İ.T.Ü İNŞAAT FAKÜLTESİ - HİDROLİK DERSİ

BOYUT ANALİZİ

☺ π (Buckingham) teoremini tanımlayınız. Temel (esas) büyüklük ve temel (esas) boyut ne demektir ? Açıklayınız. Bir akışkanlar mekaniği problemine π teoremi uygulandığında temel büyüklükler nasıl seçilir.

π (Buckingham) teoremi, n adet boyutlu A_i büyüklüğü arasındaki $f(A_1, A_2, .., A_i, ..., A_n)=0$ şeklinde bir bağıntı daima m = n – r adet boyutsuz π_i büyüklüğü arasında $F(\pi_1, \pi_2, .., \pi_I, .., \pi_m)=0$ şeklinde bir bağıntı haline dönüştürülebilir (r : A_i büyüklüklerinde görülen temel boyut sayısı ≤ 3).

Temel büyüklük : Newton hareket kanunundaki büyüklükler (uzunluk, zaman , kuvvet)
Temel boyut : Temel büyüklüklere ait boyutlar

Boyut analizinde esas değişkenlerin seçiminde dikkat edilmesi gerken kriterler :

- İlgili fiziksel büyüklükler (A_i) belirlenir ve bunların boyutları yazılır.
- Bu büyüklüklerde bulunan esas boyut sayısı belirlenir.
- π terimlerinden oluşan fonksiyonun genel ifadesi yazılır
- A_i büyüklükleri arasından boyutsuz ve aynı boyuta sahip olmayan r tanesi seçilir (Seçilen bu büyüklüklerin en az bir tanesi r tane esas boyutun birini içermeli ve herhangi birinin boyutu diğerlerinin boyutlarının bir kombinezonu olmamalıdır).
- π terimleri teşkil edilir (aşağıda r=3 ve seçilen tekrarlanacak büyüklükler A_1, A_2, A_3 alınarak bir örnek verilmiştir).

$$\pi_1 = A_1^{X_1} A_2^{Y_1} A_3^{Z_1} A_4$$
$$\pi_2 = A_1^{X_2} A_2^{Y_2} A_3^{Z_2} A_5$$

………………………..

$$\pi_{n-r} = A_1^{X_{n-r}} A_2^{Y_{n-r}} A_3^{Z_{n-r}} A_n$$

x_i, y_i, z_i üsleri, π 'lerin boyutsuz olduğu düşünülerekboyut homojenliğinden yararlanılarak bulunur

- Gerekirse π terimlerinden biri, $\pi_1 = \phi(\pi_2)$ şeklinde diğerlerinin fonksiyonu olarak yazılabilir. Bu yapılırken bir boyutsuz sayının bütün üslerinin ve bir boyutsuz sayı ile çarpımının da boyutsuz olduğu özelliğinden yararlanılabilir.

Sembol	Büyüklük	FLT boyut sistemi	MLT boyut sistemi
A	alan	L^2	L^2
a	ivme	$L.T^{-2}$	$L.T^{-2}$
D	boru çapı	L	L
E	elastisite katsayısı	$F.L^{-2}$	$M.L^{-1}.T^{-2}$
F	kuvvet	F	$M.L.T^{-2}$
g	yerçekimi ivmesi	$L.\ T^{-2}$	$L.T^{-2}$
m	kütle	$F.\ L^{-1}.T^{-2}$	M
N	güç	$F.L.\ T^{-1}$	$M.L^2.\ T^{-3}$
p	basınç	$F.L^{-2}$	$M.L^{-1}.T^{-2}$
Q	debi	$L^3.T^{-1}$	$L^3.T^{-1}$
R_H	hidrolik yarıçap	L	L
u	hız	$L.T^{-1}$	$L.T^{-1}$
μ	dinamik viskozite	$F.\ L^{-2}.T$	$M.\ L^{-1}.T^{-1}$
ν	kinematik viskozite	$L^2.T^{-1}$	$L^2.T^{-1}$
ρ	özgül kütle	$F.\ L^{-4}.T^{2}$	$M.\ L^{-3}$
τ	kayma gerilmesi	$F.\ L^{-2}$	$M.\ L^{-1}.T^{-2}$
γ	özgül ağırlık	$F.\ L^{-3}$	$M.\ L^{-2}.T^{-2}$

