Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

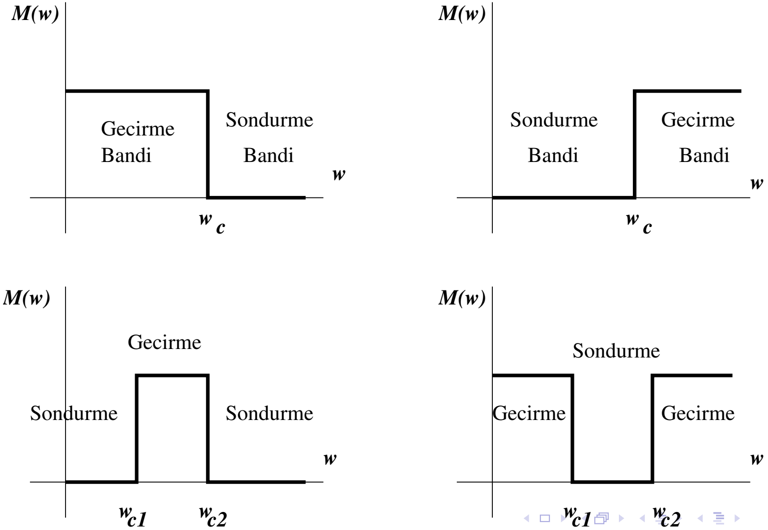
Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

İdeal Filtre Karakteristikleri



Filtreler

When referring to measurements of power quantities, a ratio can be expressed as a level in decibels by evaluating ten times the base-10 logarithm of the ratio of the measured quantity to reference value.

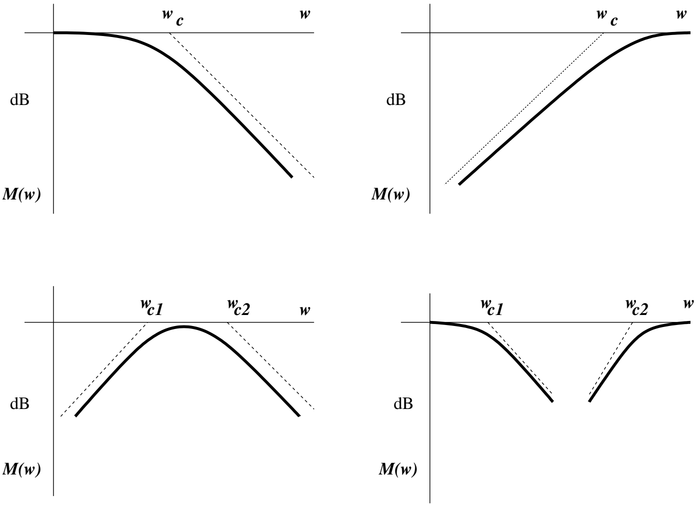
$$L_p = 10\log(\frac{P}{P_0})$$

When referring to measurements of voltage or current ;

$$L_v = 20\log(\frac{v}{v_0})$$

(power is typically proportional to the square of voltage or current) Ref: Wikipedia.

Filtreler



İdeal alçak geçiren filtre

İdeal alçak geçiren filtre

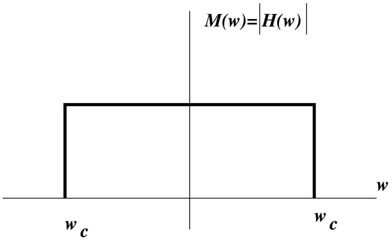
$$H(jw) = \begin{cases} Ke^{-jwT} & \mathrm{eger} |\mathrm{w}| \leq \mathrm{w_c} \\ 0 & \mathrm{digerleri} \end{cases}$$

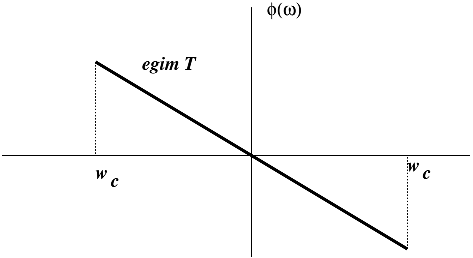
dir ve $-T$ faz çevabının eğimi, K kazanç sabitidir.
$H(jw)$ nın ters Fourier dönüşümü alınacak olursa

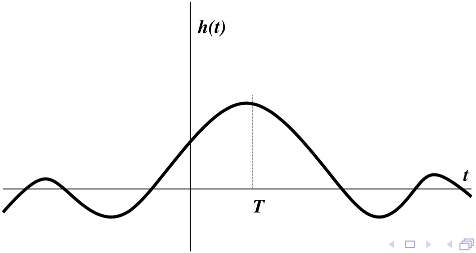
$$h(t) = \frac{Kw_c \sin w_c(t-T)}{\pi w_c(t-T)}$$

elde edilir.
Burda $h(t)$ nin $t < 0$ için sıfırdan farklı değerlere sahip olması ideal alçak geçiren filtrenin gerçeklenemez olduğunu gösterir. Çözüm $|H(w)|$ karakteristiğini yaklaşık olarak gerçekleyen filtreyi tasarlamak.

