

Problem seti 3 – Çözümler 11. Hafta başında webe konulacaktır.

1. Bir rastgele değişkenin yoğunluk fonksiyonu $f_X(x) = \begin{cases} (5/4)(1-x^4) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{diğer } x \end{cases}$

olarak ifade edilmektedir.

$E[X]$, $E[4X + 2]$ ve $E[X^2]$ 'yi bulun.

2. Parametresi b olan Poisson rastgele değişkeninin karakteristik işlevini bulun ve bunu kullanarak ilk iki momentini hesaplayın.

3. Rastgele değişken X 'in fonksiyonu $g(X) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$ olarak verilmiş olsun.

$E[g(X)] = 1 - F_X(x_0)$ olduğunu gösterin.

4. X rastgele değişkeni $Y = a/X$ dönüşümünden geçtiğinde elde edilen Y rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonunu bulun. (a reel bir sayıdır.)

5. Örnek uzayı $S = \{\zeta_1, \dots, \zeta_5\} = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$ olsun. İki rastgele değişkeni $X(\zeta) = \zeta$ ve $Y(\zeta) = \zeta^2$ olarak tanımlayalım.

a) X ve Y 'nin bağımlı

b) X ve Y 'nin ilintisiz

olduğunu gösterin.

6. Bir birleşik yoğunluk fonksiyonu

$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/ab & 0 < x < a \text{ ve } 0 < y < b \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

olarak verilmiş olsun.

a) Karşılık gelen birleşik dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b) $\Pr\{X + Y \leq 3a/4\}$ ve $\Pr\{Y \leq 2bX/a\}$ olasılıklarını bulunuz.

7. Yarıçapı r olan bir dart tahtasına atılan dartların pozisyonları bileşenleri X ve Y olan bir vektör ile belirlenmektedir. Bileşenlerin birleşik yoğunluğu birbiçimdir. Yani

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/\pi r^2 & x^2 + y^2 < r^2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

a) Bileşenlerin herbirinin (marjinal) yoğunluğunu bulunuz.

b) Bileşenlerin nokta koşullu yoğunluk fonksiyonları $f_X(x|Y=y)$ ve $f_Y(y|X=x)$ 'yi bulunuz. Bileşenler birbirine istatistiksel bağımlı mıdır?

8. İki ayrık rastgele değişkenin birleşik yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X,Y}(x, y) = 0.1\delta(x)\delta(y) + 0.12\delta(x-4)\delta(y) + 0.05\delta(x)\delta(y-1) + 0.25\delta(x-2)\delta(y-1) + 0.3\delta(x-2)\delta(y-3) + 0.18\delta(x-4)\delta(y-3)$$

olarak verilmektedir. Bunların marjinal dağılımlarını bulup çiziniz.

9. Bir rastgele değişken X 'in yoğunluk fonksiyonu

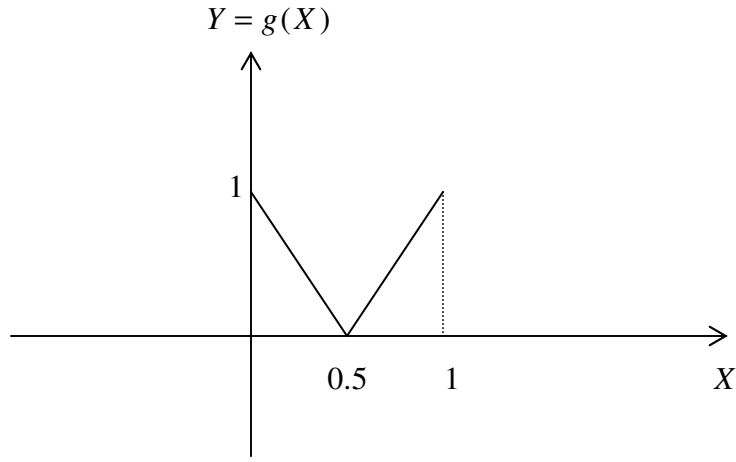
$$f_X(x) = \begin{cases} (1/2)\cos(x) & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak verilebilir. $g(X) = 4X^2$ fonksiyonunun beklenen değerini bulunuz.

10. Bir rastgele değişken X -4, -1, 2, 3 ve 4 değerlerinin herbirini 0.2 olasılıkla almaktadır. $Y = 3X^3$ rastgele değişkeninin yoğunluk, beklenen değer ve varyansını bulunuz.

11. X standart Gauss rastgele değişkeni olsun. $Y = \sqrt{X}u(X)$ ise Y 'nin yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

12. X [0,2] aralığında bir biçim bir rastgele değişken olsun. $g(\cdot)$ aşağıdaki gibi verildiğinde ve $Y = g(X)$ ise Y 'nin yoğunluk fonksiyonunu bulun.



13. 2. Ödev 6. Sorudaki sistem 20 hafta dayandığına göre sistemin yaşam süresinin (koşullu)yoğunluk fonksiyonu ve (koşullu) beklenen değeri nedir?