Sayısal Filtreler ve Sistemler

EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

Fourier serisi yardımıyla FIR filtre tasarımı

$$H(j(w+w_s)T) = H(jwt)$$

Örnekleme teoreminin bir sonucu olarak ortaya çıkan $H(jwT)$ peryodiktir ve peryodu w_s dir. Bu nedenle $H(jwT)$ fourier serisine açılabilir.

$$H(jwt) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(n) e^{-jnwT}$$

$$c(n) = \frac{1}{w_s} \int_{-w_s/2}^{w_s/2} H(jwT) e^{jnwT} dw$$

$z = e^{jwT}$ için

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} c(n) z^{-n}$$

elde edilir. Bunun anlamı tasarlanması istenen filtre, filtrenin katsayıları (yani $c(n)$'ler) $H(jwT)$ kullanılarak yukarıda verilen integral yardımıyla bulunabilir.

PROBLEMLER :

1. Sonsuz sayıda parametrenin varlığı.
2. Negatif n değerlerinin filtreyi gerçeklenemez yapması.

$$H(jwT) = M(wT)e^{\phi(wT)} = R(wT) + jI(wT)$$

$$R(wT) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a(n)\cos(nwT)$$

$$a(n) = \frac{4}{w_s}\int_0^{w_s/2} R(wT)\cos(nwT)dw \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$I(wT) = \sum_{i=1}^{\infty} b(n)\sin(nwT)$$

$$b(n) = \frac{4}{w_s}\int_0^{w_s/2} I(wT)\sin(nwT)dw$$

Buradan

$$H(jwT) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\cos(nwT) + j\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\sin(nwT)$$

$$H(z)|_{z=e^{jwT}} = \frac{a(0)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a(n)+b(n))z^{n} + (a(n)-b(n))z^{-n}\right]$$

Toplamı N ile sınırlandırarak bu toplam sonlu hale getirilir. Bu durumda başta sıraladığımız problemlerden ilkini çözeriz

$$H(z)_N = \frac{a(0)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[(a(n)+b(n))z^{n} + (a(n)-b(n))z^{-n}\right].$$

Filtreyi gerçeklenebilir yapabilmek içinde $H_N(z)$ z^{-N} çarpılarak gerçeklenebilir hale gelir

$$H_R(z) = z^{-N}H_N(z).$$

$H_R(z)$, gerçeklenemeyen $H_N(z)$ nin N örnek geçiktirilmesiyle elde edilir.

Bu fazın $-NwT$ ötelenmesi anlamına gelir.

$$H_R(z) = \sum_{k=0}^{2N} h(k) z^{-k}$$

şeklinde yazılabilir.

$$h(k) = (a(N-k) + b(N-k))/2 \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$h(N) = a(0)/2$$

$$h(k) = (a(k-N) - b(k-N))/2 \quad N+1 \leq k \leq 2N$$

Eğer faz önemsenmiyorsa işlemin başında I(wT)=0 alınarak katsayılar basitleştirilebilir.

$$h(k) = (a(N-k))/2 \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$h(N) = a(0)/2$$

$$h(k) = (a(k-N))/2 \quad N+1 \leq k \leq 2N$$

Örnek 1:

$$|H(jwT)| = \begin{cases} 1 & \pi/3 \leq |wT| \leq 2\pi/3 \\ 0 & diger \end{cases}$$

ideal bant geçiren filtreyi fourier serisi yaklaşımını kullanarak tasarlayalım.

$$a(n) = \frac{4}{w_s}\int_0^{w_s/2} R(wT)\cos(nwT) = \frac{4}{2\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\cos(nwT)dw$$

$$a(n) = \frac{2}{\pi n}[\sin(2\pi n/3) - \sin(\pi n/3)]$$

$$H(jwT) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a(n)\cos(nwT)$$

$$a(0) = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} dw = \frac{2}{3}$$

$$a(n) = \frac{2}{\pi n}[\sin(\frac{2\pi n}{3}) - sin(\frac{\pi n}{3})]$$

$$H(jwT) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}[\sin(\frac{2\pi n}{3}) - sin(\frac{\pi n}{3})]\frac{\cos(nwT)}{n}$$

$$H_N(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}[\sin(\frac{2\pi n}{3}) - sin(\frac{\pi n}{3})]\frac{z^n + z^{-n}}{n}$$

