Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

Ayrık zaman durum denklemlerinin çözümü

$$\begin{aligned} v(k+1) &= Av(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cv(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(1) &= Av(0) + Bx(0) \\ v(2) &= Av(1) + Bx(1) = A^2 v(0) + ABx(0) + Bx(1) \\ . \quad &\quad . \\ . \quad &\quad . \\ . \quad &\quad . \\ v(n) &= A^n v(0) + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} Bx(k) \end{aligned}$$

Burda çözüm öz ve zorlanmış çözümlerin toplamı şeklindedir.
$y(n)$ nasıl bulunur ?

$$y(n) = CA^n v(0) + \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k} Bx(k) + Du(n)$$

Kontrol edilebilirlik

Yönetilebilirlik (Kontrol edilebilirlik (*Controllability*))

$$\begin{aligned} v(k+1) &= Av(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cv(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

ayrık zamanlı sistemi herhangi bir başlangıç durumundan herhangibir duruma sonlu adımda kontol işareti x yardımıyla götürülebiliyorsa yönetilebilir denir.

$$\begin{aligned} v(n) - A^n v(0) &= \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} Bx(k) \\ &= Bx(n-1) + ABx(n-2) + ... + A^{n-1}Bx(0) \end{aligned}$$

$$v(k) - A^n v(0) = [B \ AB \ A^2B \ ...A^{k-1}B] \begin{bmatrix} x(k-1) \\ x(k-2) \\ . \\ . \\ . \\ x(0) \end{bmatrix}$$

Yönetilebilirlik testi

Bir ayrık zamanlı sistemin kontrol edilebilirlik matrisinin rankı sistemin derecesine eşitse bu ayrık zamanlı sistem yönetilebilir denir.

Örnek : Aşağıdaki ayrık zamanlı sistem yönetilebilirmi? Eğer öyleyse sistemi orjine götüren en kısa giriş nedir ?

$$v(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} x(k), \;\; v(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Katsuhiko Ogata, Discrete-Time Control Systems, Pearson Education (1994) Chapter 6

Minimum norm çözümü

Burda esas olarak n tane bilinmeyen x'i m adet denklem yardımıyla bulmaya çalışıyoruz. $A \in R^{m \times n}$ olmak üzere bu problem matris formunda yazılabilir

$$Ax = y.$$

Bunun çözümü A'nın tersine bağlıdır.

- $m > n$ olduğu durum. Bilinmeyen sayısından fazla denklem olmasına eşdeğer düşer. Minimum norm çözümü

  $$\widehat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

  şeklinde bulunur ve bu çözüm

  $$\min_x \|Ax - y\| = \|A\widehat{x} - y\|.$$

- $n > m$ olduğu durum.

  $$\widehat{x} = A^T (A^T A)^{-1} y$$

Açık çevrim regülasyonu

Bir sistem kontol girişi yardımıyla sıfır olmayan bir durumdan sıfıra götürelebiliyorsa sistem regüle edilmişdir denir.
pp. 271

Gözlenebilirlik

Gözlenebilir (*Observability*)

Ayrık zamanlı sistemde eğer sonlu adımda bilinen bir giriş x(k) ve çıkış y(k) $k = 0, 1, 2 ... q$ değerlerinden v(0) bulunabiliyorsa sistem tamamen durum gözlenebilirdir denir.

$$y(n) = CA^n v(0) + \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k} Bx(k) + Dx(n)$$

Girişlerin etkisi bilindiğine göre bu problem

$$y(n) = CA^n v(0)$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki eşitlikten v(0) bulunabilir mi ?

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^q \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ . \\ . \\ . \\ y(q) \end{bmatrix}$$

Bu denklem eşitliğin sol tarafı lineer bağımsızsa çözülebilir. Gözlenebilirlik matrisi (yukardaki matrisin rankı $q = n - 1$' den büyük olmaz.)

Gözlenebilirlik testi

Ayrık zamanlı bir sistemin gözlenebilirlik matrisinin

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C & CA & \ldots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

rankı sistemin derecesine eşitse bu sistem gözlenebilirdir denir.

Transfer fonksiyonundan durum denklemine geçiş: Jordan Kanonik yapısı

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^i}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^i} \\
&= b_N + \frac{R_1}{z-\lambda_1} + \frac{R_2}{z-\lambda_2} + \ldots + \frac{R_N}{z-\lambda_N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &\triangleq \frac{U}{z-\lambda_1} \qquad & v_1(n+1) = \lambda_1 v_1(n) + x(n) \\
v_2 &\triangleq \frac{U}{z-\lambda_2} \qquad & v_2(n+1) = \lambda_2 v_2(n) + x(n)
\end{aligned}
$$

Bu bize paralel gerçekleme yöntemini hatırlatmaktadır !

$$
\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+2) \\ . \\ . \\ . \\ v_N(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ . \\ . \\ . \\ v_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} x(n)
$$

$$y(n) = [R_1 \ \ R_2 \ \ ...R_N] \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ . \\ . \\ . \\ v_N(n) \end{bmatrix} + b_N x(n)$$

NOT: Katlı kutup var ise ?

Örnek :