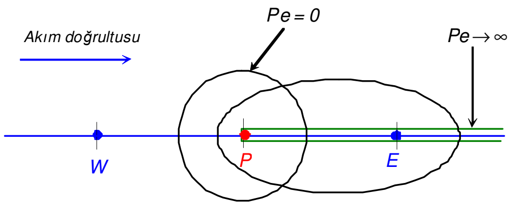
Burada δx (hücre genişliği) karakteristik uzunluktur. Şekildeki çizgiler *Pe* sayısının farklı değerleri için ϕ=sb eğrilerinin (Örneğin ϕ=*1*) genel şeklini göstermektedir.

Akım önünde yer alan bir *P* noktasının akım gerisinde yer alan bir *E* noktasındaki etkisini göstermek için iki uç hali dikkate alalım:

- Taşınım olmadığı sade yayınım hali (*Pe=0*)
- Yayınım olmadığı sade taşınım hali ($Pe \to \infty$)

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Nakledilebilirlik (Transportiveness):



Yalnız yayınım olması halinde (*Pe=0*) akışkan durağandır. Yayınım olayı ϕ özelliğini her doğrultuda eşit miktarda yayacağından sabit ϕ eğrileri *P* eş-merkezli daire çemberleridir.

E doğu noktasındaki şartlar akım önündeki *P* noktasından ve akım-gerisindeki şartlardan etkilenecektir. *Pe sayısı arttığında* eğriler daire çemberinden elipse dönüşür ve şekilde gösterildiği gibi akım doğrultusunda uzar. Böylece *E* noktası *P* deki şartlardan kuvvetli bir şekilde etkilenirken *P* deki şartlar *E* den zayıf bir şekilde etkilenir veya hiç etkilenmez.

Yalnız taşınım olması halinde ($Pe \to \infty$) eliptik eğriler akım doğrultusunda çizgi gibi uzar. *P* den çıkan ϕ özelliğinin tamamı anında geride *E* ye doğru taşınır. Böylece, yayınım olmadığından *E* deki ϕ değeri sadece akım önü şartlarından etkilenir, ϕ_E büyüklüğü ϕ_P ye eşit olur.

Peclet sayısının büyüklüğü ile etkileşimin doğrultusu arasındaki ilişki çok önemlidir ve "*nakledilebilirlik*" olarak nitelendirilir.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Merkezi ayrıklaştırma şemasının değerlendirmesi:

Korunumsallık

Merkezi fark şeması kontrol hacmi yüzlerinde taşınımsal ve yayınımsal akıların hesabı için uygun ifadeler kullanmaktadır. Bu bakımdan şema korunumsaldır.

Sınırlılık

Merkezi farklarla ayrıklaştırılmış transport denkleminin iç noktalardaki katsayıları

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}, \quad a_E = D_e - \frac{F_e}{2}, \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Süreklik gereği $F_e - F_w = 0 \Longrightarrow a_P = a_W + a_E$ Scarborough kriteri sağlanmaktadır

$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$ olup taşınımın doğu katsayısına olan katkısı negatiftir.

Taşınım fazla baskın olursa a_E negatif olabilir. $a_E > 0$ olması için:

F_w>0, F_e>0 (yani akım tek yönlü) olmak üzere $\boxed{\frac{F_e}{D_e} = Pe_e < 2}$ olmalıdır.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Merkezi ayrıklaştırma şemasının değerlendirmesi:

Şayet $Pe_e > 2$ ise doğu katsayısı negatif olacaktır. Bu durum sınırlılık gereklerinden birini ihlal eder ve fiziksel bakımdan imkansız çözümler verebilir

Örnek problemde (*ii*) ile belirtilen *Pe=5* halinde bu koşul ihlal edilmiştir. Bunun sonucu olarak çözümde büyük sapmalar (wiggles) görülmüştür. *Pe < 2* olan (*i*) ve (*iii*) hallerinde ise analitik çözümlere yakın ve sınırlı yanıtlar elde edilmiştir.

Nakledilebilirlik

Merkezi fark şeması, *P* noktasında taşınımsal ve yayınımsal akıların hesaplanmasında çevresindeki bütün doğrultulardan etki alır. Dolayısıyla bu şema akımın yönünü veya taşınımın yayınıma kıyasla şiddetini fark etmez. Bu bakımdan *yüksek Pe sayılarında nakledilebilirlik özelliğine sahip değildir*.

