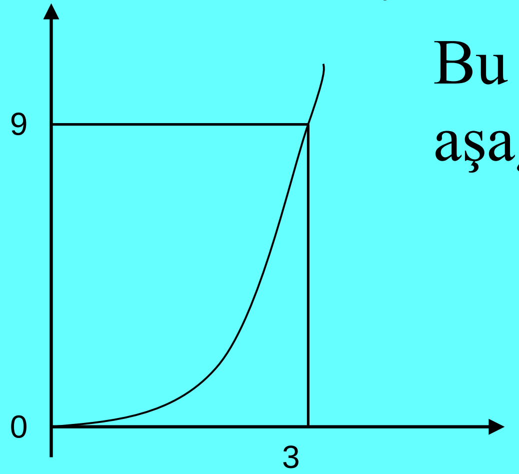
İlginç Bir Örnek- İhtimal İntegrali

•İhtimaller hesabı, matematikte bile analitik olarak çözülemiyen problemler için işe yaramaktadır. Buna bir örnek teşkil etmesi bakımından gelişi güzel bir alanın nasıl hesap edildiğini inceleyelim.

•Bilindiği gibi klasik matematikte alan deyince bir eğrinin altında kalan kısmın belirli sınır değerleri arasındaki integrali anlaşılır. İntegralin alınabilmesi için eğri fonksiyonunun sürekli ve analitik ifadesinin $y = f(x)$ şeklinde verilmesi gerekir. Bu durumda $y = x^2$ parabolünün 0'dan 3'e kadar olan ve eğri altında kalan alanı integral hesabı ile kolayca bulunabilir.



Bu A alanın matematik olarak gösterimi ve hesabı için aşağıdaki integralin alınması yeterlidir. Bu durumda

$$A = \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

Ancak eğrinin analitik ifadesinin olmaması halinde alanın integral hesap ile bulunması mümkün olmaz. Bazen de analitik ifadesi olan fonksiyonların integrali alınamaz. En basit bir örnek olarak, aşağıdaki fonksiyonun, yine 0 ile 3 arasında eğri altındaki alanını bulmak için

$$A = \int_0^3 e^{-x^2} dx$$

•İfadesinin analitik yöntemlerle çözülmesi gerekir.

•Alışılagelmiş integral hesap yöntemleri ile bu alanın hesap edilmesi mümkün değildir. Bunun için, genelde sayısal çözümleme yöntemlerine başvurulur.

•Bu durumda integralinin alınması mümkün olmayan ifadelerin sayısal değerinin bulunmasında ihtimaller hesabından şu şekilde faydalanılabilir

İki slayt öncesinde verilen şekildeki parabol örneğini tekrar düşündüğümüzde istenilen alan 9 olarak bulunmuştur. Bu istenilen alan kenar uzunluğu 3, 9 ve alanı 27 birim olan bir dikdötgenin parçasıdır. Bu alanın, tüm parçanın %y'si olacağı ihtimaller açısından düşünülebilir.

- y=*A/AD*

- Bu durumda parabol örneğinde 9/27 = 0.3333 olacaktır. Eğer yüzde (y) değeri bilinirse bu durumda

- *A* = y. *AD*

- Bağıntısı kolayca bulunabilir.

Acaba bu yüzdeyi, yani ihtimali hiç integral almadan bulabilirmiyiz?

Bunun için;

•Daha önce belirtilen sınır şartları içinde kalmak şartı ile çok sayıda rastgele noktalar üreterek bunlardan kaç tanesinin istenilen alan içerisine düştüğüne bakmak gerekir.

•Tanım olarak istenilen alan içerisine düşen nokta sayısının toplam nokta sayısına oranı, aradığımız yüzdeyi verir. Ancak sorun bununla da bitmez,

•**Acaba Bu Sayıları nasıl üreteceğiz?**

•**Kaç tane sayı üreteceğiz?**

•Rastgele kişilere sorularak bu sayılar elde edilebildiği gibi, bilgisayarda RANDOM sayı üreteçleri ile de bunlar kolaylıkla elde edilebilir.

•Yapılan çalışmalarda görülmüştür ki pratik uygulamalarda 100, daha hassas sonuçlar için 500 nokta yeterli olmaktadır.

•Kısacası, klasik yöntemlerle alınamıyacak integrallerin rastgele sayı üreterek alınması mümkündür. Yeter ki istenilen alanı içine alan dikdötgen veya herhangi bir düzgün alan tanımlanabilsin.

