

SONLU KANAT ÜZERİNDEKİ SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

Sonlu bir kanadın aerodinamik karakteristikleri, bu kanadın profillerinin özelliklerinden neden farklıdır?

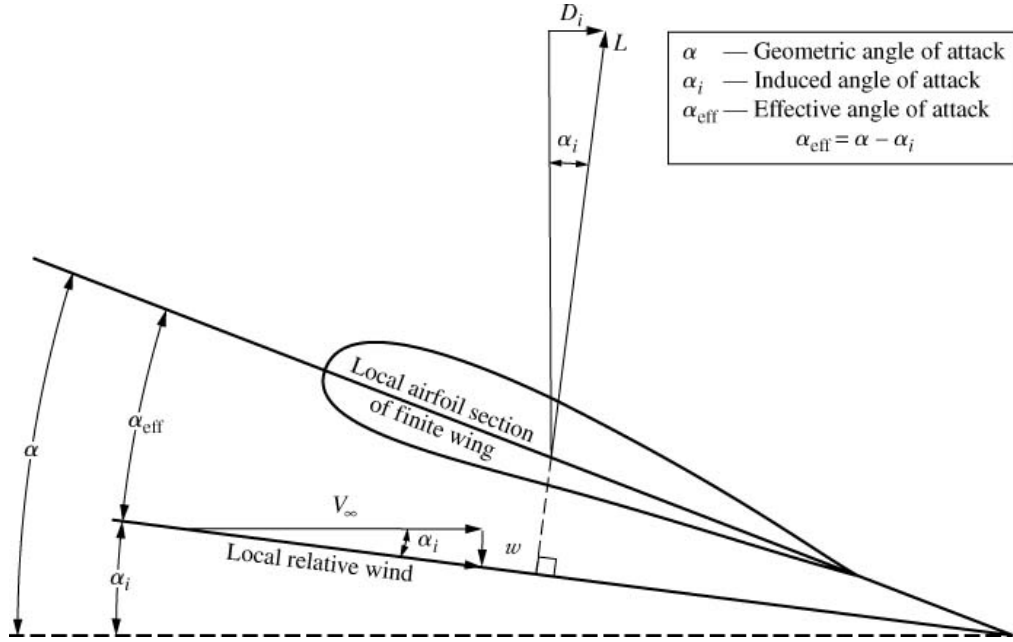
Bunun nedeni profil etrafındaki akışın iki boyutlu olması, kanadın ise üç boyutlu bir yapı olması nedeniyle üzerindeki akışın üç boyutlu olması yani kanat açıklığı yönünde bir akış bileşeninin ortaya çıkmasıdır.

Kanat üzerinde taşıma yaratan fiziksel mekanizma alt yüzeyindeki yüksek basınç ile üst yüzeyindeki düşük basınç ve bu farkın yarattığı dengesizliktir.

Bu dengesizlik aynı zamanda kanat ucu civarında akımın alt yüzeyden üst yüzeye doğru kıvrılmasına yol açar.

Kanat ucu girdapları kanat üzerinde aşağıya doğru yönelmiş bir hız bileşenine neden olurlar. Bu bileşene *sağanak* denir, w ile gösterilir.

Sağanak ve serbest akım hızının birleşimi, kanadın her profilinde yerel akım hızını aşağıya doğru saptıracak bir etki oluşturur.



Yerel kanat profili tarafından görülen hücum açısı veterle yerel göreceli hız arasındaki açıdır. Buna *etkin* hücum açısı α_{eff} denir. Bu açı geometrik hücum açısı α 'dan küçüktür.

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

Yerel taşıma vektörü yerel göreceli hıza dik olduğu için düşey doğrultuya göre α_i açısındadır ve bu nedenle V_∞ yönünde bir bileşeni ortaya çıkar. Buna *indüklenmiş sürüklenme*, D_i denir.

SONLU KANATTA NOTASYON

İnce kanat profili gibi iki boyutlu cisimlerde birim açıklık başına:

L' taşıma kuvveti, c_l taşıma katsayısı
 D' sürüklenme kuv., c_d sürüklenme katsayısı
 M' moment, c_m moment katsayısını

göstermekteydi.

Sonlu kanat gibi üç boyutlu cisimlerde:

L taşıma kuvveti, C_L taşıma katsayısı
 D sürüklenme kuv., C_D sürüklenme katsayısı
 M moment, C_M moment katsayısını

göstermektedir.

Sesaltı akışta gerçek durumda sonlu bir kanadın toplam sürüklenmesi:

İndüklenmiş Sürüklenme + Sürtünme
Sürüklenmesi + Basınç Sürüklenmesi

$$D_{\text{top}} = D_i + D_f + D_p$$

$$D_f + D_p = \text{Profil Sürüklenmesi, } c_d$$

$$c_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S}$$

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} \quad \text{İndüklenmiş sürüklenme katsayısı}$$

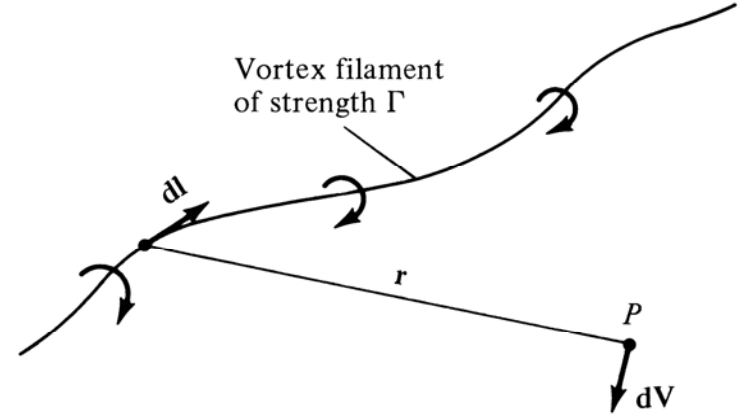
Toplam sürüklenme katsayısı:

