Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

1. Önbilgi
   - Kaynaklar
   - İşaretler
   - Ayrık zamanlı sistemler
   - z dönüşümü
   - Ters z dönüşümü

Kaynaklar

- Digital Signal Processing, A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, Prentice-Hall, Inc.
- Discrete-Time Control Systems, Katsuhiko Ogata, Pearson Education (1994)
- Digital Filters and Signal Processing, 2nd ed., Leland Jackson, Kluwer Publishing Co.
- Digital Filtering: An Introduction, Edward P. Cunningham
- Digital signal processing with Field Programmable Gate Arrays, Uwe Meyer-Baese.
- Sayısal işaret işleme, Ahmet H. Kayran, İTÜ matbası,1990

Önbilgi

İşaret, bir veya birden fazla bağımsız değişkenin bir fonksiyonudur. Bu dersde bağımsız değişken olarak zaman t kullanılaçakdır.

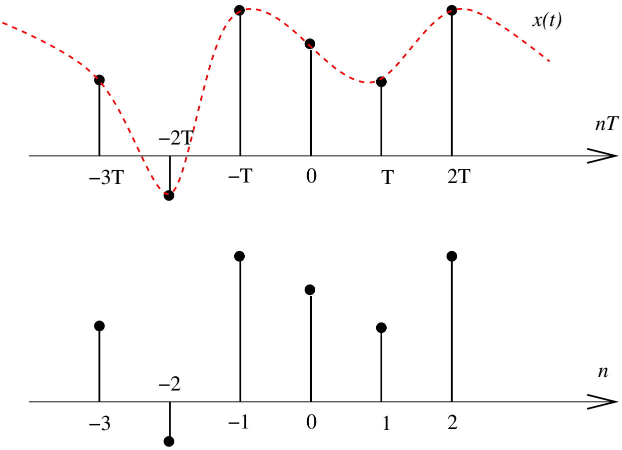
- Analog işaretler (*continuous-time or continuous signals*): zamanda süreklidir ve sürekli değere sahiptir.

Önbilgi

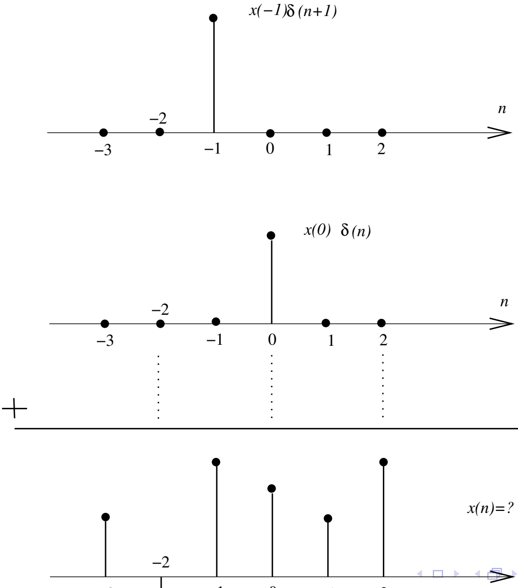
İşaret, bir veya birden fazla bağımsız değişkenin bir fonksiyonudur. Bu dersde bağımsız değişken olarak zaman t kullanılaçakdır.

- Analog işaretler (*continuous-time or continuous signals*): zamanda süreklidir ve sürekli değere sahiptir.
- Ayrık zaman işaretleri (*discrete-time or discrete signals*): Zamanda ayrıktır ve sürekli değere sahiptir.
  Örnek : Ayrık zamanlı işaretler $x(k)$, x_k ve $x(kT)$ ($T = \frac{1}{f_s}$) şeklinde gösterilebilir ve $x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$.
- Sayısal (Dijital) işaretler (*digital signals*): Zamanda ayrıktır vede değeri kuantalanmıştır.
  Ayrık zamanlı işaretin bilgisayarda işlenebilmesi için bu işaretin binary olarak kodlanmasi gerekmektedir. Bu nedenle sayısal işaret, ayrık zamanlı işaretin genliğinin kuantalamasıyla elde edilir.