Şu ana kadar açıklanan, rastgele sayı üreterek istenilen sonucu elde etme yöntemine **Monte Karlo Yöntemi** denir.

Bir Deneyin Örnek Uzayı

Daha önce anlatılan birbirinden farklı iki madeni para atımı deneyini düşünelim. Bu deneyin mümkün sonuçları;

Sadece yazı-tura ihtimallerini düşünürsek
S = {YY, YT, TY, TT} kümesi bütün mümkün ihtimalleri verir.

Yazı-tura sayıları için ("kaç tane yazı, kaç tane tura?" sorusu için"
S1 = {(2,0), (1,1), (0,2)} kümesi bütün ihtimalleri verir.

Aynı ve farklı gelme ihtimalleri için
S2 = {A, F} kümesini kullanırız.

•Bu kümelerin (S, S1, S2) her birine **deneyin örnek uzayı** denir.

•**Not:** S kümesi S1 ve S2'den daha temel bir örnek uzayıdır, çünki daha genel ve fazla bilgi ihtiva eder.

Tarif: Bir deneyin **örnek uzayı** bir S kümesidir, her bir deneyin sonucu bu kümenin bir elemanına karşı gelir. Örnek uzayındaki her bir elemana **örnek noktası** denir.

Sonuç olarak bir olay ile karşılaşıldığında veya bir deney yapıldığında öncelikle örnek uzay tespiti dikkatli yapılmalıdır. Örnek uzayın belirlenmesiyle bir anlamda sınır şartları belirlenmiş olur.

Problem: Üç çocuğu olan ailelerde çocukların cinsiyetine göre sayısı inceleniyor olsun. Böyle bir durumda örnek uzayı nedir?

Çözüm: K, kız ve E de erkek çocuğu gösteriyor olsun. Üç harfle, en genç, ortanca ve en büyük çocukları şöyle bir küme içinde gösterebiliriz;

{EEE, EEK, EKE, KEE, EKK, KEK, KKE, KKK}

Başka bir örnek uzayı, üç çocuklu ailelerde erkek çocuk sayısının listesini gösterebilir

{0, 1, 2, 3}

Problem: Üzerinde 1, 2, 3, 4 yazılı dört ayrı kağıt parçası bir şapka içinde karıştırılsın. Gözü kapalı bir kişi, birbiri ardına iki kağıt seçsin, fakat bunları yerine koymasın. Bu durumda deney için örnek uzayı ne olur?

Çözüm: Bu deneyin sonuçlarını birer çift sayı (x,y) ile gösterebiliriz. Burada x, birinci kağıttaki, y de ikinci kağıttaki sayı olsun ($1 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 4$, $x \neq y$)

y 2.kağıt x 1. kağıt	1	2	3	4
1	**----**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**
2	**(2,1)**	**----**	**(2,3)**	**(2,4)**
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**----**	**(3,4)**
4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**----**

Problem: Bir çocuğun cebinde kağıt para olarak birer tane 100, 50, 20,1 YTL bulunsun. Cebinden ikişer kağıt para çekse

a- Bunların toplamlarının örnek uzayı ne olur?

b- İki para çektiğinde 100 YTL'den büyük para çekme ihtimali ne olur?

c- 50 YTL'den büyük çekme ihtimali ne olur?

d- 20 YTL'de büyük çekme ihtimali ne olur?

Çözüm:

a) (100+20), (100+50), (100+1)	3
(50+20), (50+1)	2
(20+1)	1
Toplam	6, örnek uzayında 6 nokta bulunur

b) 100 YTL'den daha büyük çekme ihtimali	3/6
c) 50 YTL'den daha büyük çekme ihtimali	5/6
d) 20 YTL'den daha büyük çekme ihtimali	6/6

•**Problem:** Bir para atılıyor, sonra da bir zar. Bu deney için örnek uzayını yazınız.

Ç**özüm:**
Yazılar için mümkün noktalar: (Y,1), (Y,2), (Y,3), (Y,4), (Y,5), (Y,6)
Turalar için mümkün noktalar: (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)

Sonlu Bir Örnek Uzayında İhtimaller

Bir deney yapıldığında, deneyle ilgili değişik sonuçların bütün ihtimallerini bilmek isteyebiliriz. Bunu örnek uzayını ve eşit ihtimalli sonuçlarını sayarak yapabiliriz. Olabilirliklerin toplamını düşündüğümüzde sistemimizi tanımlamış oluruz.