$$C_D = c_d + C_{D,i}$$

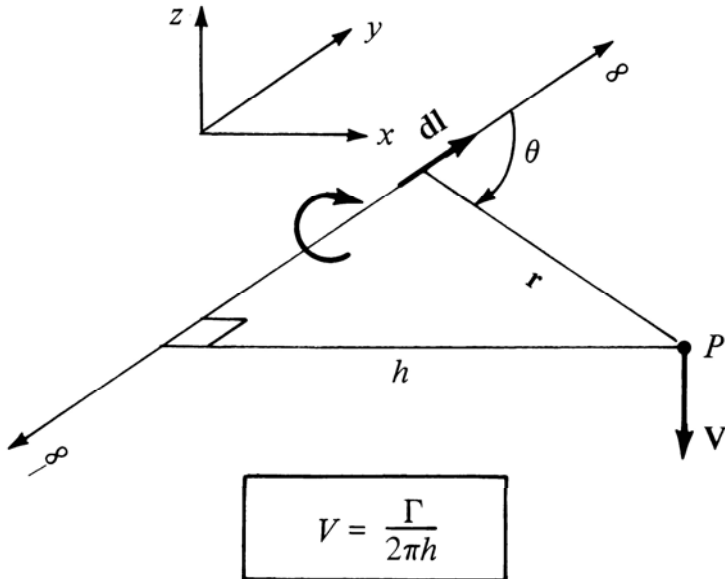
GİRDAP FLAMANI, BIOT SAVART YASASI VE HELMHOLTZ TEOREMLERİ

Genel eğrisel bir girdap flamanı tarafından bir P noktasında indüklenen hız:

$$d\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{Biot-Savart yasası}$$



Biot-Savart yasasını düz bir girdap flamanına uygulayalım:



$$\mathbf{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$r = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$l = \frac{h}{\tan \theta}$$

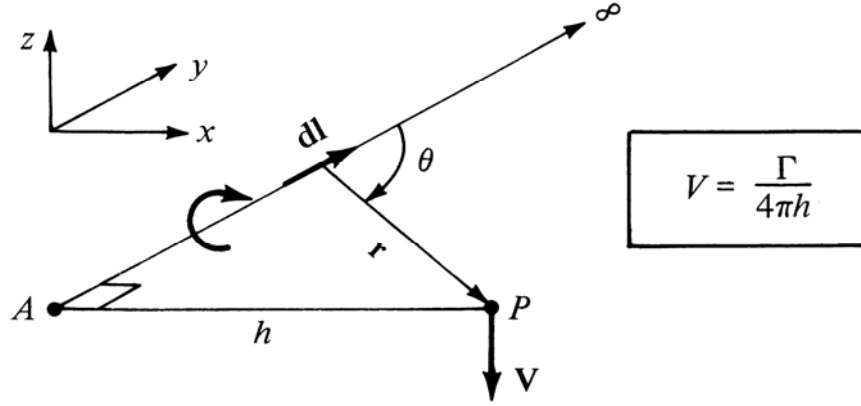
$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

$$dl = -\frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = -\frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta$$

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}$$

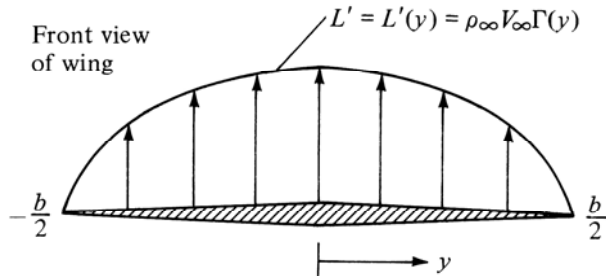
Yarı sonsuz girdap flamanı için:



Helmholtz Girdap Teoremleri:

1. Bir girdap flamanının şiddeti uzunluğu boyunca sabittir.
2. Bir girdap flamanı akışkan içinde bitmez, ya akışkanın sınırlarına kadar uzanmalı ($\pm\infty$ olabilir) ya da kapalı bir yol oluşturmalıdır.

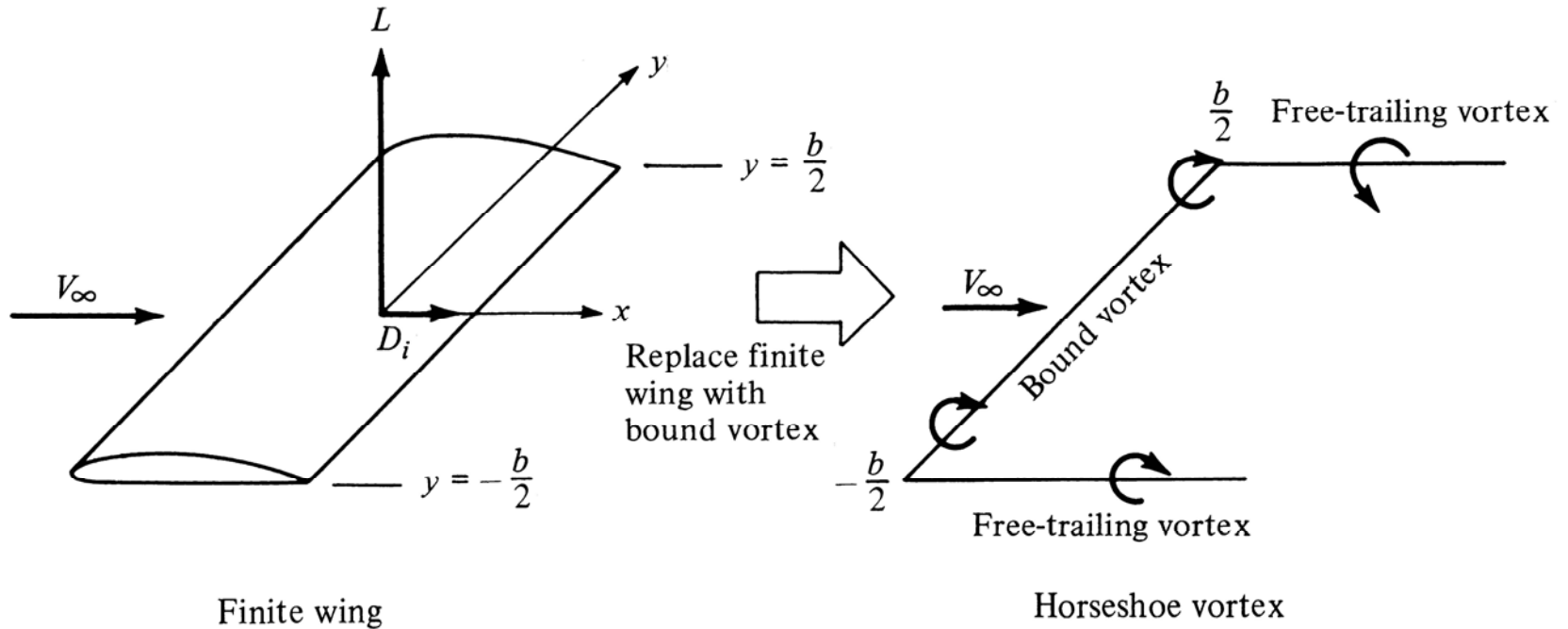
Bu teoremleri daha sonraki bölümlerde kullanacağız.



