Sayısal Filtreler ve Sistemler

EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

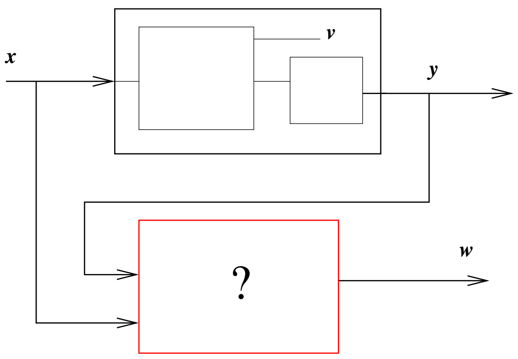
Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

Durum izleyici tasarımı

Problem Girişleri x ve y, durum değişkeni w olan öyle bir sistem tasarlansın ki iki sistem arasındaki hata $e = v - w$ asimtotik olarak sıfıra gitsin.



Durum izleyici tasarımı

$$\begin{aligned} v(k+1) &= Av(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cv(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

Tasarlanmak istenen ayrık zamanlı sistem

$$w(k+1) = Gw(k) + Hx(k) + Ky(k).$$

Bu sisteme ait G, H, K matrisleri bulunaçaktır.
Giriş olarak $u(k) = y(k) - Dx(k)$ seçelim

$$w(k+1) = Gw(k) + Hx(k) + Ku(k)$$

$$\begin{aligned} e(k+1) &= v(k+1) - w(k+1) \\ &= Av(k) + Bx(k) - [Gw(k) + Hx(k) + Ky(k)] \\ &= (A - KC)v(k) - Gw(k) + (B - H)x(k) \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} H &= B \\ G &= A - KC \end{aligned}$$

seçilirse

$$e(k+1) = (A - KC)e(k)$$

bulunur. Burda görüleceği gibi eğer hata sistemi kararlıysa hata sıfıra gidecektir. Bu durumda durum izleyici

$$w(k+1) = (A - KC)w(k) + Bx(k) + Ku(k)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik

$$w(k+1) = Aw(k) + Bx(k) + K(u(k) - Cw(k))$$

şeklinde de yazılabilir. Bu *Kalman formu* diye adlandırılır.
Problem : K nasıl bulunur ?

İzleyici kazanç matrisi K nın bulunması

Kutup yerleştirmede yaptığımıza benzer şekilde $A - KC$ matrisindeki K uygun seçilerek sistem kararlı hale getirilebilir. Bu da eğer A ve C gözlenebilir çift ise $A - KC$ matrisinin özdeğerleri K yardımıyla istendiği gibi seçilebilir.
Sistemi gözlenebilir kanonik yapıya çevirelim

$$A_o - K_oC_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{N-1} \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ . \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

Karakteristik denklem burdan

$$P = z^n + (a_1 + k_n)z^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + k_2)z + (a_n + k_1).$$

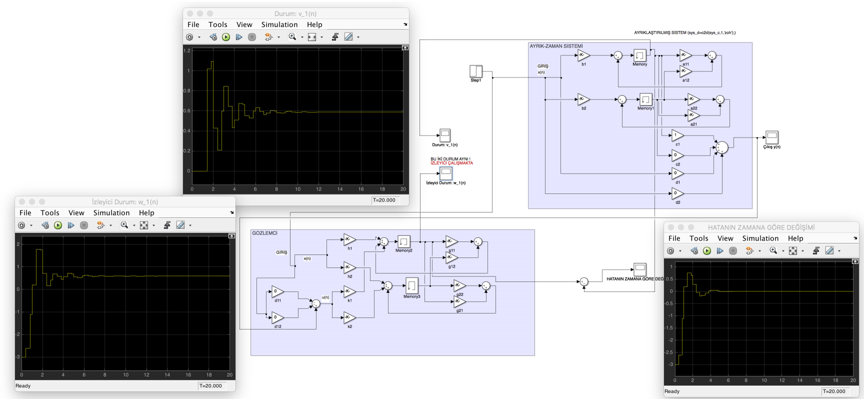
Arzulanan özdeğerlere ait izleyicinin karakteristik denk. bulunup katsayılar eşitlenerek izleyicinin kazanç matrisi bulunur. Dikkat ! $K = P_oK_o$

Kutupları $0.5 \pm 0.5j$ olacak bir izleyici tasarımı:

```
A=[.2 1;2 -.2];B=[1;1];C=[1 0]; sys_c=ss(A,B,C,0);
%Ayrıklaştırılmış sistem
sys_d=c2d(sys_c,1,'zoh');
num_d den_d=ss2tf(sys_d.a,sys_d.b,sys_d.c,0);
% Gözlenebilir matrisi
OB=obsv(sys_d.a,sys_d.c)
% Sistemin gözlenebilir kanonik formda yazılması
Ao=[0 -den_d(3); 1 -den_d(2)];Co=[0 1];
OBo=obsv(Ao,Co);
Po=inv(OB)*OBo;
% test Ao için
inv(Po)*sys_d.a*Po
```