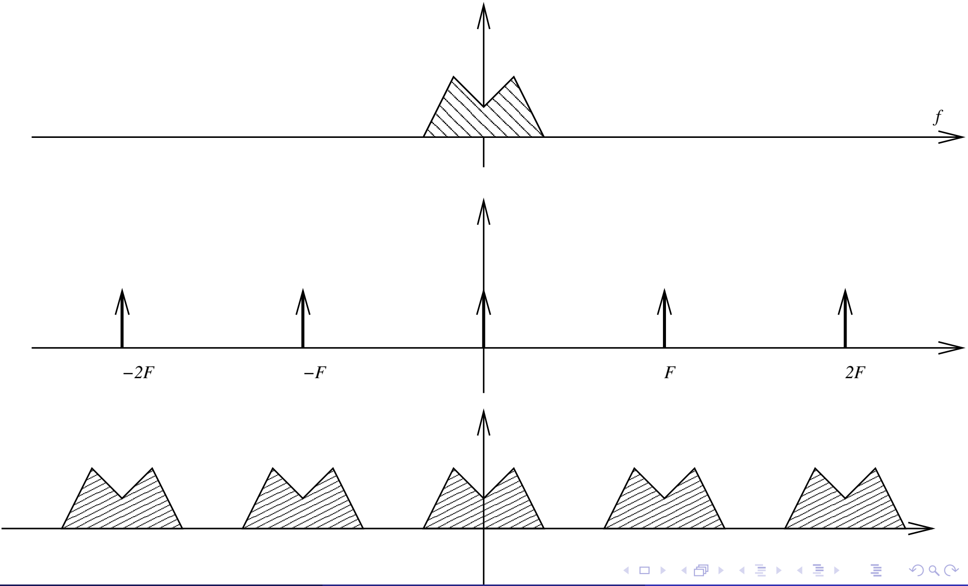
Önbilgi



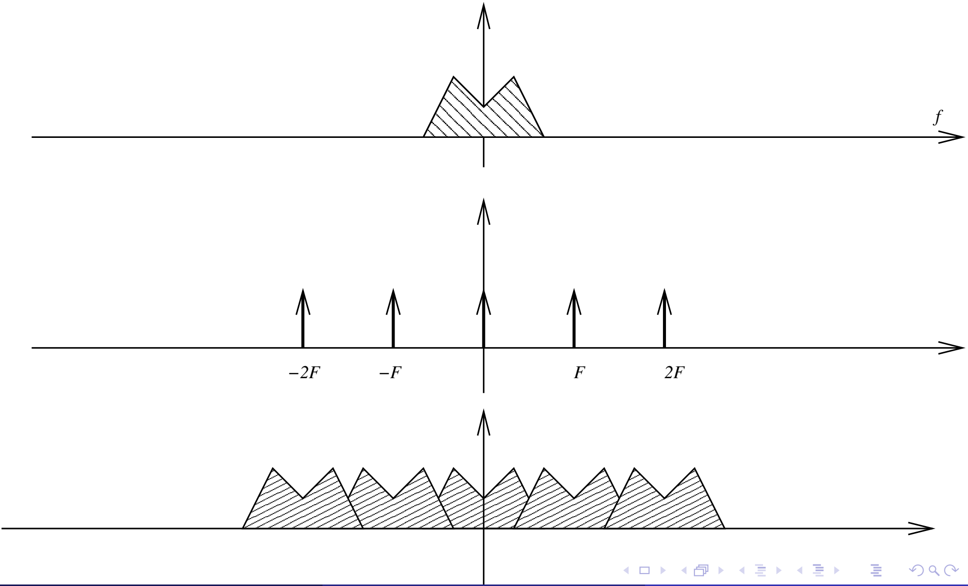
Önbilgi



Önbilgi



Önbilgi



Ayrık zamanlı işaretler

Ayrık zamanlı işaretler reel (veya kompleks) sayı dizisi ile gösteriyoruz. Temel ayrık zaman işaretleri:

- impuls işareti

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{diger} \end{cases}$$

- Birim darbe işareti

$$u(n-k) = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

- Üstel işaret $x(n) = a^n \text{ for all} n$
- sinüzoidal işaret $x(n) = A\cos(wn + w_0)$