Sonlu bir kanattaki taşıma dağılımı

PRANDTL'IN KLASİK TAŞIMA-ÇİZGİSİ TEORİSİ:

Sonlu bir kanat, bağlı girdap denilen, akış içinde sabit bir noktada bulunan Γ şiddetindeki bir girdap flamanı ve bunun uçlarından akım aşağısına devam eden uç girdapları ile modellenebilir. Buna *atnalı girdabı* denir.

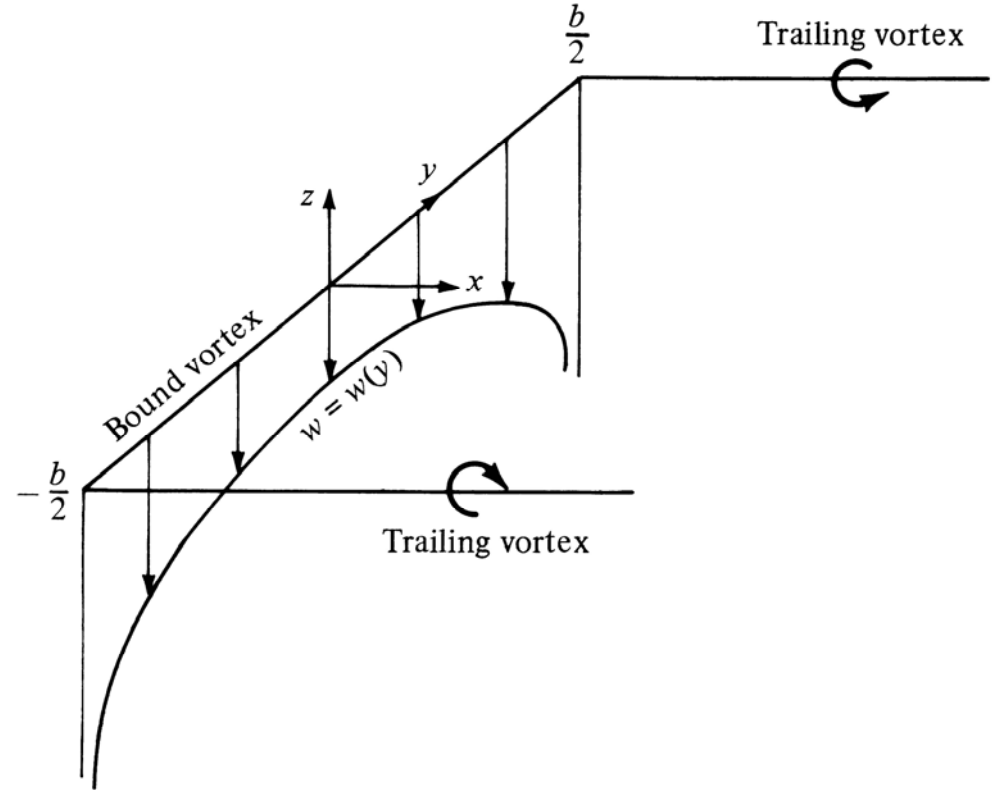


Tek bir atnalı girdap sisteminin uç girdapları tarafından indüklediği sağanak hız dağılımı:

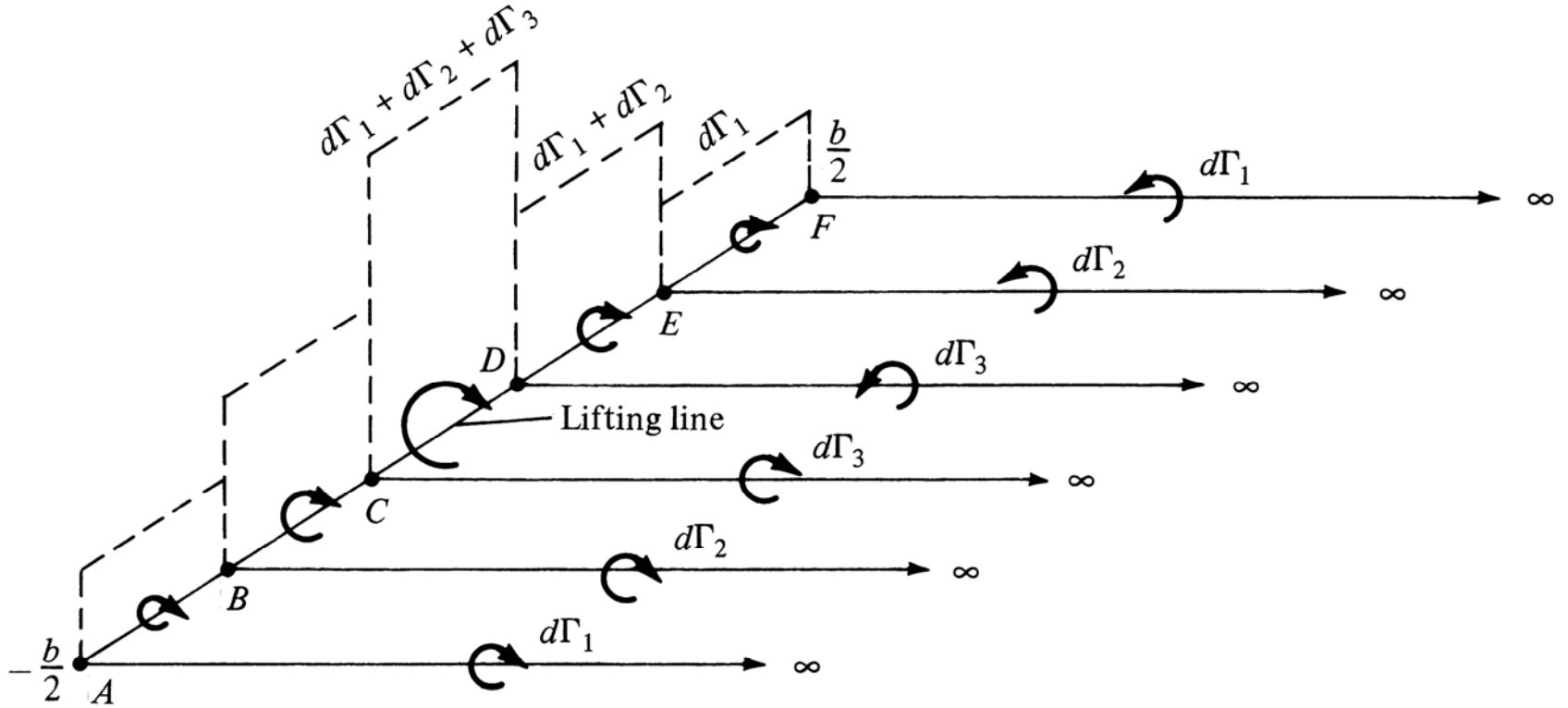
$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi (b/2 + y)} - \frac{\Gamma}{4\pi (b/2 - y)}$$