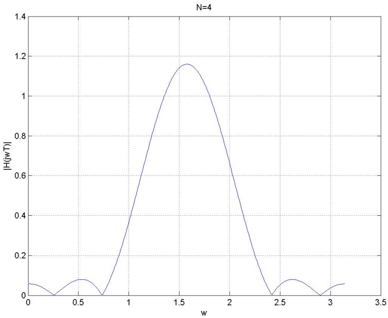
$$H_R(z) = z^{-N} H_N(z)$$

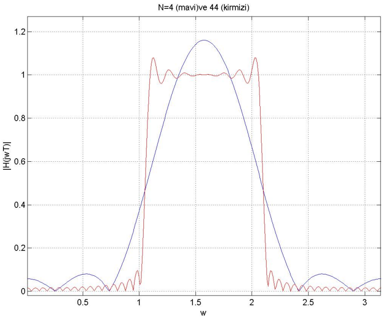
$$H_R(jwT) = e^{-jNwT}\left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}[\sin(\frac{2\pi n}{3}) - sin(\frac{\pi n}{3})]\frac{\cos(nwT)}{n}\right\}$$

Örnek 2: $H(jwT) = jwT \quad -\pi \leq wT \leq \pi$ gerçekleyelim.

Benzetim

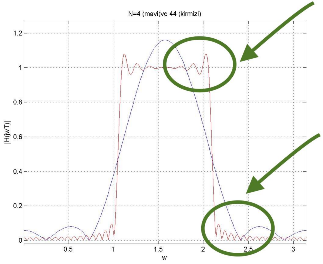
```
N=5;
a(1)=2/3;
for i=2:N,
a(i)=2/(i*pi)*(sin(2*pi*i/3)-sin(pi*i/3));
end
k=0;
for w=0:.01:pi,
k=k+1;
top=0;
for i=2:N,
top=top+a(i)*cos(i*w);
end
H(k)=1/3+top;
end
```


N=4
|H(jwT)|
w
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1.5
2
2.5
3
3.5


N=4 (mavi)ve 44 (kirmizi)
|H(jwT)|
w
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1.5
2
2.5
3

Gibbs etkisi

Bu tasarım temel olarak verilen peryodik fonksiyona fourier serisi açılımı yardımıyla yakınsamaya çalışır. N artırıldıkca istenen fonksiyonla bu açılım yardımıyla elde edilen fonksiyon arasındaki benzerlik artar. Ancak yukardaki örnekte olduğu gibi süreksiz noktalara sahip bir karakteristikte sınırlı sayıda N ile ideal şekle yaklaşmak mümkün olmadığı gibi yukardaki şekilde görülen kırpışmalar ile karşılaşırız.



Sınırlı nokta N kullanmak

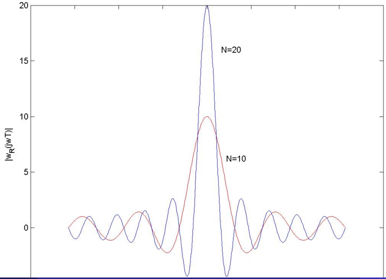
$$H_N(jwt) = \sum_{-N}^{N} c(n) e^{-jnwT}$$

orjinal serinin

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & -N \geq n \geq N \\ 0 & diger \end{cases}$$

ile çarpılmasına denk düşmektedir. Buna çift yönlü dikdörtgen pencere denir. Genlik cevabı

$$w_R(jwT) = \sin(MwT/2)/\sin(wT/2).$$



$w_R(n)$ nin $h(n)$ ile zaman boyutunda çarpılması $h_N(n) = h(n)w_R(n)$ frekans boyutunda bu iki işaretin frekans cevaplarının konvolisyonuna karşılık düşer. Bu konvolisyon işlemi neticesinde Gibbs etkisi olarak adalandırılan kırpışmalar filtre karakteristiği üzerinde görülür.

Pencereleme

Gibbs etkisini ortadan kaldırmak amaçıyla Fourier katsayıları uygun ağırlıklarla çarpılır. Bu ağırlıklar çeşitli pencereleme fonksiyonlarından elde edilir.