Ayrık zamanlı işaretler

* Nedensel işaret (*Casual signal*)

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$

* Nedensel olmayan işaret

$$x(n) = 0, \quad n > 0$$

* İki taraflı işaret

$$x(n) \neq 0, \quad n > 0, n \leq 0$$

* Peryodik işaret (En küçük N temel peryodu.)

$$x(n) = x(n + N)$$

Ayrık zamanlı işaretler

* Ayrık zaman işaretinin enerjisi

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

* Ayrık zaman işaretinin ortalama gücü

$$P_{ort} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

* Peryodik işaretin ortalama gücü

$$P_{ort} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Ayrık zamanlı sistemler

Ayrık sistem girisine $x(n)$ uygulanan ayrık zamanlı işareti işleyerek çıkışında yeni bir ayrık zamanlı işaret üretir $y(n) = T[x(n)]$.

* Lineer sistem

$$y_1(n) = T[x_1(n)]; \; y_2(n) = T[x_2(n)]$$

$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

* Zamanla değişmezlik (*time invariant*)

$$y(n) = T[x(n)]$$

iken

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

oluyorsa, sistem zamanla değişmeyen sistem olarak adlandırılır.

Recursive ve nonrecursive sistemler

- non-recursive sistem

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i x(k-i)$$

Sonlu impulse yanıtlı filter tasarımı (*Finite impulse response (FIR)*)

- recursive sistem

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{m} b_i x(k-i)$$

Sonsuz impulse yanıtlı filter tasarımı (*Infinite impulse response (IIR)*)
Not: Çarpma ve birim geçikme için blok diagram gösterimleri.

Sistemler ve işaretler

Bir sistem temel test işaretleri yardımıyla karakterize edilebilir. Lineer zamanla değişmeyen (LZDM) sistemin girişi impulse işareti ile uyarıldığında, sistemin çıkışında ürettiği işaret delta cevabı (impulse cevabı) $h(n)$ olarak adlandırılır. Birim darbe cevabı bize sistem hakkında tam bir bilgi verir.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$y(n) = T[x(n)] = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

Yukardaki işlemler, sistem LZDM olduğu için yapılabildi !. Son eşitlik değişken dönüşümüyle elde edilebilir.

Nedensel sistem (*Causal or realizable*)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

n anındaki çıkış, n anından sonraki girişlere bağlı olmamalı. Bu durumda;

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

Bir sistem LZDM ve nedensel ise $n < 0$ için $h(n) = 0$ dır.
Yukarıdaki işlem bildiğimiz konvolisyon işlemidir.

Konvolisyon ve kararlılık

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

Bu işlemin sonucu sonlu veya sonsuz olabilir. Buda filtreleri sonlu impuls yanıtlı veya sonsuz impuls yanıtlı filtreler olarak iki kısma ayırır.

Kararlılık (Sonlu giriş sonlu çıkış anlamında)

$|x(n)| < \infty$ ve $|y(n)| < \infty \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Örnek : $y(k) = ay(k-1) + x(k)$

z dönüşümü

$x(t)$ $\rightarrow$[örnekleme] $\rightarrow \hat{x}(t) \rightarrow$[Laplace dönüşümü]$\rightarrow$ $\hat{X}(s) \rightarrow$ $[z = e^{Ts}] \rightarrow X(z)$ z-dönüşümü.

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

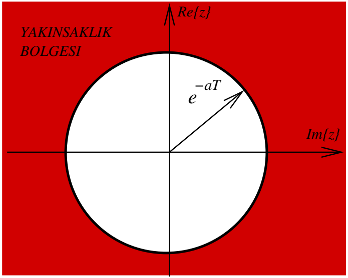
Bu çift taraflı z-dönüşümüdür. Tek taraflı $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$ bunun özel bir durumudur.