Örnek: İki zar atışı, iki farklı renkte (kırmızı, beyaz) zar atışı için örnek uzayı:

k \ b	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	**(1,6)**
2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**
4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(4,4)**	**(4,5)**	**(4,6)**
5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	**(5,6)**
6	**(6,1)**	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,6)**

Bu örnekteki bütün örnek uzayı S, (k,b) gibi sıralı çiftlerin kümesidir. Burada her bir k ve b değeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 olacak şekildedir, dolayısıyla

$S = \{(k,b): 1 \leq k \leq 6,\ 1 \leq b \leq 6\}$

Sonuçta deneyin 6x6 = 36 mümkün sonucu vardır.

Şimdi şu sorulara cevap arayalım;
a- iki zarın aynı gelme ihtimali nedir?
b- Beyazın sayı değerinin kırmızıdan en az üç fazla olması ihtimali nedir?
c- k+b toplamının 10 olma ihtimali nedir?

- **Çözüm**
- a- b = k

çözüm kümesi: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)
ihtimal: 6/36 = 1/6

- b- $k+3 \leq b$

çözüm kümesi: (1,4), (1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,6)
ihtimal: 6/36 = 1/6

- c- k+b = 10

çözüm kümesi: (4,6), (5,5), (6,4)
ihtimal: 3/36 = 1/12

Bir deneyde çeşitli sonuçların ihtimallerinin bulunması için prosedür

- Bütün mümkün sonuçların S örnek uzayını kurun
- Örnek uzayındaki noktaların ihtimallerini yazın
- Bir E olayının ihtimalini bulmak için, S'nin alt kümesi olan E'ye ait noktaları toplayın
- E'nin nokta sayısını toplam nokta sayısına (S'nin elemanlarının sayısına) bölün

Olaylar ve Kümeler

•Daha önce bir olayı bir deneyin örnek uzayı olan S kümesinin alt kümesi olarak tarif etmiştik.

•AUB, A'ya veya B'ye (veya her ikisine) ait olan noktaların kümesi diyoruz. Böylece "A veya B" nin ihtimali

P(AUB) dir.

•Aynı şekilde A ve B'nin ihtimalini de
$P(A \cap B)$ olarak gösteriyoruz.

Problem: Çift zar atışı deneyinde kırmızı (k) ≤3 veya beyaz (b) ≤2 ihtimali nedir?

k \ b	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	**(1,6)**
2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**
4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(4,4)**	**(4,5)**	**(4,6)**
5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	**(5,6)**
6	**(6,1)**	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,6)**

Çözüm: k ≤3 şartını sağlayan noktaların kümesine A olayı, b ≤2 şartını sağlayan noktaların kümesine B olayı diyelim. Kırmızı zar 1,2 veya 3 olmalı. Burada kırmızı-beyaz zar tablosunda görüldüğü gibi A kümesi 18 noktadan ibarettir. Öte yanda b ≤2 için beyaz zar 1 veya 2 olmalı. B kümesi de böylece 12 noktadan ibaret olur. Bu iki kümede ortak olan 6 noktayı çıkarırsak:

AUB = 18+12-6 = 24 nokta olarak bulunur. P(AUB) = 24/36 = 2/3

Buradan da P(A) + P (B) – P(A∩B) = P(AUB) olur.

Bu durumda örnek için; 18/36 + 12/36 – 6/36 = 24/36

Problem: Aynı zar olayı için k <2 ve b<4 olması ihtimali nedir?

Çözüm: k<2 şartını sağlayan olaya A, b<4 şartını sağlayan olaya B dersek

P(A) = 6/36 P(B) = 18/36

P(A∩B) = 3/36 = 1/12

Problem: (k+b = 5) veya (k+b = 7) olma ihtimali nedir?

Çözüm: k+b = 5 için olay kümesi {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}

k+b = 7 için olay kümesi {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

P(A) = 4/36, P(B) = 6/36, A∩B = Ø

P(A) + P (B) – P(A∩B) = 10/36

Problem: (k+b = 5) ve (k+b = 7) olma ihtimali nedir?

Çözüm: k+b = 5 için olay kümesi {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}

K+b = 7 için olay kümesi {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

A∩B = Ø

P(A∩B) = 0/36 = 0

BİRBİRİNİ DIŞLAYAN (BAĞDAŞMAYAN) OLAYLAR

Eğer iki olay aynı anda olamıyorsa bunlara birbirini dışlayan (bağdaşmayan) olaylar denir.