1. Soru : *Bir boru içerisindeki akımda borunun ıslak yüzeyinin birim alanına etki eden kayma gerilmesi ;* $\tau = \mathbf{fonk}(\mathbf{V}, \mathbf{D}, \mathbf{k}, \mu, \rho)$ *olduğuna , (yani sırasıyla ortalama akım hızının, boru çapının, boru pürüzlülüğünün , akışkanın viskozitesinin ve özgül kütlesinin fonksiyonu olduğuna göre)* τ *kayma gerilmesinin ifadesini elde ediniz.*

Çözüm:

$$\Phi(\tau, \mathbf{V}, \mathbf{D}, \mathbf{k}, \mu, \rho) = 0$$

n = 6 (olaya etki eden parametre sayısı)

	F L T boyut sistemi	**M L T** boyut sistemi
τ	[$F.L^{-2}$]	[$M.L^{-1}.T^{-2}$]
V	[$L.T^{-1}$]	[$L.T^{-1}$]
D	[L]	[L]
k	[L]	[L]
μ	[$F.L^{-2}.T$]	[$M.L^{-1}.T^{-1}$]
ρ	[$F.T^{2}.L^{-4}$]	[$M.L^{-3}$]

m = 3 (Olaya etki eden parametrelerde gözlenen temel büyüklük sayısı)
n = 6 (Olaya etki eden parametre sayısı)

Elde edilebilecek boyutsuz denklem sayısı r = n – m = 3

$$\pi_1 = \mathbf{V}^{\mathbf{X}_1} \rho^{\mathbf{Y}_1} \mathbf{D}^{\mathbf{Z}_1}\, \tau$$

MLT *boyut sistemi ile çözüm*

$M^o L^o T^o = (L.T^{-1})^{\mathbf{X_1}}\ (M.L^{-3})^{\mathbf{Y_1}} (L)^{\mathbf{Z_1}}\ (M.L^{-1}.T^{-2})$
M^o : $0 = Y_1 + 1$
L^o : $0 = X_1 - 3Y_1 + Z_1 - 1$
T^o : $0 = -X_1 - 2$

$X_1 = -2$
$Y_1 = -1$
$Z_1 = 0$

$$\boxed{\pi_1 = \mathbf{V}^{-2} \rho^{-1} \mathbf{D}^{0}\, \tau = \frac{\tau}{\mathbf{V}^2 \rho}}$$

$$\pi_2 = \mathbf{V}^{\mathbf{X}_2} \rho^{\mathbf{Y}_2} \mathbf{D}^{\mathbf{Z}_2}\, \mathbf{k}$$

$M^o L^o T^o = (L.T^{-1})^{\mathbf{X_2}}\ (M.L^{-3})^{\mathbf{Y_2}} (L)^{\mathbf{Z_2}}\ (L)$
M^o : $0 = Y_2$
L^o : $0 = X_2 - 3Y_2 + Z_2 + 1$
T^o : $0 = -X_1$

$X_1 = 0$
$Y_1 = 0$
$Z_1 = -1$

$$\boxed{\pi_2 = \mathbf{V}^{0} \rho^{0} \mathbf{D}^{-1}\, \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{D}}}$$ (*Rölatif Pürüzlülük*)

$$\pi_3 = \mathbf{V}^{X_3} \rho^{Y_3} \mathbf{D}^{Z_3} \mu$$

$M^o L^o T^o = (L.T^{-1})^{\mathbf{X_3}} (M.L^{-3})^{\mathbf{Y_3}} (L)^{\mathbf{Z_3}} (M.L^{-1}.T^{-1})$

M^o : $0 = Y_3 + 1$

L^o : $0 = X_3 - 3Y_3 + Z_3 - 1$

T^o : $0 = -X_3 - 1$

$X_1 = -1$

$Y_1 = -1$

$Z_1 = -1$

$$\boxed{\pi_3 = \mathbf{V}^{-1} \rho^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mu = \frac{\mu}{\mathbf{V}\rho\mathbf{D}}}$$

$$\boxed{\pi'_3 = \frac{\mathbf{V}\rho\mathbf{D}}{\mu}}$$

(*Reynolds Sayısı*)

$$\boxed{\tau = \rho.\mathbf{V}^2.\mathbf{fonk}(\frac{\mathbf{V}\rho\mathbf{D}}{\mu}, \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{D}})}$$

2. Soru ; Bir pompanın gücü (**N**), bastığı debinin (**Q**) , pompanın basma yüksekliğinin (**H**) ve pompanın bastığı akışkanın özgül ağırlığının (γ) fonksiyonu olduğuna göre , pompanın gücünü veren bağıntıyı boyut analizi ile elde ediniz.