Doğruluk

Merkezi ayrıklaştırma şemasında *Taylor serisindeki kesme hatası ikinci mertebeden*dir. Merkezi fark şemasında katsayıların pozitif olması gereksinimi sadece *Pe=F/D<2* olması halinde şemanın kararlı ve doğru olacağını gösterir.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Merkezi ayrıklaştırma şemasının değerlendirmesi:

Hücre Peclet sayısı $\boxed{Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x}}$ $\left\{ \begin{array}{ll} \rho \text{ ve } \Gamma & \text{akışkan özelliklerine,} \\ u & \text{akım özelliğine,} \\ \delta x & \text{ağ özelliğine} \end{array} \right\}$ bağlıdır.

Buna göre ρ ve Γ nın verilmiş değerleri için $\boxed{F_e / D_e = Pe_e < 2}$ koşulunun sağlanması sadece *hızın küçük olması* halinde (dolayısıyla *yayınımın baskın olduğu* küçük Reynolds sayılı akımlarda) ya da ağ genişliğinin küçük olması halinde mümkündür.

Sonuç

Bu kısıtlamalara göre *merkezi fark ayrıklaştırması genel amaçlı akım hesaplamaları için uygun bir ayrıklaştırma yöntemi değildir*.

Buna göre daha uygun özelliklere sahip ayrıklaştırma şemalarına ihtiyaç vardır.

Bu çerçevede, izleyen paragraflarda sırasıyla *upwind*, *hibrid*, *kuvvet-kanunu* ve *QUICK* şemaları incelenecektir.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Upwind ayrıklaştırma şeması :

Merkezi farkla ayrıklaştırma şemasının en uygun olmayan yönlerinden birisi akım yönünü ayırt edememesidir

Merkezi fark ayrıklaştırılmasında ϕ özelliğinin hücrenin batı duvarındaki ϕ_w değeri komşu hesap noktaları *W* ve *P* deki ϕ_W ve ϕ_P değerlerinin her ikisinden de etkilenmektedir.

Taşınımın soldan sağa doğru ve kuvvetli olduğu bir akımda ise hücrenin batı duvarı *P* noktasına kıyasla *W* noktasından daha kuvvetle etkileneceğinden yukarıdaki durum doğru değildir.

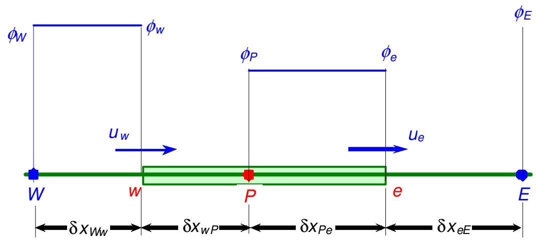
"*Upwind*" veya "*verici hücre*" ayrıklaştırma şeması bir hücre duvarında hesap yaparken akımın yönünü dikkate alır.

Bunun için ϕ nin bir hücre duvarındaki taşınan değeri akım-önü noktasındaki değerine eşit alınır.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Upwind ayrıklaştırma şeması :

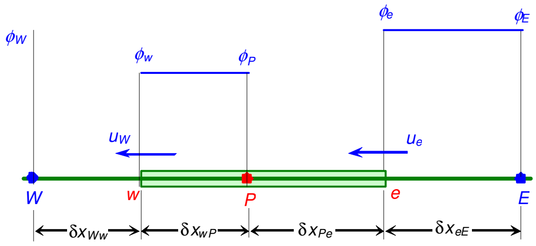
Hücre duvarlarındaki değerleri hesaplamak için hangi kontrol noktasındaki değerlerin alınacağı yandaki şekillerde görülmektedir.



Buna göre akım *pozitif yönde* (batıdan doğuya) iken üstteki şekilde olduğu gibi

$\phi_w = \phi_W$ ve $\phi_e = \phi_P$

ve *negatif yönde* iken alttaki şekil de olduğu gibi



$\phi_w = \phi_P$ ve $\phi_e = \phi_E$

alınacaktır.