- Uyumlaştırılmış dikdörtgen pencereleme

$$w_{RM}(n) = \begin{cases} 1 & -(N-1) \geq n \geq N-1 \\ 1/2 & n = N, -N \\ 0 & diger \end{cases}$$

- Üçgen pencereleme

$$w_B(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N} & -N \geq n \geq N \\ 0 & diger \end{cases}$$

- Von Hann pencereleme

$$w_R(n) = \begin{cases} 1/2(1 + \cos(\pi n/N)) & -N \geq n \geq N \\ 0 & diger \end{cases}$$

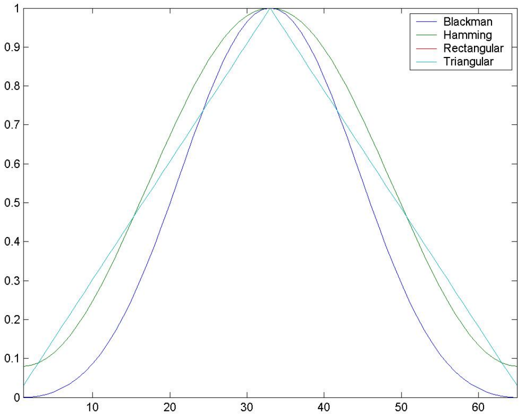
- Hamming pencereleme

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha\cos(\pi n/N)) & -N \geq n \geq N \\ 0 & diger \end{cases}$$

$\alpha = 0.54$

NOT : Matlab'de `help window` komutu yardımıyla bütün pencereleme fonksiyonları görülebilir.

Pencereleme fonksiyonlari



Örnek

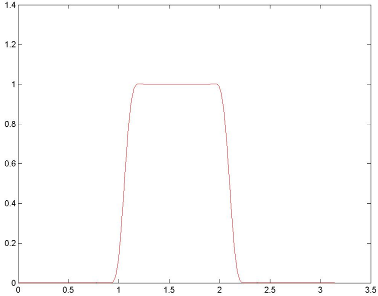
Örnek 2 deki filtreyi Hamming pencereleme fonksiyonuyla tasarımına devam edelim.

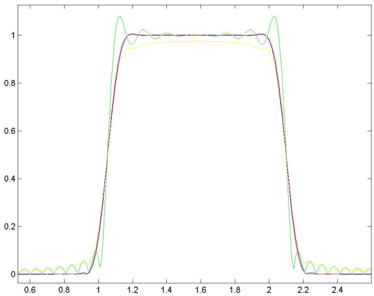
$$w_H(n) = 0.54 + 0.46\cos(\pi n/N)$$

$$H_R(jwt) = e^{-jNwT} M_R(wT)$$

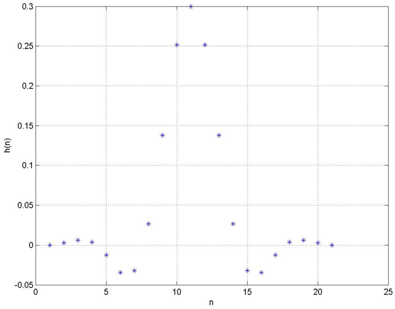
$$M_R(wT) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}[0.54 + 0.46\cos(\pi n/N)][\sin(\frac{2\pi n}{3}) - sin(\frac{\pi n}{3})]$$

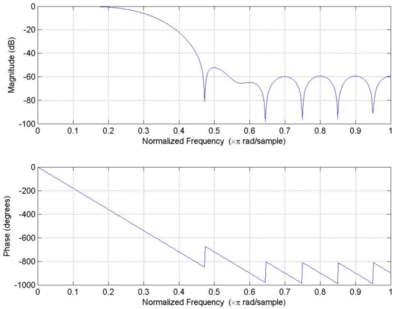
Hamming pencerelemesi ile bant geçiren filtre