Örnek : $f(t) = e^{-at}u(t)$ işareti T ile örneklenmiştir. Örneklenen işaretin z dönüşümünü bulun.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k}$$

$$F(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

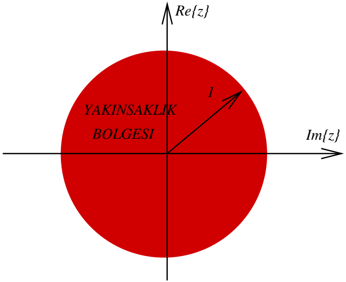
Bu toplam $e^{-aT}z^{-1} < 1$ için yazılır. Yakınsaklık bölgesi $|z| = r > e^{-aT}$ dir. z düzleminde yarıcapı e^{-aT} olan dairenin dışını ifade etmektedir. Bu durum nedensel işaretlerde karşılaşılır. Bu nedenle nedensel işaretler için tek taraflı dönüşüm kullanılır.



Örnek : $f(k) = u(-k)$ işaretin z dönüşümünü bulun.

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} = \frac{1}{1-z}$$

ve $|z| = r < 1$. Yakınsaklık bölgesi birim dairenin içidir. Bu durumda nedensel olmayan işaretler için tipik bir durumdur.



z dönüşümü

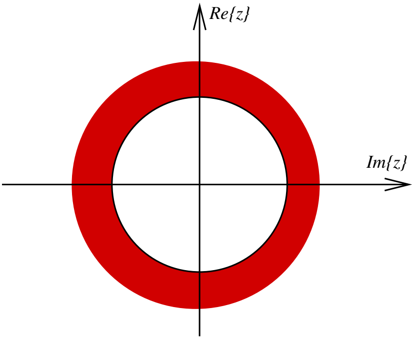
Örnek : $|a| < 1$ için $f(k) = a^{|k|}$ işaretinin z dönüşümünü bulun.

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k}z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty} a^l z^l - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

$$F(z) = \frac{az}{1-az} + \frac{z}{z-a}$$

Ilk terim $|z| < 1/|a|$ ikinci terim $|z| > |a|$yardımıyla yazılabilmiştir. Bu nedenle yakınsaklık bölgesi $|a| < |z| < 1/|a|$ dir. Bu tür işaretlerde iki taraflı işaretler olarak adlandırılır.

z dönüşümü



NOT: Ters dönüşüme dikkat !

TABLE 3.1 z-Transforms of Some Basic Sequences

Sequence	$f(kT),\ k \geq 0$	$F(z)$
1. Unit pulse	$\delta(k)$	1
2. Unit step	$u(kT)$	$\dfrac{z}{z-1}$
3. Unit ramp	kT	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
4. Exponential	e^{-akT}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
5. Power	a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
6. Sinusoid	$\sin\omega_0 kT$	$\dfrac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
7. Cosinusoid	$\cos\omega_0 kT$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
8. Damped sinusoid	$e^{-akT}\sin\omega_0 kT$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin\omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
9. Damped cosinusoid	$e^{-akT}\cos\omega_0 kT$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$

available to find the inverse transform. We will discuss the three principal

z-dönüşümünün özellikleri

- Lineerlik

$$\mathcal{Z}\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1\mathcal{Z}\{x_1(n)\} + a_2\mathcal{Z}\{x_2(n)\}$$

- Zamanda öteleme, $\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = z^{-m}X(z)$
- a^n ile çarpma

$$\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = X(a^{-1}z), \mathcal{Z}\{x(-n)\} = X(z^{-1})$$

- indeks ile çarpma

$$\mathcal{Z}\{nx(n)\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

- Konvalisyon işlemi

$$\mathcal{Z}\{x(n) * y(n)\} = X(z)Y(z)$$

- İlk değer teoremi

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

- Son değer teoremi $|z| > 1$ ve $(z-1)X(z)$ birim daire üstünde ve dışında kutbu yoksa $x(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

Ters z-dönüşümü

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

Dikkat: Yakınsaklık bölgesi !

Ters dönüşüm için kesirlere ayırma ve Residue methodları kullanılabilir.

$$x(n) = \pm \sum X(z) z^{n-1} \mid_{z=\mathrm{residue}\{X(z)z^{n-1}\}}$$

Not : Nedesel ise + nedensel değilde ise -.

Örnekler :

a) $X(z) = \frac{z+0.2}{(z+0.5)(z-1)}, \; |z| > 1$

b) $X(z) = \frac{z}{(z-3)(z-4)}, \; |z| < 3$

c) $X(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z-2)}, \; 0.5 < |z| < 2$