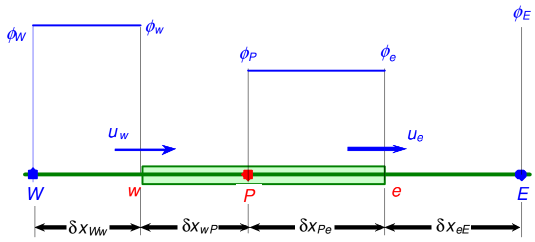
Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Upwind ayrıklaştırma şeması :

Akım pozitif yönde iken

$u_w > 0, \quad u_e > 0 \quad (F_w > 0, \quad F_e > 0)$

$\phi_w = \phi_W, \quad \phi_e = \phi_P$



Ayrıklaştırılmış transport denkleminde kullanılarak

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \Longrightarrow F_e\phi_P - F_w\phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Düzenlenerek $$(D_w + D_e + F_e)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E$$

Veya $$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)]\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E$$

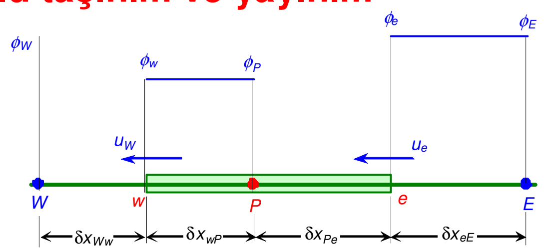
Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Upwind ayrıklaştırma şeması :

Akım negatif yönde iken

$u_w < 0, \quad u_e < 0 \quad (F_w < 0, \quad F_e < 0)$

$\phi_w = \phi_P, \quad \phi_e = \phi_E$



Ayrıklaştırılmış transport denkleminde kullanılarak

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \Longrightarrow F_e\phi_E - F_w\phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Düzenlenerek $\quad [D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)]\phi_P = D_w\phi_W + (D_e - F_e)\phi_E$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Upwind ayrıklaştırma şeması :

Alışılageldik standart biçimde bir düzenleme yapılarak denklemler aşağıdaki şekle sokulabilir:

$$\boxed{a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E}$$

$$\boxed{a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)}$$

	a_W	a_E
$F_w>0, F_e>0$	D_w+F_w	D_e
$F_w<0, F_e<0$	D_w	D_e-F_e

Upwind ayrıklaştırma şemasında komşu katsayılar için her iki akım yönünü de içerecek biçimde bir formülasyon uygulamak mümkündür:

a_W	a_E
D_w+max(F_w,0)	D_e+max(0,-F_e)

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem :

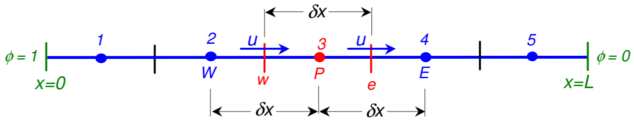
Önceki örnek problemi upwind ayrıklaştırma şeması ve 5 hücre kullanarak (i) u=0.1 m/s, (ii) u=2.5 m/s halinde çözünüz

Bu örnekte bütün hücreler için

$F = F_e = F_w = \rho u$

$D = D_e = D_w = \Gamma/\delta x$

alınacaktır.



1 numaralı sınır hücresinde $F_e\phi_P - F_A\phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A)$

5 numaralı sınır hücresinde $F_B\phi_P - F_w\phi_W = D_B(\phi_B - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$

Sınır noktalarında $D_A=D_B=2\Gamma/\delta x=2D$ ve $F_A=F_B=F$ olup bu iki denklem standart biçimde düzenlenirse

$\boxed{a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u}$ Burada $\boxed{a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P}$

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem :

$\boxed{a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u}$

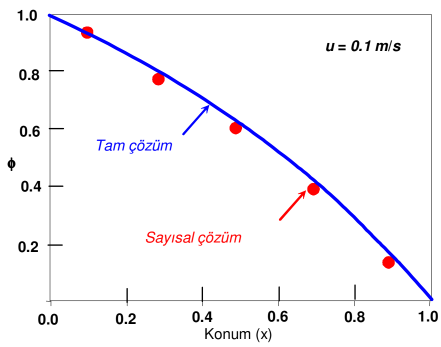
$\boxed{a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P}$

Nokta	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	D	-(2D+F)	$(2D+F)\phi_A$
2,3,4	D+F	D	0	0
5	D+F	0	-2D	$2D\phi_B$