Örnek: İki renkli çift zar atışında k+b toplamının 7 veya 10 olması ihtimali nedir?

k \ b	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	**(1,6)**
2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**
4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(4,4)**	**(4,5)**	**(4,6)**
5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	**(5,6)**
6	**(6,1)**	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,6)**

Çözüm: (k+b) = 7 olayı A için 6 nokta ve, k+b = 10 olayı B için de 3 nokta vardır. Bu iki olayın kümeleri kesişmediğinden

P(A) = 6/36, P(B) = 3/36

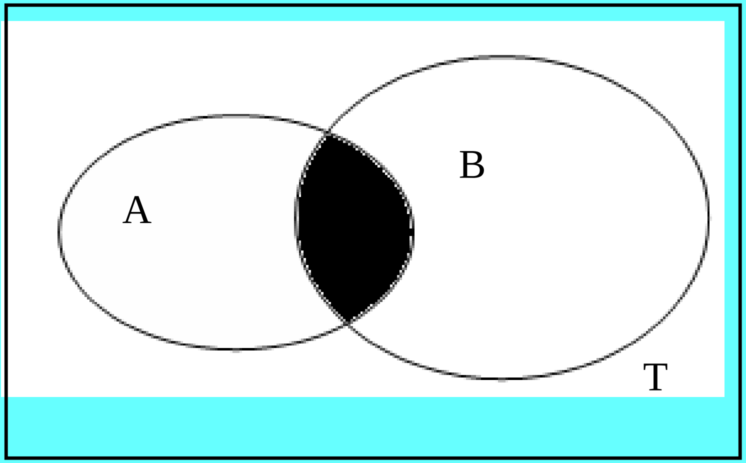
P(A∩B) = 0/36 = 0

P(AUB)= P(A) + P (B) = 6/36 + 3/36 = 9/36 = ¼

Tarif: Eğer hiçbir ortak noktaları yoksa n olay karşılıklı dışlayıcıdır yani bağdaşmazlar.

Toplama işlemi

İhtimaller hesabı varsayımları arasında üçüncü kural, olayların **bağdaşamaz (dışlayan)** olmaları halinde ihtimallerin toplanabileceğini söyler. Ancak iki veya daha fazla olayın bağdaşan olması durumunda toplamının nasıl yapılacağının da yine ihtimaller hesabı temel varsayımlarının kullanılması ile çıkarılabilmesi gereklidir. Bunun için A ve B gibi **bağdaşan** iki kümeyi düşünelim.



Şekil. Bağdaşan iki küme

Bağdaşan A ve B kümelerini bağdaşmayan (dışlayan) şeklinde yazmak için, yani A'yı aynen bırakıp B'yi A'dan soyutlamak için A'nın tamamalayıcısı ile B'nin kesişimini düşünelim. Bu durumda A ile kesişim kümesi bağdaşamaz (dışlayan) olduklarından ihtimal toplama kuralı uygulanabilir.

$$P(A \cup \overline{A} \cap B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$\overline{A} \cap B \cup A \cap B = T \cap B = B$$

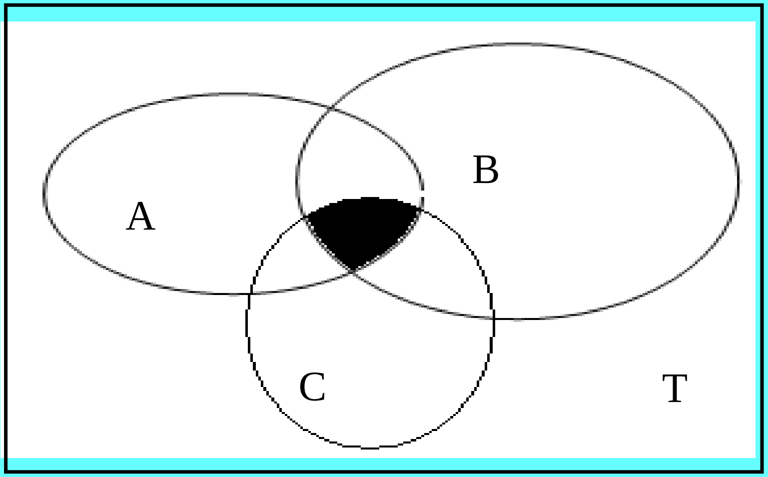
$A \cap B \;\; ve \; \overline{A} \cap B$ bağdaşmadıklarından $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Bu denklemin yukarıda bulunan $P(A \cup \overline{A} \cap B)$ denkleminde yerine konulmasıyla