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{(b/2)^2 - y^2}$$

Sağanak hızının kanat ucunda sonsuza giden değeri doğru değil!

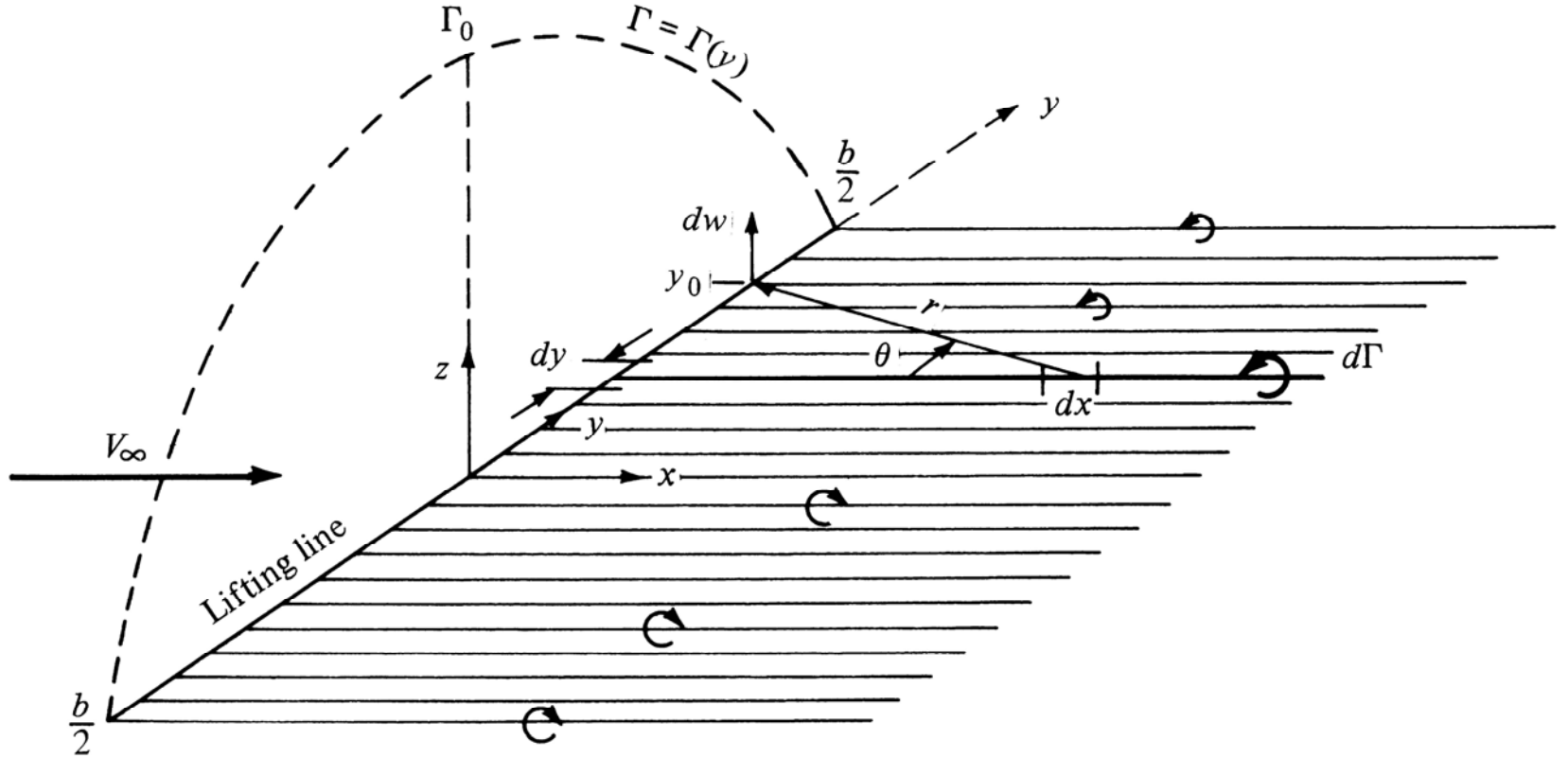


Bunu düzeltmek için bir tek atnalı girdap yerine, her birinin farklı uzunlukta bağlı girdabı olan ancak tüm bağlı girdapların aynı çizgi üzerinde olduğu çok sayıda atnalı girdap kullanalım. Bu çizgiye *taşıma çizgisi* denir.