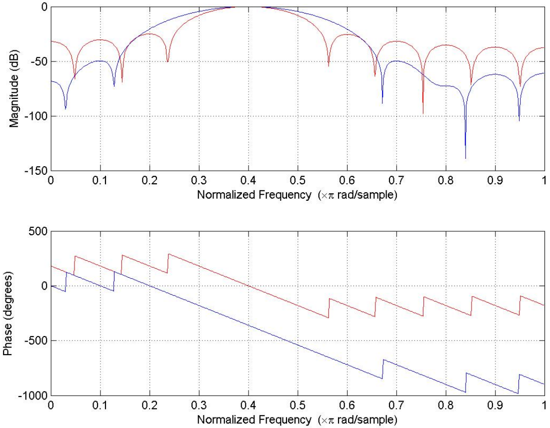


```
>> b=fir1(20,.3);freqz(b)
```

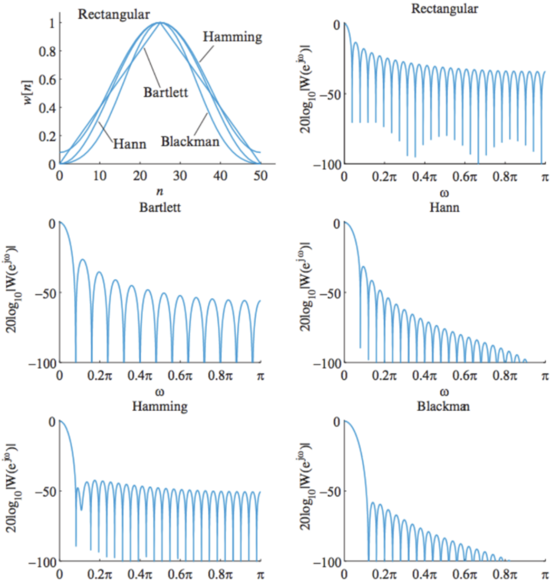




```
>>b=fir1(20,[.3 .5],rectwin(21))
>>b=fir1(20,[.3 .5])
```



Pencerelerin Etkisi



Pencerelerin Etkisi

Window name	Side lobe level (dB)	Approx. $\Delta\omega$	Exact $\Delta\omega$	$\delta_p \approx \delta_s$	A_p (dB)	A_s (dB)
Rectangular	-13	$4\pi/L$	$1.8\pi/L$	0.09	0.75	21
Bartlett	-25	$8\pi/L$	$6.1\pi/L$	0.05	0.45	26
Hann	-31	$8\pi/L$	$6.2\pi/L$	0.0063	0.055	44
Hamming	-41	$8\pi/L$	$6.6\pi/L$	0.0022	0.019	53
Blackman	-57	$12\pi/L$	$11\pi/L$	0.0002	0.0017	74

Seçilen Pencere ile FIR Filtre Tasarım Adımları

1. İstenen w_p, w_s, R_s ve R_p değerleri yardımıyla geçirme ve söndürme bandındaki δ_p ve δ_s kırpışma değerleri belirlenir.
2. Kesim frekansı $w_c = \frac{w_c + w_p}{2}$ olarak seçilir.
3. $\delta = \min\{\delta_p, \delta_s\}$ olmak üzere $A = -20\log_{10}(\delta)$ ve $\Delta w = w_s - w_p$ belirlenir.
4. Pencere etkisi tablosundan A bağlı pencere seçilir.
5. Tablodan L değeri Δw bağlı seçilir.
6. Filtre katsayıları hesaplanır ($h(n) = \frac{\sin(w_c(n-L/2))}{\pi(n-L/2)}$).
7. Pencere fonk. kullanaraka katsayıları hesapla.
8. İsterleri sağlayıp sağlamadığını kontrol et ve L değerini düzenle.

Not: Geçirme bandında $0 \leq w \leq w_p$ arasında $1 - \delta_p \leq |H(jw)| \leq 1 + \delta_p$ ve Söndürme Bandında $w_s \leq w \leq \pi$ arasında $|H(jw)| \leq 1 + \delta_s$

Not

Matlab de diziler 0 dan başlamamaktadır. fir1 cıkışta N+1 tane katsayı oluşturmaktadır (Yukardaki örneklerde N 20 için 21 katsayı oluşmaktadir). Yukardaki örnekler 1. tip filtrelerdir (Katsayılar simetrik ve N tek.) Eğer Matlab de N cift verilerek 2. tip ve yüksek veya bant söndüren filtre tasarlanmaya çalışılırsa Matlab otomatik olarak N sayısını 1 artırıp N+1 için filtreyi verecektir. Nedenini geçen haftaki derse bakarak bulun.