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bunu pratik olarak akılda tutmak için A ve B kümelerinin birleşim alanına göre kümelerin içerildiğini fakat A ve B kümelerinin ortak alanı olan A∩B'yi iki defa içerdiğini düşünmek yeterlidir. Bu durumda ihtimallerin toplanmasında bu ortak alanı iki defa işin içine dahil etmemek için bir defa toplamdan çıkarılması gereklidir.

Bu son cümledeki ifadenin yukarıdaki toplamdan çıkarılması ile beraber iyice anlaşılmasından sonra A, B ve C gibi üç kümenin bulunması ve bunların bağdaşır olması durumunda aşağıdaki şeklin göz önünde tutulması ile birleşik olay (AUBUC) ihtimalinin

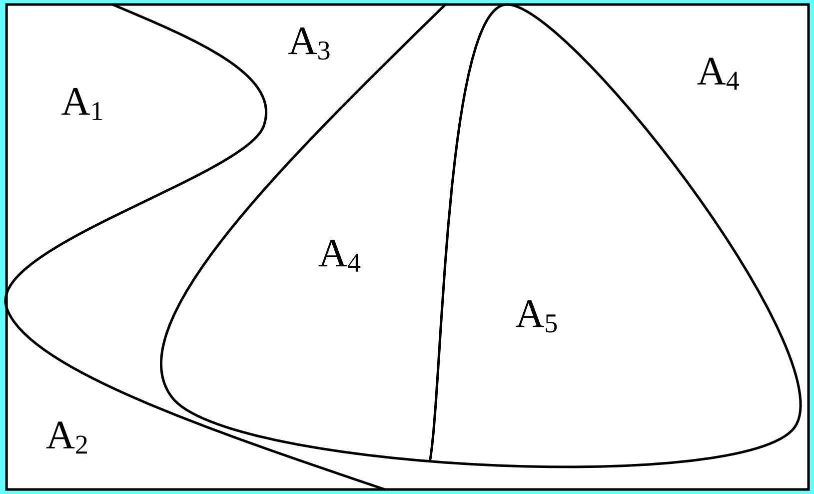


$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

şeklinde olduğu kolayca görülür.

BÖLÜMLEME

S



Hatırlanması gereken önemli noktalar:

Her olay için $0 \leq P(A) \leq 1$ olmalıdır.

Temel kümenin (S) ihtimali 1'e eşittir $P(S)=1$

A ve B olayları bağdaşmayan, yani ortak öğesi bulunmayan ayrık iki olay ise

$P(AUB) = P(A) + P(B)$

Teorem: Eğer A1, A2,......, An sonlu bir S kümesinin kısımlarıysa o zaman

$P(A1)+P(A2)+\dots\dots\dots+P(An) = 1$

$P(A1)+P(A2)+\dots\dots\dots+P(An) = P(A1 \cup A2 \cup \dots\dots\dots \cup An)$

$= P(S)$

$= 1$

Bu temel kurallar, ihtimaller hesabının tüm işlemlerinin kümeler teorisi ile birlikte yapılmasına yarar. İhtimal hesaplarının temelinde, birleşik olayların ihtimallerinin, mantık kuralları ile, basit olay ihtimallerinden bulunabilmesi ilkesi yatar

Problem: Bir lise öğretmeni beş öğrencisinden üçüne, sahib olduğu üç maç biletinden birer tane vermek istiyor. Öğrenciler a, b,c, d, e ise a ve b'nin veya b,c ve d'nin seçilme ihtimali nedir (A veya B olayı)?

Çözüm: Örnek uzayı 5'in 3'lü kombinasyonundan ibarettir, yani C(5,3) = 10

S = {abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde}

A= {abc, abd, abe}　　　　P(A) = 3/10

B = {bcd}　　　　P(B) = 1/10

P(A U B) = P(A) + P(B) = 3/10 + 1/10 = 4/10

Tamamlayıcı Olaylar :

Eğer A ve A olayı aynı örnek uzayının bütün noktalarını meydana getiriyorsa bunlara tamamlayıcı olaylar denir.