Sonlu sayıda atnalı girdabı yerinde sonsuz sayıda atnalı girdabı alırsak uç girdapları bir *sürekli girdap caddesi* oluştururlar.

Ortaya çıkan taşıma çizgisinden sonsuz küçük bir dy çizgi parçası alalım.



dy parçası üzerinde dolaşımın değişimi $d\Gamma = (d\Gamma/dy)dy$.

y 'deki yarı sonsuz uç girdabının y_0 'da indüklediği dw hızı Biot-Savart yasasına göre yazılabilir:

$$dw = -\frac{(d\Gamma / dy) dy}{4\pi (y_0 - y)}$$

Tüm girdap caddesi tarafından y_0 'da indüklenen hız:

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma / dy) dy}{y_0 - y}$$

Verilen bir sonlu kanat için $\Gamma(y)$ 'i ve buna karşılık gelen toplam taşıma ve indüklenmiş sürüklemeyi hesaplamak istiyoruz.

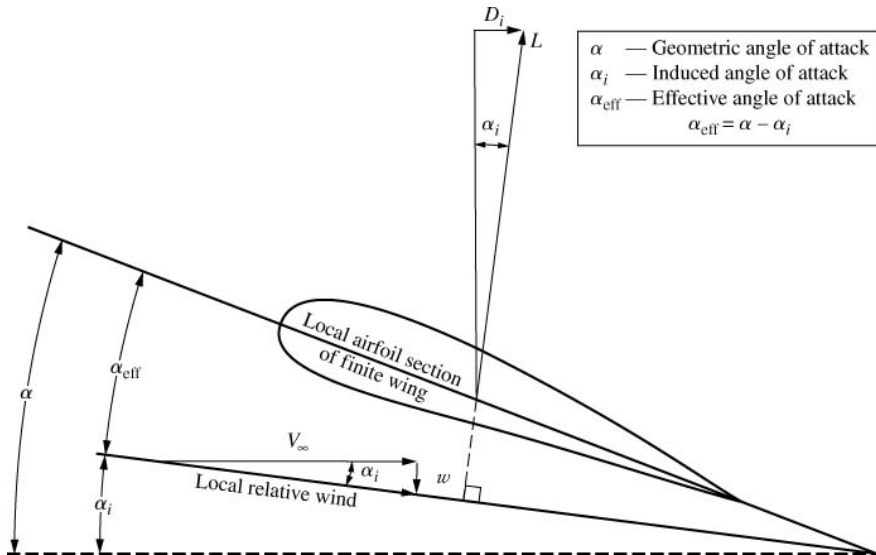
Herhangi bir y_0 açıklık değerindeki profil kesitini düşünelim:

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1} \left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty} \right)$$

Genelde $w \ll V_\infty, \Rightarrow \alpha_i$ küçüktür

$$\alpha_i(y_0) = \frac{-w(y_0)}{V_\infty}$$

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma / dy) dy}{y_0 - y}$$



Etkin hücum açısını düşünürsek $\alpha_{\text{eff}} = \alpha_{\text{eff}}(y_0)$.

Kanat profili için taşıma katsayısı önceki konuda bulunmuştu:

$$c_l = a_0 [\alpha_{\text{eff}}(y_0) - \alpha_{L=0}] = 2\pi [\alpha_{\text{eff}}(y_0) - \alpha_{L=0}]$$

Kutta-Joukowski teoreminden:

$$L' = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c(y_0) c_l = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma(y_0)$$

$$c_l = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_{\infty} c(y_0)}$$

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_{\infty} c(y_0)} + \alpha_{L=0}$$

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i \quad \alpha = \alpha_{\text{eff}} + \alpha_i$$

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_{\infty} c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma / dy) dy}{y_0 - y}$$

Prandtl'in taşıma çizgisi
teorisinin temel denklemi

Yukarıdaki temel denklemin çözülmesiyle elde edilecek olan $\Gamma = \Gamma(y)$ çözümü bize sonlu bir kanadın üç temel aerodinamik karakteristiğini aşağıdaki şekilde verir.

1. Taşıma dağılımı Kutta-Joukowski teoreminden elde edilir:

$$L'(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$$

2. Toplam taşıma yukarıdaki denklemin açıklık boyunca entegrasyonu ile elde edilir:

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy$$

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

Taşıma katsayısı: $C_L = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$

3. İndüklenmiş sürüklenme geometriden:

$$D'_i = L'_i \sin \alpha_i \quad \alpha_i \text{ küçük olduğundan} \quad D'_i = L'_i \alpha_i$$

Toplam indüklenmiş sürüklenme yukarıdaki denklemin açıklık boyunca entegrasyonu ile elde edilir.

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) \alpha_i(y) dy$$

$$D_i = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

Sonuç olarak sonlu kanadın aerodinamik karakteristikleri temel denklemin çözülmesiyle elde edilecek olan $\Gamma = \Gamma(y)$ ile bulunacaktır.

Genel çözümü incelemeden önce eliptik taşıma dağılımı ile verilen özel bir hali inceleyelim.

ELİPTİK TAŞIMA DAĞILIMI

Sirkülasyon dağılımı şu şekilde verilsin:

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

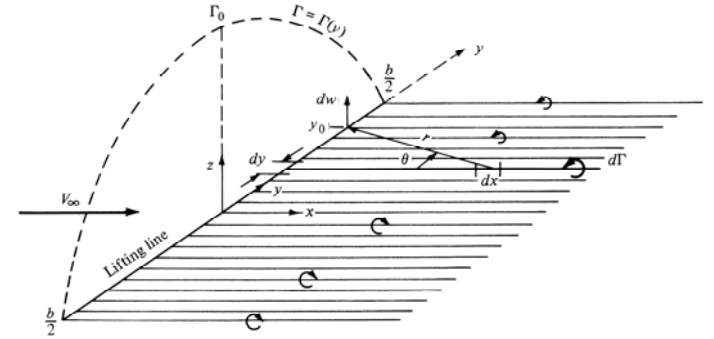
1. Başlangıçtaki sirkülasyon değeri Γ_0
2. Sirkülasyon dağılımı açıklık boyunca eliptik.