(i) u=0.1 m/s için çözüm:

Bu halde $F=\rho u=0.1$, $D=\Gamma/\delta x=0.5$, $Pe=\Gamma/D=0.2$

Nokta	Mesafe	Sonlu hacim çözümü	Analitik çözüm	Fark	Hata yüzdesi
1	0.1	0.9337	0.9387	0.005	0.53
2	0.3	0.7879	0.7963	0.008	1.05
3	0.5	0.6130	0.6224	0.009	1.51
4	0.7	0.4031	0.4100	0.007	1.68
5	0.9	0.1512	0.1505	-0.001	-0.02



Upwind ayrıklaştırma şemasının bu *hücre Peclec sayısı* için iyi sonuçlar verdiği görülmektedir

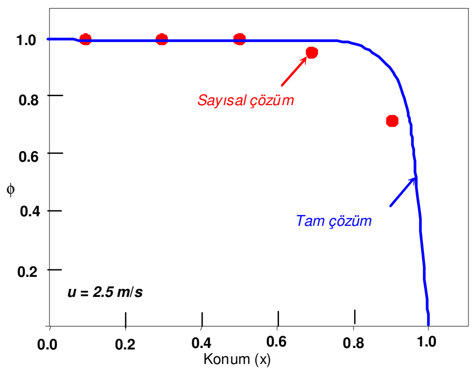
Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Örnek problem :

(i) *u=2.5 m/s için çözüm:*

Bu halde $F=\rho u=2.5$, $D=\Gamma/\delta x=0.5$, $Pe=\Gamma/D=5$

Nokta	Mesafe	Sonlu hacim çözümü	Analitik çözüm	Fark	Hata yüzdesi
1	0.1	0.9998	0.9999	0.0001	0.00
2	0.3	0.9987	0.9999	0.001	0.01
3	0.5	0.9921	0.9999	0.007	0.70
4	0.7	0.9524	0.9994	0.047	4.70
5	0.9	0.7143	0.8946	0.180	20.15



Bu ikinci uygulamada *upwind şemasının* aynı ağ genişliği için *merkezi fark şemasına* göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Bununla birlikte *B sınırı yakınındaki* çözüm analitik çözüme yeterince yakın değildir.

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Upwind ayrıklaştırma şemasının değerlendirmesi :

Korunumsallık:

Upwind ayrıklaştırma şeması hücre duvarlarını geçen akıların hesabı için uygun bağıntılar kullanmakta olup, formülasyonun korunumsal olduğu kolaylıkla gösterilebilir

Sınırlılık:

Ayrıklaştırılmış denklemin katsayıları hep pozitif olup sınırlılık koşulunu sağlamaktadır. Akım süreklilik denklemini sağladığında *aP* katsayısı içindeki $(F_e\text{-}F_w)$ terimi sıfır olur. Böylece $a_P=a_W+a_E$ elde edilir ki bu da tekrarlı çözümlerde kararlılık için istenilen bir durumdur.

Bütün katsayılar pozitif işaretli olunca katsayılar matrisinin diyagonali baskın olur ki böylece çözümde bir "wiggles" oluşmaz

Nakledilebilirlik

Şema akımın yönünü dikkate aldığından nakledilebilirlik sağlanmaktadır

Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım

Upwind ayrıklaştırma şemasının değerlendirmesi :

Doğruluk:

Şema geri farkla ayrıklaştırma formülasyonuna dayanmakta olup hassasiyeti Taylor seri açılımının kesme hataları bakımından sadece birinci derecedendir.

Basitliği nedeniyle upwind ayrıklaştırma şeması ilk CFD hesaplamalarında geniş şekilde kullanılmıştır. Çok-boyutlu problemlerde, upwind stratejisi her bir eksen doğrultusunda tekrarlanarak kolaylıkla uygulanabilir

Şemanın önemli bir zaafı akımın ağ çizgilerine uymaması halinde hatalı sonuçlar vermesidir. Bu gibi problemlerde upwind ayrıklaştırma şeması taşınan özelliğin dağılımında bir bozukluğa neden olur. Ortaya çıkan hata yayınım benzeri bir görüntüde olup "*yapay yayınım*" olarak adlandırılır.