Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

Durum vektörü değiştirme

$$\begin{aligned} v(n) &\triangleq Pz(n) \\ Pz(n+1) &= APz(k) + Bx(k) \\ y(k) &= CPz(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

Burdan aynı sisteme ait yeni durum denklemi

$$\begin{aligned} z(n+1) &= P^{-1}APz(k) + P^{-1}Bx(k) \\ y(k) &= CPz(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

Sistemin transfer fonksiyonunu bulalım

$$Y(z) = [C(zI-A)^{-1}B + D]X(z)$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= [(CP)(zI-(P^{-1}AP))^{-1}(P^{-1}B) + D]X(z) \\ &= [(CP)(P^{-1}zIP-(P^{-1}AP))^{-1}(P^{-1}B) + D]X(z) \\ &= [C(zI-A)^{-1}B + D]X(z) \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi sistemin transfer fonksiyonu değişmez. Buna ek olarak sistemin kutupları aynı kalmaktadır !
Not : $(zI-A)^{-1}$'nin determinantı ve $H(z)$' nin paydası ?

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_N\}$$

olarak alındığında Jordan yapısı karşımıza çıkmaktadır (Katsız kutup durumunda).
Jordan kanonik yapısı:

$$J = \mathrm{diag}\{J_i\}$$

$i = \{1, 2, ...r\}$ (r özdeğer sayısı ve özdeğer komlex olabilir) ve özdeğerin kaç katlı olduğuna bağlı olarak

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . \\ . & . & . & ... & . & . & . \\ . & . & . & ... & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Yönetilebilir yapıya dönüştürme

$$v(k) = P_c v_c(k)$$

A_c matrisi $A_c = P_c^{-1} A P_c$ denklemi yardımıyla bulunacağı gibi karakteristik denklemin katsayıları yardımıyla A_c matrisi yönetilebilir kanonik yapı için direk yazılabilir. B_c bu yapıda bilinmektedir. Bu durumda her iki model içinde yönetilebilirlik matrisleri bulunabilir

$$\wp = [B \ AB \ A^2B \ ...A^{n-1}B]$$

$$\wp_c = [B_c \ A_cB_c \ A_c^2B_c \ ...A_c^{n-1}B_c].$$

Bu iki matris arasındaki ilişki

$$\wp_c = P_c^{-1}\wp$$

olacağına göre $P_c = \wp\wp_c^{-1}$ eşitliğinden P_c bulunur.
Örnek :

Gözlenebilir yapıya dönüştürme

$$v(k) = P_o v_c(k)$$

Yönetilebilir yapıya geçişde olduğu gibi benzer yol izlenebilir.

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \vartheta_c = \begin{bmatrix} C_o \\ C_oA_o \\ . \\ . \\ . \\ C_oA_o^{n-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$P_o = \vartheta^{-1}\vartheta_o$$

dönüşüm matrisi bulunur.

Ayrık zamanlı sistemlerin kararlılığı

Sonlu giriş sonlu çıkış anlamında kararlılık
Sisteme sonlu giriş uygulanıp sonlu çıkış gözlenmesi için

$$y(n) = CA^n v(0) + \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k}Bx(k) + Dx(n)$$

denkleminde A^n'nin her n için sonlu olması gerekir. Jordan yapısını kullanarak

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

ve

$$J_i{}^n = \begin{bmatrix} \lambda_i{}^n & n\lambda_i{}^{n-1} & .5n(n-1)\lambda_i{}^{n-2} & ... \\ 0 & \lambda_i{}^n & k\lambda_i{}^n & ... \\ . & . & . & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i{}^n \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak sistemin kararlı olabilmesi için (herhangi bir n için)

$$|\lambda_i| < 1$$

$i = \{1, 2, ..., r\}$ (r özdeğer sayısı).
Liapunov anlamında kararlılık Sistemin özdeğerlerini büyük boyutlu sistemler için hesaplamanın zor olması SGSÇ anlamında kararlılık yerine Liapunov anlamında kararlığın kullanılmasını gereklikılar.
Giriş $x = 0$ için denge noktası orijin ($v = 0$) olan

$$v(k+1) = Av(k)$$

sisteminde. Sistem denge noktasına varana kadar enerjisini azaltır! Bu durumda eğer sisteme ilişkin enerji fonksiyonunun (Liapunov fonksiyonun)

$$V(v(k) = v(k)^T Pv(k)$$

zamanla azaldığı gösterilebiliyorsa sistemin kararlılığını gösterebiliriz.