$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad \text{Eliptik Taşıma Dağılımı}$$

3. $\Gamma(b/2) = \Gamma(-b/2) = 0$ (Taşıma kanat uçlarında sıfıra gidiyor)

Burada henüz temel denklemin çözümünü elde etmedik, sadece taşıma dağılımının eliptik olduğunu söylüyoruz. Böyle bir dağılım ile aerodinamik karakteristikler ne olur?



Sağanak: Verilen sirkülasyon dağılımının türevini alıp $w(y_0)$ denkleminde yerine koyalım

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{(1-4y^2/b^2)^{1/2}} \quad w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{y_0 - y}$$

$$w(y_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{(1-4y^2/b^2)^{1/2} (y_0 - y)} dy$$

Değişken dönüşümü:

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta \quad dy = -\frac{b}{2} \sin \theta d\theta$$

$$w(\theta_0) = \frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_{\pi}^0 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \quad \text{olduğuna göre } n = 1 \text{ için}$$

$$\boxed{w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}}$$

Eliptik taşıma dağılımında sağanak kanat açıklığı boyunca sabittir.

İndüklenmiş hücum açısı:

$$\alpha_i = \frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2 b V_\infty}$$

Bu ifadenin bu haliyle kullanılışı zordur. Daha kullanışlı bir şeklini şöyle elde edebiliriz.

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{1/2} dy \quad \text{Değişken dönüşümü:} \quad y = \frac{b}{2} \cos \theta$$

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi$$

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{\rho_\infty V_\infty b \pi} \quad L = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 SC_L \quad \Gamma_0 = \frac{2V_\infty SC_L}{b \pi}$$

Bu sonucu yukarıdaki α_i ifadesinde yerine koyarsak

$$\alpha_i = \frac{2V_\infty SC_L}{b \pi} \frac{1}{2 b V_\infty}$$

$$AR = \frac{b^2}{S} \quad \text{Açıklık Oranı}$$

$$\boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}}$$

$$\alpha_i = \frac{SC_L}{\pi b^2}$$

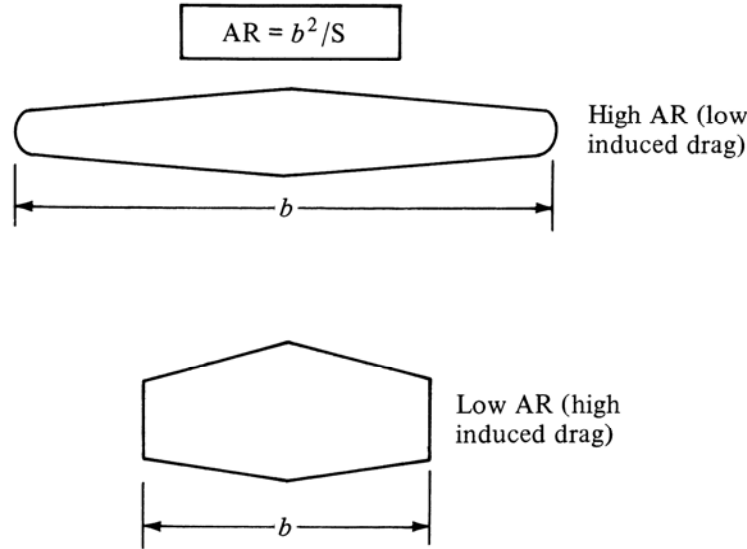
İndüklenmiş Sürüklenme:

$$C_{D,i} = \frac{2\alpha_i}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

$$\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}}$$

İndüklenmiş Sürüklenme: *Taşıma yüzünden oluşan sürüklenme*

İndüklenmiş Sürüklenme $C_{D,i}$ açıklık oranı ile ters orantılıdır.

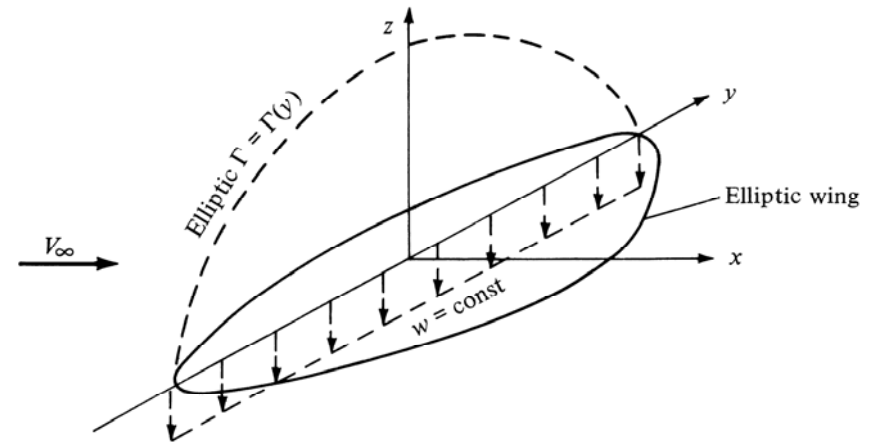


Günümüzdeki sesaltı uçaklarda açıklık oranı olarak genelde 6 – 8 arası değerler kullanılmaktadır.

Eliptik Taşıma Dağılımında Kanadın Plan Şekli

$$c_l = a_0(\alpha_{\text{eff}} - \alpha_{L=0}) \quad a_0 = 2\pi$$

$$L'(y) = q_\infty c c_l \quad c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty c_l}$$



Kanadın Plan Şekli Eliptiktir

GENEL TAŞIMA DAĞILIMI

Daha önce uyguladığımıza benzer bir değişken dönüşümü uygulayalım:

$$y = -\frac{b}{2} \cos \theta$$

Eliptik Taşıma Dağılımı için: $\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$ $\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta$

Bu sonuç genel bir taşıma dağılımı için genel sirkülasyon dağılımının bir Fourier sinüs serisi şeklinde yazılabileceğine işaret eder. Bu durumda genel hal için aşağıdaki sirkülasyon dağılımını kabul edelim:

$$\Gamma(\theta) = 2bV_\infty \sum_1^N A_n \sin n\theta$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ bilinmeyenleri Prandtl'in taşıma çizgisi teorisini sağlamak zorundadır.