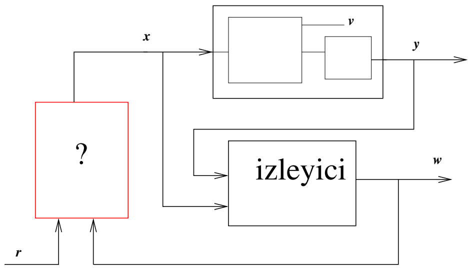
% Gözlemcinin kutupları $0.5 \mp 0.5j$ için $P(z) = z^2 - z + .5$

```
Kg(2,1)=-1-den_d(2);
Kg(1,1)=.5-den_d(3);
% Gözlemci parametreleri
K=Po*Kg;G=sys_d.a-K*sys_d.c;H=sys_d.b;
```

The separation principle

Problem Durum geribeslemesi uygulayaçağımız sistemin durum değişkenlerine erişemediğimiz durumda sistemi giriş ve çıkışlarını kullanarak nasıl kontrol edebiliriz ?



Çözüm : Bir durum izleyici tasarlayalım. Bu izleyiciyi kullanarak sisteme (*plant*) geribesleme uygulayalım !

Sistemin modeli

$$\begin{aligned} v(k+1) &= Av(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cv(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

olsun ve izleyici modeli

$$w(k+1) = (A - KC)w(k) + (B - KD)x(k) + Ku(k)$$

$$u(k) = y(k) - Dx(k)$$

bu ikisini birleştirip izleyici modeli

$$w(k+1) = (A - KC)w(k) + (B - KD)x(k) + Ky(k)$$

şeklinde yazılabilir. İzleyicinin özdeğerlerinin
$\lambda_o = \{\lambda : \det(\lambda I - A + KC) = 0\}$.
Burda izleyicinin görevini hatırlayalım ($v = w$).

Uygulamayı düşündüğümüz geri besleme

$$x(k) = Fw(k) + Gr(k)$$

şeklinde seçilir ve kapalı çevrime ait özdeğerler
$\lambda_c = \{\lambda : \det(\lambda I - A - BF) = 0\}$.

!! DİKKAT !!

Burda geribesleme w değişkeni üstünden yapılsada F in hesaplanması izleyiciden bağımsızdır.

The separation principle :
∗ Geribeslemede v yerine w kullanmak kapalı çevrimin kutuplarını değiştirmez.
∗ Geribesleme F izleyicinin kutuplarını etkilemez. Bunun ispatı için izleyici ve sistemin durum denklemlerini düzenleyelim

$$\begin{bmatrix} v(k+1) \\ w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ KC & A - KC - BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BF \\ BG \end{bmatrix} r(k)$$

burda w yerine $e = v - w$' yı yerine koyalım.

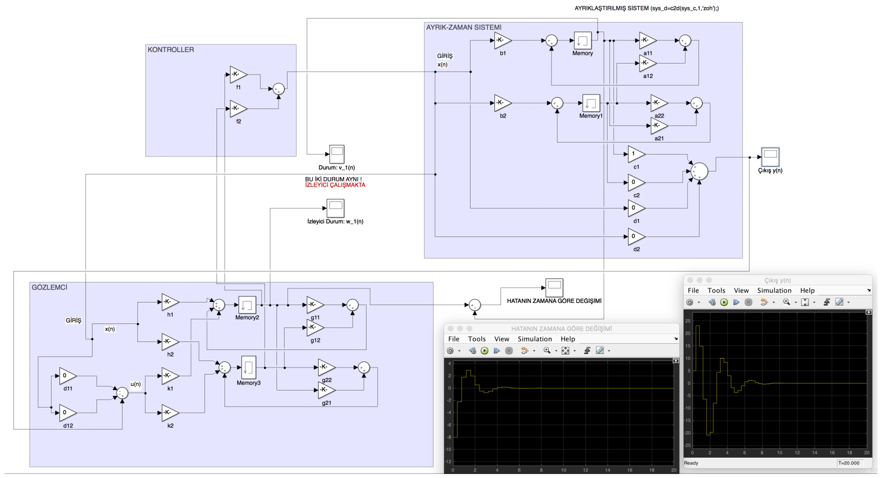
$$e(k+1) = v(k+1) - w(k+1)$$

$$\begin{bmatrix} v(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BG \\ 0 \end{bmatrix} r(k)$$

Bu sistemin determinantı

$$\det(\lambda I - A - BF)\det(\lambda I - A + KC).$$

Görüldüğü gibi K nın tasarımı kapalı sistemi ve F in tasarımıda izleyici tasarımını etkilemez.


AYRIKLAŞTIRILMIŞ SİSTEM (sys_d=c2d(sys_c,1,'zoh');)
AYRIK-ZAMAN SİSTEMİ
KONTROLLER
GİRİŞ
x(n)
b1
Memory
a11
a12
b2
Memory1
a22
a21
c1
c2
d1
d2
f1
f2
Durum: v_1(n)
Çıkış y(n)
BU İKİ DURUM AYNI !
İZLEYİCİ ÇALIŞMAKTA
İzleyici Durum: w_1(n)
GÖZLEMCİ
h1
h2
k1
k2
u(n)
d11
d12
Memory2
Memory3
g11
g12
g22
g21
HATANIN ZAMANA GÖRE DEĞİŞİMİ
File Tools View Simulation Help
Çıkış y(n)
Ready
T=20.000