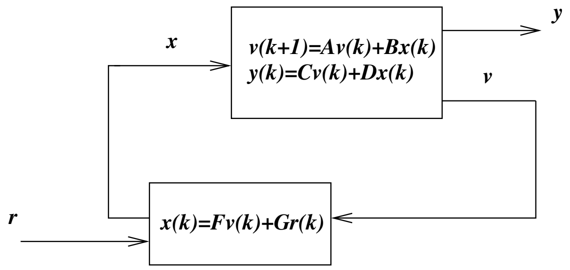
P pozitif tanımlı matris olmak üzere (bütün v'ler için $V(v(k)) \geq 0$)

$$\begin{aligned} \triangle\, V(v(k)) &= V(v(k+1)) - V(v(k)) \\ &= v^T(A^TPA - P)v \end{aligned}$$

Eğer $-(A^TPA - P)$ pozitif tanımlı ise sistem kararlıdır.

Durum geribeslemesi

Yönetilebilir her sistem uygun durum geri beslemesi yardımıyla kararlı hale getirilebilir.



$$\begin{aligned} v(k+1) &= Av(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cv(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

sisteme F matrisi yardımıyla

$$x(k) = Fv(k) + Gr(k)$$

geribeslemesi uygulayalım. Bu durumda geribeslemeli sisteme (kapalı çevrime) ilişkin durum denklemi

$$\begin{aligned} v(k+1) &= (A+BF)v(k) + BGr(k) \\ y(k) &= (C+DF)v(k) + DGr(k) \end{aligned}$$

Bu sistemin kararlığını $A + BF$ matrisi belirler.
Sistem yönetilebilir olduğuna göre bu sistem yönetilebilir yapıya sokulabilir.

$$A_c + B_cF_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1\ f_2 \dots f_{n-1}\ f_n]$$

Geribesleme yardımıyla sistemin karakteristik denklemi değişmiştir ve

$$P_c = z^n + (a_1 - f_n)z^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - f_2)z + (a_n - f_1)$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi istenen polinom geribesleme yardımıyla sağlanabilmektedir.

Kutup yerleştirme

Geribesleme kullanılarak geribeslemeli sistemin kutupları P_c yardımıyla istendiği gibi seçilebilir. Daha sonrada orjinal sisteme ait F

$$F_cv_c(k) = F_cP_c^{-1}v(k) = [F_cP_c^{-1}]v(k)$$

yardımıyla $F = F_cP_c^{-1}$ şeklinde bulunur.
Giriş işareti kazançı: (G nin hesaplanması) Kapalı çevrime ilişkin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \hat{C}(zI - A)^{-1}\hat{B} + \hat{D}$$

ve $\hat{A} = A + BF$ $\hat{B} = BG$ $\hat{C} = C + DF$ $\hat{D} = DG$ olmak üzere. Bir tane çıkış olduğu durumda DC kazanç

$$dc\ kazanc = H(1)$$

şeklinde hesaplanır (Birim kazanç istenildiği düşünüldüğünde $H(1) = 1$ denklemi için uygun G bulunur).

Kararsız bir sistemin geri besleme yerdımıyla kararlı hale getirilmesi.Kapalı çevrim kutupları :$0.5 \pm 0.5j$

```
A=[.2 1;2 -.2];B=[1;1];C=[1 0];
sys_c=ss(A,B,C,0);
% Ayrıklaştırma işlemi
sys_d=c2d(sys_c,1,'zoh');
[num_d den_d]=ss2tf(sys_d.a,sys_d.b,sys_d.c,0);
Ac=[0 1;-den_d(3) -den_d(2)];Bc=[0;1];
% OC=ctrb(sys_d.a,sys_d.b)
OCo=ctrb(Ac,Bc);
Pc=OC*inv(OCo);
% 0.5±0.5j için P(z)=z^2-z+.5
Fc(2)=1+den_d(2);
Fc(1)=-.5+den_d(3);
F=Fc*inv(Pc);
```