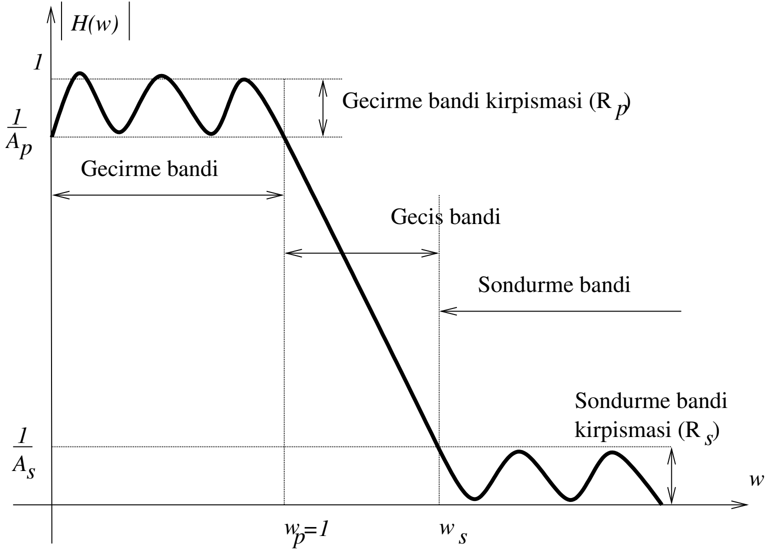
İdeal Filtre Karakteristikleri







Gerçeklenebilir Filtre Karakteristikleri



Butterworth Filtreleri

Butterworth (1930) yaklaşımyla n. dereceden alçak geçiren filtre

$$\boxed{|H(jw)| = \frac{1}{(1+w^{2n})^{1/2}}.}$$

Filtre karakteristiğinden filtre parametrelerinin bulunması:

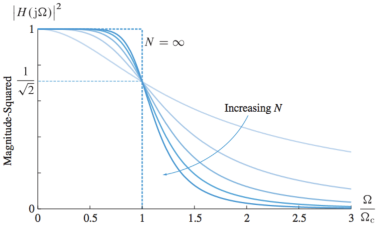
$$R_p = -20 \log A_p = -10 \log \frac{1}{1+w_p^{2n}}$$

$$R_s = -20 \log A_s = -10 \log \frac{1}{1+w_s^{2n}}$$

Bir önceki iki eşitlik kullanılarak

$$n = \frac{\log \dfrac{\frac{1}{A_s^2} - 1}{\frac{1}{A_p^2} - 1}}{2 \log \frac{w_s}{w_p}} \approx \frac{R_s}{20 \log \frac{w_s}{w_p}}$$

n tamsayı olması gerektiğinden kesirli çıkan n değeri yukarı yuvarlanır.

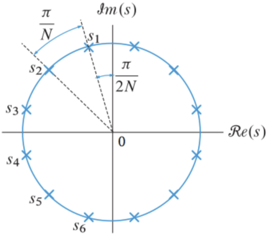


Butterworth Filtreleri

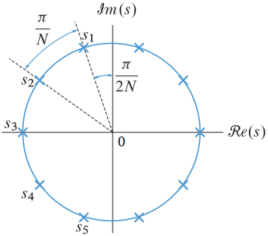
$$|H(jw)|^2 = H(jw)H(-jw) = \frac{1}{(1+w^{2n})}$$

$s = jw$ bu durumda $s^2 = -w^2$ ve $H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$
yukardaki eşitlikten bu filtrenin $2n$ tane kutbu olduğu görülür

$$s_k = \begin{cases} e^{j\pi(2k-1)/2n} & \text{çift n'ler} \quad k = 1, 2, ...2n \\ e^{j\pi k/n} & \text{tek n'ler} \quad k = 0, 1, 2, ...2n-1 \end{cases}$$



(a) $N = 6$



(b) $N = 5$

Örnek : 3 dereceden Butterworth tipi filtrenin transfer fonksiyonunu bulun.