Verilen dağılım uygun şekilde yerine konursa:

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_1^N A_n \sin n\theta + \alpha_{L=0} + \sum_1^N nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ bilinmeyenleri yandaki denklem N farklı açıklık istasyonunda yazılarak elde edilir

Taşıma katsayısı için:

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2b^2}{S} \sum_1^N A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta \quad \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & n=1 \\ 0 & n=1 \end{cases}$$

$$C_L = A_1 \pi \frac{b^2}{S} \quad C_L \text{ sadece } A_1' \text{ e bağlı}$$

İndüklenmiş Sürüklenme $C_{D,i}$ için: $C_{D,i} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$

Hesaplamalar yapılırsa

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta) \quad \delta = \sum_2^N n(A_n / A_1)^2$$

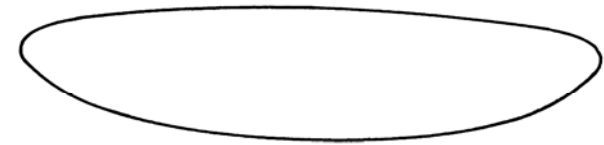
$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi e AR} \quad e = (1 + \delta)^{-1}$$

Açıklık verim faktörü

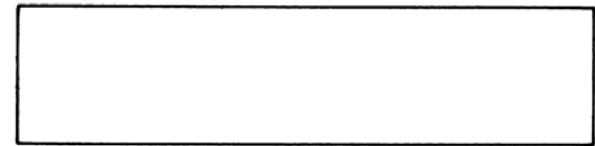
$$e \leq 1$$

Eliptik taşıma dağılımında $\delta = 0$ ve $e = 1$

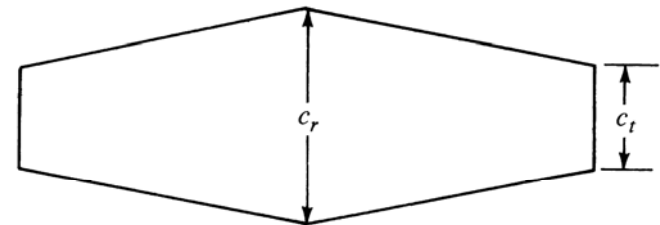
Minimum indüklenmiş sürüklemeyi veren taşıma dağılımı eliptik taşıma dağılımıdır.