Teorem: A ve $\overline{A}$ tamamlayıcı olaylar ise

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(AU\overline{A}) = P(S) = 1$$

Problem: İki para atılıyor. E “iki-tura” olayı ve F de “iki-yazı” olayı olsun. E ve F olayları birbirini dışlayan olaylar mıdır? Birbirini tamamlayıcı olaylar mıdır? P(EUF) nedir?

Çözüm:

Örnek uzayı (S) = {yt, ty, yy, tt}

E = {tt}, F = {yy} P(EUF) = ¼ + ¼ = ½

E ve F birbirini dışlayan olaylardır, tamamlayıcı olaylar değildir.

Problem: İki renkli zar atışında zarların toplamının 11 olmaması ihtimali nedir?

Çözüm: Önce zarların 11 olması ($\overline{A}$) ihtimalini bulalım.

$\overline{A} = \{(5,6),(6,5)\}$ $\qquad$ $P(\overline{A}) = 2/36 = 1/18$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

BAĞIMSIZ OLAYLAR

İhtimal hesaplarında bağımsız olayların ne anlama geldiğini anlamak için bir örnek verelim

Problem: İki renkli zar deneyinde k≤3 ve b≥5 olması ihtimali nedir?

Çözüm: A, k≤3 ve B, b≥5 noktalarının kümeleri olsun. Bu iki kümenin ortak noktalarının kümesini (A∩B) bulalım.

Problem: İki renkli zar deneyinde k≤3 ve b≥5 olması ihtimali nedir?

k \ b	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	**(1,6)**
2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**
4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(4,4)**	**(4,5)**	**(4,6)**
5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	**(5,6)**
6	**(6,1)**	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,6)**

$P(A) = 18/36 = 1/2$

$P(B) = 12/36 = 1/3$

$P(A \cap B) = 6/36 = 1/6$

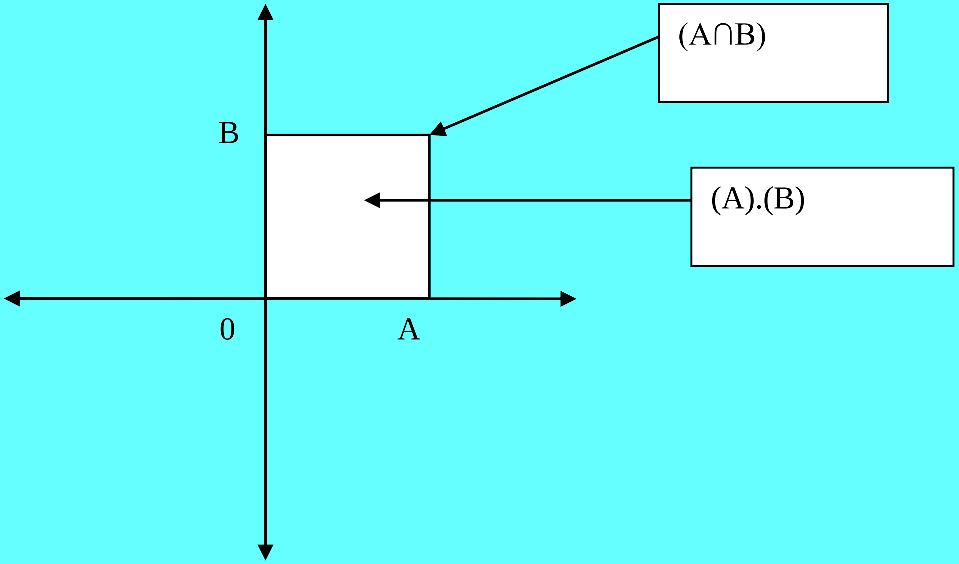
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$= 1/2 \,.\, 1/3 = 1/6$

Tarif: A ve B olayları eğer ve ancak P(A∩B) = P(A).P(B) ise bağımsızdır. İkiden fazla olay ancak P(A∩B∩C) = P(A).P(B).P(C) durumunda bağımsızdır.

Teorem: Eğer A ve B bağımsız olaylar ise ve ikisininde ihtimalleri sıfırdan farklı ise A ve B kümelerinin en az bir ortak noktası vardır.

Bağımsız olaylara verilecek en çarpıcı örneklerden bir tanesi kartezyan koordinat sistemidir. Kartezyen koordinatlarda x ve y arasındaki açı 90º olup bağımlı olmamayı (bağımsız olayı) ifade etmektedir ve sadece bir noktada kesişim gerçekleşmektedir. Belirli bir koordinatın yani kesişimin altında kalan alan ise eksen değerlerinin çarpımıyla elde edilmektedir.