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + w^6}$$

$H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6}$ bu durumda $s_k = e^{jk\pi/3}$ ve $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Transfer fonksiyonu;

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1/2-j\sqrt{3}/2)(s+1/2+j\sqrt{3}/2)}$$

Matlab fonksiyonları:

```
 >>[N, wc] = buttord(wp, ws, Rp, Rs, 's')
>>[B, A] = butter(N, wc, 's')
```

Chebyshev filtreleri

Chebyshev polinomu:

$$C_n(w) = 2wC_{n-1}(w) - C_{n-2}(w)$$

ve $C_0(w) = 1$ $C_1(w) = w$.
n. dereceden Chebyshev filtresi

$$\boxed{|H(jw)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(w)}}$$

Filtre karakterstiğinden filtre parametrelerinin bulunması:

- $|H(j1)| = \frac{1}{(1+\epsilon^2)^{1/2}}$ olmak üzere Maximum kırpışma R_p (dB) için $20\log(|H(j1)) = \mathrm{R_p}$ alarak ϵ bulunur.
- Söndürme bandından $|H(jw)| \approx \frac{1}{\epsilon C_n(w)}$ alınarak

$$20\log A_s = 20\log\epsilon + 20\log C_n(w_s) \approx 20\log\epsilon + 20\log(2^{n-1}w_s^n)$$

elde edilir.

Chebyshev filtreleri

Bu eşitlikden filtrenin derecesi durdurma bandında enaz istenen azalmayı sağlayacak şekilde seçilir.
Chebyshev filtresinin transfer fonksiyonu;

$$\boxed{H(s) = \frac{C}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)}.}$$

bu filtreye ait kutuplar;

$$s_k = \begin{cases} -\sinh\gamma\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + j\cosh\gamma\sin\frac{2k+1}{2n}\pi & n \text{ cift}, \quad k = \frac{-n}{2}, ..., \frac{-n}{2}-1 \\ -\sinh\gamma\cos\frac{k}{n}\pi + j\cosh\gamma\sin\frac{k}{n}\pi & n \text{ tek}, \quad k = 0, \pm 1, ..., \pm\frac{n-1}{2} \end{cases}$$

ve

$$\gamma = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}$$

Chebyshev filtreleri

- $$|H(j0)| = \begin{cases} 1, & n \ tek \\ 1/(1+\epsilon^2), & n \ cift \end{cases}$$
- $w \leq w_c$ için $1 \leq |H(iw)|^2 \leq 1/(1+\epsilon^2)$
- $|H(iw)|^2$, $w \geq w_c$ için $20n$ (dB) ile azalır.
- Chebyshev filtresin But. göre yaklaşık $6(n-1)$ daha hızlı zayıflamaya sahiptir.
- Butt.'da kutuplar daire üzerine Cheb.'de ise elipsin üzerine yerleşmektedir.

Matlab fonksiyonları:

```
>>[N, wc] = cheb1ord(wp, ws, Rp, Rs, 's')
>>[B, A] = cheby1(N, Rp, wc, 's')
```

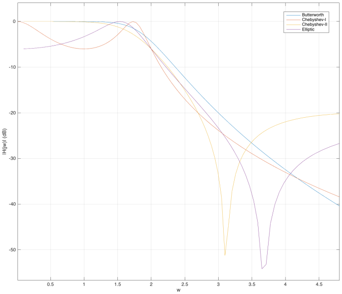
Chebyshev filtreleri: Ters Chebyshev

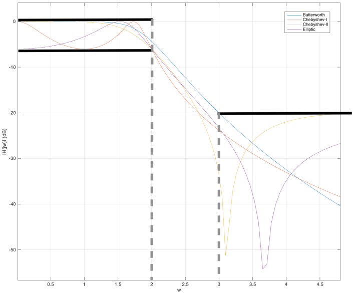
- Chebyshev filtresi (Chebyshev-I) s yerine $1/s$ seçilerek yüksek geçiren filtreye dönüştürülür.
- Elde edilen yüksek geçiren birden çıkarılarak Ters veya Chebyshev-II filtresi elde edilir.