Elliptic wing

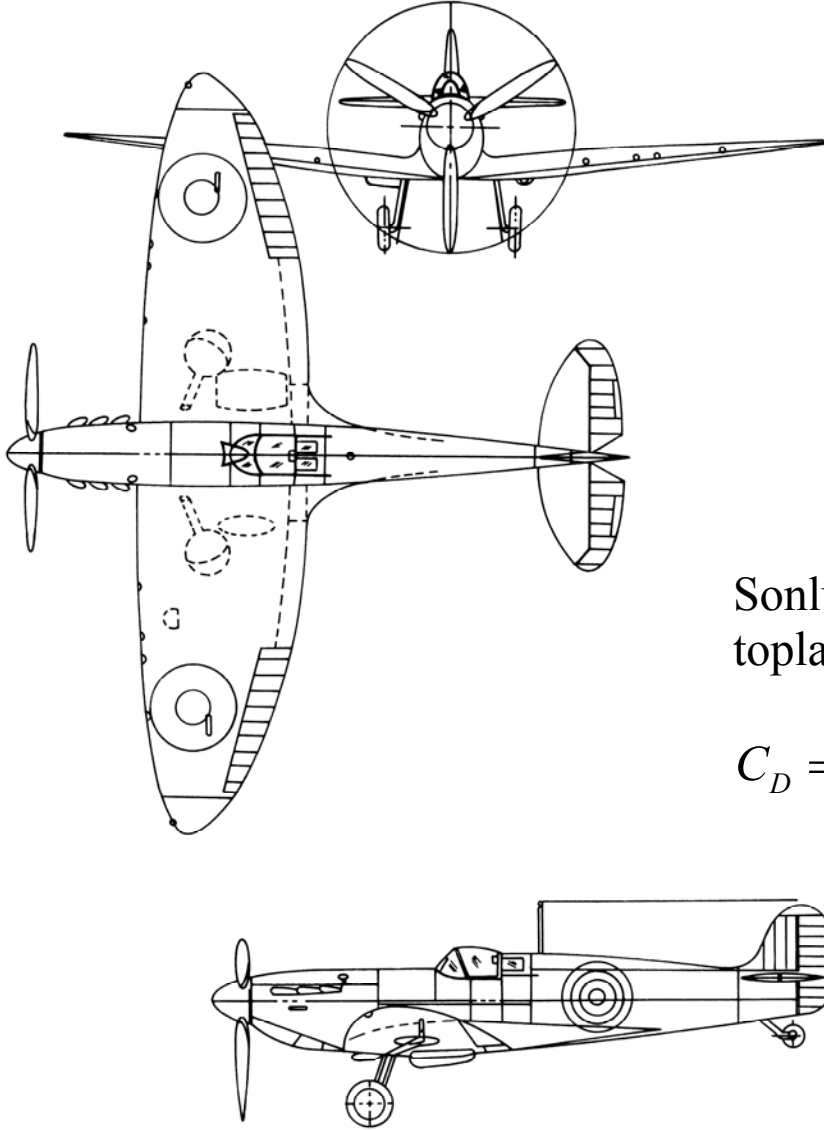


Rectangular wing



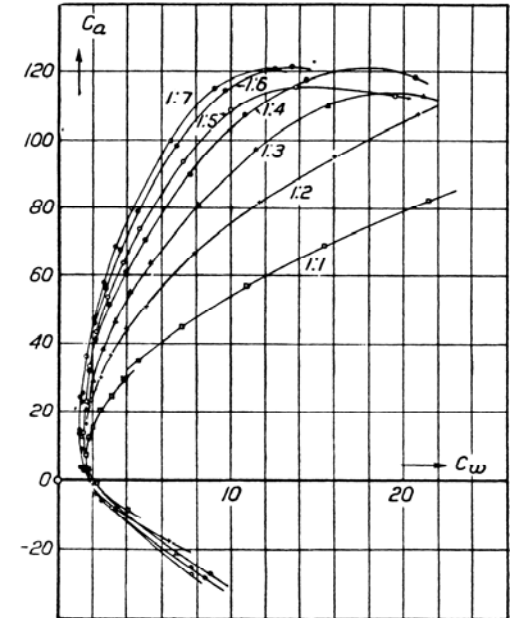
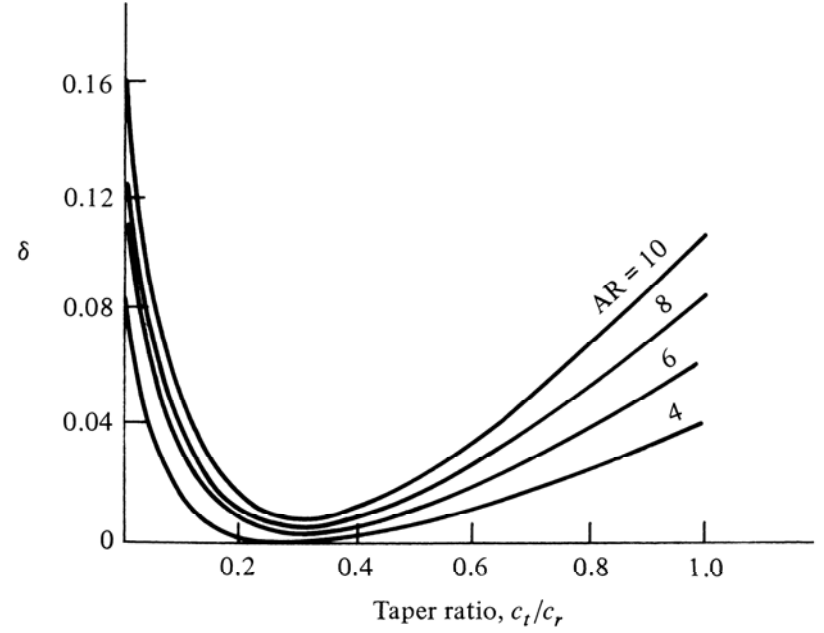
Tapered wing

Geçmişte eliptik plan şekli ile tasarlanmış uçaklar bulunmaktadır:



Sonlu kanadın
toplam sürüklemesi:

$$C_D = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR}$$



İkinci Dünya Savaşında kullanılan İngiliz savaş uçağı Supermarine Spitfire.

Taşıma eğrisi eğiminin etkisi:

$$\frac{dC_L}{d(\alpha - \alpha_i)} = a_0$$

$$C_L = a_0(\alpha - \alpha_i) + \text{sabit}$$

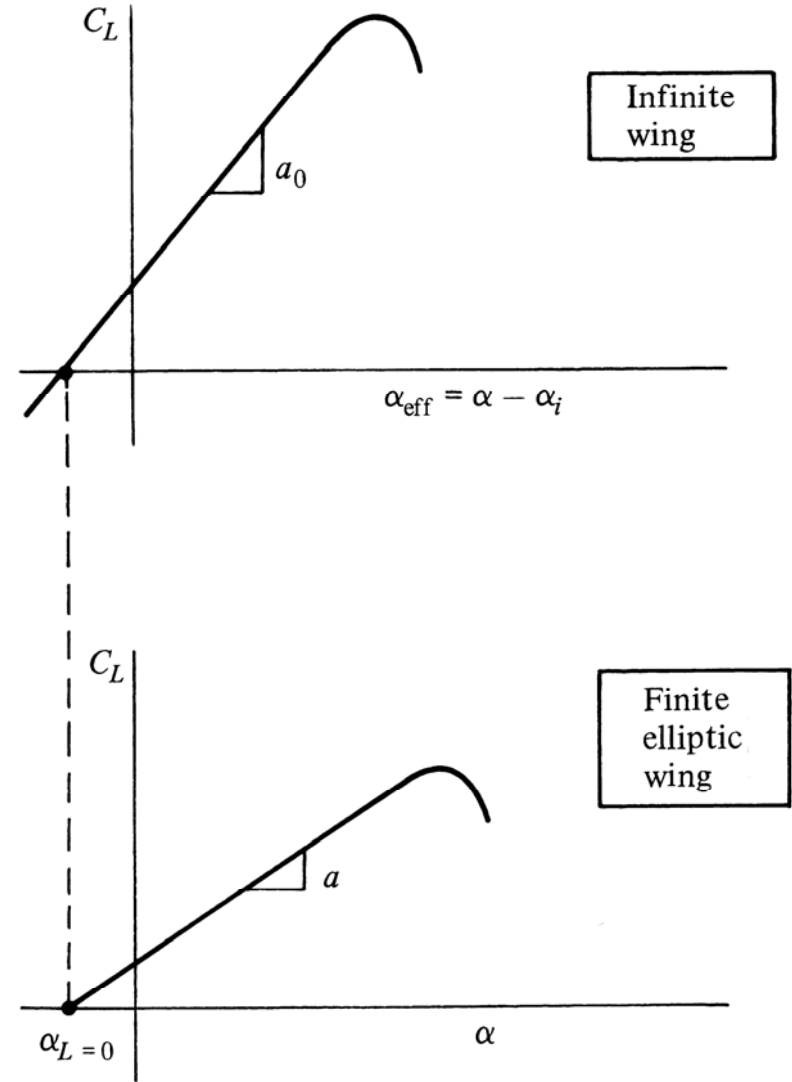
$$C_L = a_0 \left(\alpha - \frac{C_L}{\pi AR} \right) + \text{sabit}$$

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a = \frac{a_0}{1 + a_0 / \pi AR} \quad \text{Eliptik plan şekilli bir sonlu kanat için}$$

Genel plan şekilli
bir sonlu kanat için:

$$a = \frac{a_0}{1 + (a_0 / \pi AR)(1 + \tau)}$$

τA_n 'lerin fonksiyonudur.
Değeri 0.05-0.25 arası değişir



Sonlu kanadın etkisi taşıma eğimini azaltmaktır.