Problem: İki para atışında "ilk para yazı" olayı ile "ikisi de aynı" olayının bağımsız olaylar olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Örnek uzayında dört nokta var {yt, ty, yy, tt}

İlk yazı A = {yy, yt}	P(A) = 2/4 = ½
İkisi de aynı B = {yy, tt}	P(B) = 2/4 = ½
$A \cap B$ = {yy}	$P(A \cap B)$ = ¼

Problem: İki renkli zar atışındaki kırmızı zarın çift ve beyaz zarın tek gelme ihtimali nedir?

Çözüm: Örnek uzayındaki kırmızı zarın çift olduğu daha önce verilen tablodaki üç satırda 18 nokta bulunuyor, beyaz zarın tek olduğu üç sütunda da 18 nokta bulunuyor. Bu noktaların meydana getirdiği iki kümenin 9 ortak noktası bulunuyor. Yani bu 9 ortak noktada kırmızı çift ve beyaz ise tektir.

P(k çift ve b tek) = 9/36 = ¼
P(k çift, A) = 18/36 = 1/2
P(k tek, B) = 18/36 = 1/2
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ = ¼

Bağımlı Olaylar: İhtimal hesaplarında bağımlı olayları bağımsız olaylardan ayırmak önemlidir. Bir örnek problemle bu ikisi arasındaki farkı göstermeye çalışalım.

Problem: İki zar atışında iki zarın sayı toplamı 11 ve $k \neq 5$ olma ihtimali nedir?

Çözüm: Örnek uzayında $k+b = 11$ şartını sağlayan iki nokta vardır; (6,5), (5,6). Bu iki noktanın kümesine E diyelim. Öte yandan $k \neq 5$ şartını sağlayan 30 noktanın kümesine de F diyelim

$P(E) = 2/36 = 1/18$

$P(F) = 30/36 = 5/6$

E ve F olaylarını birleştiren tek nokta (6,5) var, bu durumda

$P(E \cap F) = 1/36$

$1/36 \neq 1/18 \,.\, 5/6$

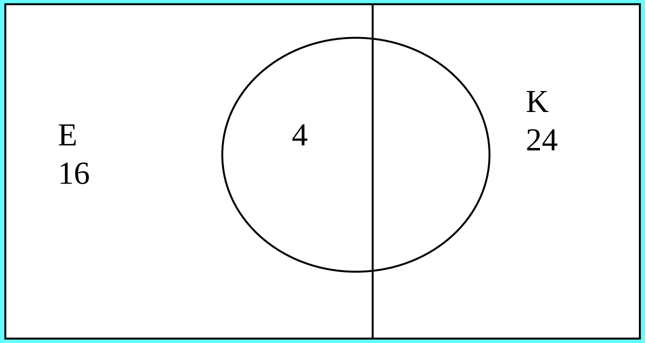
$1/36 \neq 5/108$

Olduğundan E ve F bağımsız değil, **bağımlı** olaylardır.

Problem: 40 kişilik bir sınıfta 24 kız ve 16 erkek öğrenci bulunuyor. Sınıftaki 8 öğrenci Anadolu yakasında oturuyor ve bunlardan 4'ü erkek öğrencidir.

a- Rastgele seçilen bir öğrencinin erkek ve Anadolu yakasında oturuyor olması ihtimali nedir?

b- Bu iki olay bağımsız mıdır?



$P(E \text{ ve } A) = 4/40 = 1/10$

$P(E) = 16/40 = 4/10 = 2/5$

$P(A) = 8/40 = 2/10 = 1/5$

$P(E \cap A) = P(E).\ P(A)$

$1/10 \neq 2/5\ .\ 1/5$

$1/10 \neq 2/25$

Uyarı: Birbirini dışlayan (bağdaşmayan) olaylarla bağımsız olayları birbirine karıştırmamak gerekir. Kümeler açısından ifade edilirse, ortak elemanı olmayan kümeler birbirini dışlayan (bağdaşmayan) kümelerdir, bağımsız kümeler değildir.

Bir örnek uzayında A ve B olayının bağımsız olabilmesi için **gerek şart**, A ve B'nin ortak bir noktası bulunmasıdır (Ancak bu yeter şart değildir)