Chebyshev-II filtresi söndürme bandında kırpışma, geçirme bandında monoton olarak zayıflama göstermektedir.
Matlab fonksiyonları:

```
>>[N, wc] = cheb2ord(wp, ws, Rp, Rs, 's')
>>[B, A] = cheby2(N, Rs, wc, 's')
```

Karşılaştırma





▸ file: filtre_analog.m

Frekans Uyarlaması

Buraya kadar teorik çalışmalarda kesim frekansı 1 rad/sn olarak alınmıştı. İstenen frekans için:

- w_u frekanslı alçak geçiren

$$s_n = s/w_u$$

- w_l frekanslı yüksek geçiren

$$s_n = w_l/s$$

- Bant geçiren $(w_l,\ w_u)$

$$s_n = \frac{s^2 + w_0^2}{B_s} = \frac{w_0}{B}\left(\frac{s}{w_0} + \frac{w_0}{s}\right)$$

ve $w_0 = \sqrt{w_u w_l}$ $B = w_u - w_l$.

- Bant söndüren $(w_l,\ w_u)$

$$s_n = \frac{B_s}{s^2 + w_0^2} = \frac{B}{w_0\left(\frac{s}{w_0} + \frac{w_0}{s}\right)}$$

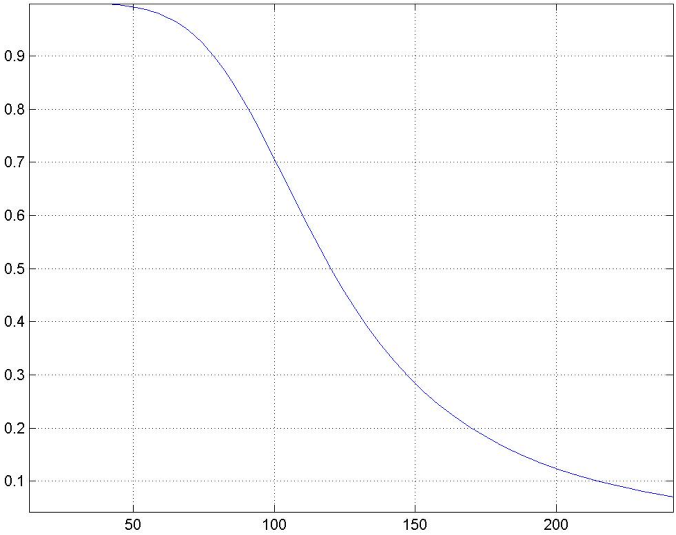
ve $w_0 = \sqrt{w_u w_l}$ $B = w_u - w_l$.

Örnekler

Örnek : 3 dereceden Butterworth tipi filtreyi kesim frekansı 100Hz olacak şekilde MATLAB'de tasarlayın.

```
>> [b,a]=butter(3,2*pi*100,'s');
>> tf(b,a)
Transfer function:
2.481e008
----------------------------------------
s^3 + 1257 s^2 + 7.896e005 s + 2.481e008
>> [H,w]=freqs(b,a);
>> plot(w/(2*pi),abs(H))
>> roots(a)
ans = 1.0e+002 *[ -6.2832, -3.1416 + 5.4414i, -3.1416 -
5.4414i]
```

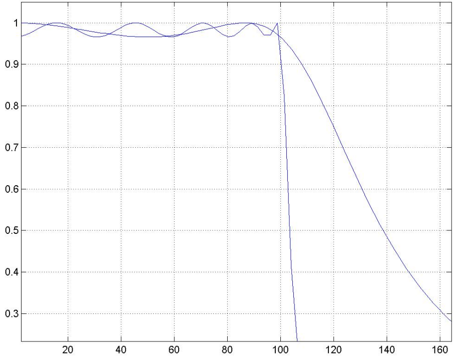
Örnekler



Örnekler

Örnek: MATLAB de aynı derecedeki Chebyshev filtresinin davranışının karşılaştırın.

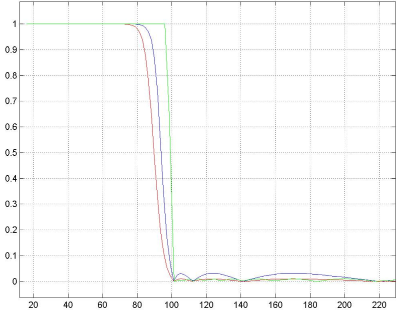
```
>>[b,a]=cheby1(3,.3,2*pi*100,'s');
>>[b,a]=cheby1(10,.3,2*pi*100,'s');
```



