MAT 271 Olasılık 1. vize Bahar 2009

1. K: Kaliteli olma olayı

a) $P(\bar{K}) = P(\bar{K}, A) + P(\bar{K}, B) + P(\bar{K}, C)$

$= P(\bar{K}|A)P(A) + P(\bar{K}|B)P(B) + P(\bar{K}|C)P(C)$

$= 4p(0.1) + 2p(0.2) + p(0.7)$

$= 1.5p$

b) $P(A|\bar{K}) = \dfrac{P(\bar{K}, A)}{P(\bar{K})} = \dfrac{4p(0.1)}{1.5p} = 0.2666$

2. a) Belli bir bilyayı çektiğimizde diğer çekilen bilyalar için örnek uzayını değiştiriyoruz. Yerine koymadan örnekleme yaptığımız için bu olaylar birbirinden bağımsız değildir

b) $P(A) = \dfrac{n_A}{n}$ klasik olasılık tanımı.

A: s_1 sarı, $t-s_1$ sarı olmayan çekme olayı

$n_A = \binom{s}{s_1}\binom{m+k}{t-s_1}$: sarıları seç ve sarı olmayanlarla eşleme

$n = \binom{s+m+k}{t}$: toplam $s+m+k$ bilyadan t adet bilya seçme.

$$P(A) = \frac{\binom{s}{s_1}\binom{m+k}{t-s_1}}{\binom{s+m+k}{t}}$$

c) Benzer şekilde

$$P(B\cap A) = \frac{n_{BA}}{n}$$

B: Çekilen $t-s_1$ bilyanın m_1'inin mavi olması olayı.

$B\cap A$: Çekilen t bilyadan s_1'inin sarı, $t-s_1$ bilyadan m_1'inin mavi olması olayı.

$$n_{BA}: \binom{s}{s_1}\binom{m}{m_1}\binom{k}{t-s_1-m_1}$$

$$P(B\cap A) = \frac{\binom{s}{s_1}\binom{m}{m_1}\binom{k}{t-s_1-m_1}}{\binom{s+m+k}{t}}$$

Extra: Buradan $P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{\binom{s}{s_1}\binom{m}{m_1}\binom{k}{t-s_1-m_1}}{\binom{s}{s_1}\binom{m+k}{t-s_1}}$

Çekilen s_1 bilya sarı olduğunda m_1 bilyanın mavi $t-s_1-m_1$ bilyanın kırmızı olması olasılığı.

3. a) Ayrık bir rastgele değişken için

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{X=x_i\}\,\delta(x-x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p\,\delta(x-i)$$

$$= p\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1}\,\delta(x-i)$$

b) $$Pr\{X>5\} = \int_{5^+}^{\infty} f_X(x)\,dx = p\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}\underbrace{\int_{5^+}^{\infty}\delta(x-i)\,dx}_{=0 \text{ for } i\le 5}$$

$$= p\sum_{i=6}^{\infty}(1-p)^{i-1}$$

$j=i-6$

$$= p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^{j+5}$$

$$= p(1-p)^5\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j$$

$$= p(1-p)^5\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^5$$

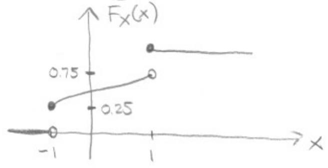
c) $$Pr\{X>5 \mid X>2\} = \frac{Pr\{X>5, X>2\}}{Pr\{X>2\}}$$

$$= \frac{Pr\{X>5\}}{Pr\{X>2\}}$$

$$= \frac{(1-p)^5}{(1-p)^2} = (1-p)^3$$

4) a) Ayrık gerçeklemeler $x_1=-1 \quad x_2=1$
Sürekli gerçeklemeler $\{x: -1 < x < 1\}$

b)



c) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$1 = 0.25\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-1)\,dx + 0.25\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+1)\,dx + c\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{8}}\big(u(x+1)-u(x-1)\big)\,dx$$

$$1 = 0.5 + c\int_{-1}^{1}e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx$$

$$1 = 0.5 + c\sqrt{2\pi 4}\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi 4}}e^{-x^2/8}\,dx}_{F_X\left(\frac{1}{2}\right)-F_X\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$0.5 = c\sqrt{8\pi}\,(0.691 - 0.309)$$

$$c = 0.293$$

d) $$Pr\{X \geq 0.5\} = Pr\{X > 0.5\} + \underbrace{Pr\{X = 0.5\}}_{\emptyset}$$

$X = 0.5$ ayrık gerçeklene değil.

$$= \int_{0.5}^{\infty} f_X(x)\,dx$$

$$= 0.25\underbrace{\int_{0.5}^{\infty} \delta(x-1)\,dx}_{1} + 0.25\underbrace{\int_{0.5}^{\infty} \delta(x+1)\,dx}_{\emptyset}$$

$$+ \int_{0.5}^{\infty} c\, e^{-x^2/8}\,(u(x+1) - u(x-1))\,dx$$

$$= 0.25 + c\sqrt{8\pi}\int_{0.5}^{1} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-x^2/8}\,dx$$

$$= 0.25 + c\sqrt{8\pi}\left(F_X\left(\tfrac{1}{2}\right) - F_X(0.25)\right)$$

$$= 0.25 + \frac{0.5}{(0.691 - 0.309)}\,(0.691 - 0.599)$$

$$= 0.3704$$