Örnekler

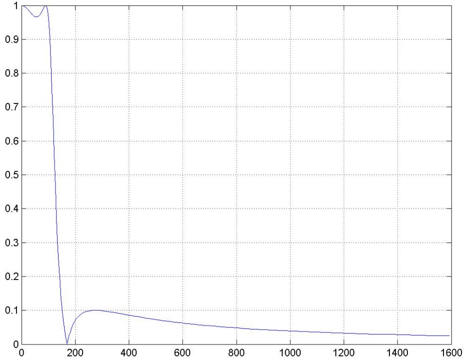
Chebyshev II tipi filtrelerde I tipinde görülen ripple söndürme bandında ortaya çıkar. Aşağıdaki örnekte MATLAB üstünde Chebyshev II için farklı derece ve kırpışma değerleri için filtrenin genlik cevabı

```
>>[b,a]=cheby2(10,30,2*pi*100,'s'); (mavi)
>>[b,a]=cheby2(10,40,2*pi*100,'s');(kırmızı)
>>[b,a]=cheby2(30,40,2*pi*100,'s');(yeşil)
```



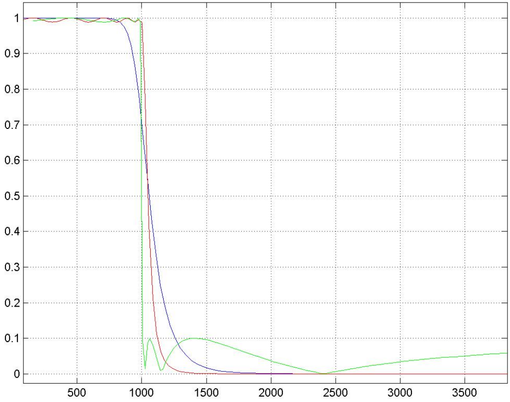
Elliptic Filtreler

```
>> [b,a]=ellip(3,.3,20,2*pi*100,'s');
>> [H,w]=freqs(b,a);
>> plot(w/(2*pi),abs(H))
```



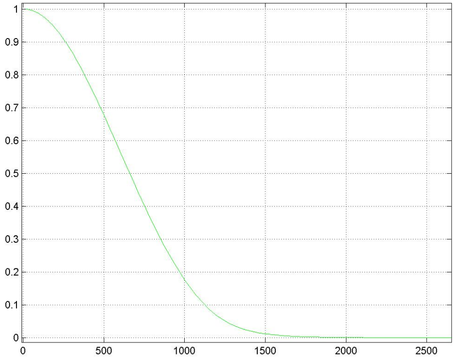
Elliptic filtreler Chebyshev filtresine göre daha keskin olmasına karşın södürme ve geçirme bantlarinin her ikisinde de kırpışmaya neden olmaktadırlar.

```
>>[b,a]=butter(10,2*pi*100,'s'); (mavi)
>> [b,a]=cheby1(10,.1,2*pi*1000,'s'); (kırmızı)
>> [b,a]=ellip(10,.1,20,2*pi*1000,'s'); (yeşil)
```



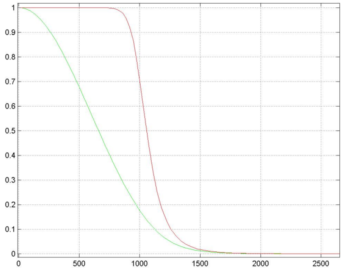
Bessel filtre

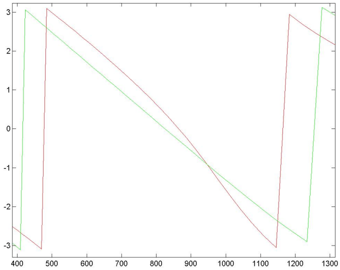
```
>> [b,a]=besself(10,2*pi*1000);
>> [H,w]=freqs(b,a);
>> plot(w/(2*pi),abs(H),'g')
```



$2 * pi * 1000$ is the frequency up to which the group delay is approximately constant.

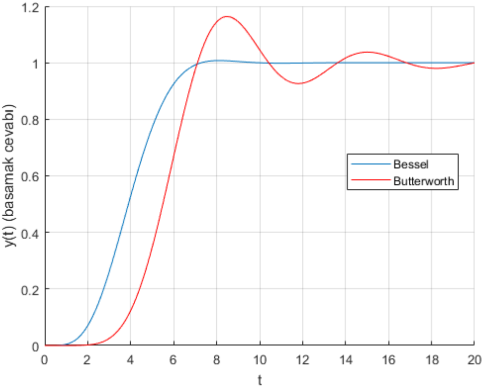
Bessel ve Butterworth





Bessel filtreler özellikle lineer faz istendiğinde kullanılmaktadır.

Bessel ve Butterworth



Bessel tipi filtre filtrenin frekans cevabındansa basamak cevabının önemli olduğu uygulamalar için anlamlıdır. Yukarıda gördüğümüz durum bunu açaıklamaktadır.