Çözüm:

***FLT** boyut sistemi ile çözüm*

N : Pompanın gücü , [$F.L.T^{-1}$]
Q **:** Pompa debisi , [$L^3.T^{-1}$]
H **:** Pompanın basma yüksekliği , [L]
γ **:** Akışkanın özgül ağırlığı, [$F.L^{-3}$]

Esas değişkenler : γ **, Q , H**

m = 3 , n = 4 , r = n – m = 1 adet π sayısı

$$\pi = \mathbf{Q}^{X}\mathbf{H}^{Y}\gamma^{Z}\,\mathbf{N}$$

$F^oL^oT^o = (L^3.T^{-1})^{X} (L)^{Y} (F.L^{-3})^{Z} (F.L.T^{-1})$
F^o : 0 = Z +1
L^o : 0 = 3X + Y –3Z + 1
T^o : 0 = -X -1

X = -1 ; Y = -1 ; Z = -1

$$\boxed{\pi = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}^{-1}\gamma^{-1}\,\mathbf{N}}$$

$$\boxed{\mathbf{N} = \pi.\gamma.\mathbf{Q}.\mathbf{H}}$$

***MLT** boyut sistemi ile çözüm*

3. Soru : Bir akım ortamında **d** çaplı bir küresel engel vardır. Akımın bu küresel engele uyguladığı ***F*** hidro-dinamik kuvveti ; akışkanın (ρ) özgül kütlesine engel civarındaki (**V**) ortalama akım hızına ve kürenin (**d**) çapına bağlı olduğuna göre , ***F*** kuvvetinin ifadesini boyut analizi ile belirleyiniz.

Çözüm :

FLT *boyut sistemi ile çözüm*

F : [F]
ρ : [$FL^{-4}T^{2}$]
V : [$L.T^{-1}$]
d : [L]

Esas değişken sayısı olayda gözlenen temel boyut sayısı kadar seçilerek : ρ**, V , d**
Temel boyut sayısı : 3
Boyutsuz π sayısı : 4 - 3 = 1

$$\pi = \rho^{X} \mathbf{V}^{Y} \mathbf{d}^{Z} \mathbf{F}$$

$F^{o}L^{o}T^{o} = (F.L^{-4}.T^{2})^{X} (L.T^{-1})^{Y} (L)^{Z} (F)$
F^{o} : $0 = X + 1$
L^{o} : $0 = -4X + Y + Z$
T^{o} : $0 = 2X - Y$

X = -1 ; Y = -2 ; Z = -2

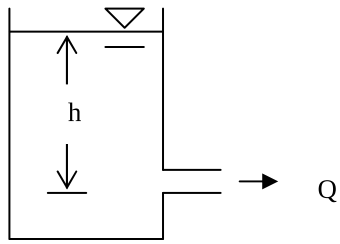
$$\boxed{\pi = \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{d}^{-2} \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}}{\rho \mathbf{V}^{2} \mathbf{d}^{2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \pi.\rho.\mathbf{V}^{2} \mathbf{d}^{2}}$$

MLT *boyut sistemi ile çözüm*

4. **Soru** : Bir orifisten çıkan ideal akışkanın debisi, akışkanın özgül kütlesi, orifisin çapı ve basınç farkına bağlıdır. Buna göre, orifisten çıkan akışkanın debisini veren bağıntıyı π (Buckingham) teoremi ile elde ediniz. Bulduğunuz bağıntıyı bildiğiniz şekli ile karşılaştırınız.

Çözüm :



n = 4
m = 3

r = 4 – 3 = 1 adet π sayısı elde edilebilir.

FLT *boyut sistemi ile çözüm*
temel değişkenler ; ρ **, d , p** seçilerek

$$\pi_1 = \rho^X \mathbf{d}^Y \mathbf{p}^Z \mathbf{Q}$$

$F^o L^o T^o = (F.L^{-4}.T^{2})^{\mathbf{X}} (L)^{\mathbf{Y}} (F.L^{-2})^{\mathbf{Z}} (L^3.T^{-1})$
F^o : $0 = X + Z$
L^o : $0 = -4X + Y - 2Z + 3$
T^o : $0 = 2X - 1$

$X = 1/2$; $Y = -2$; $Z = -1/2$

$$\boxed{\pi_1 = \rho^{1/2} \mathbf{d}^{-2} \mathbf{p}^{-1/2} \mathbf{Q} = \sqrt{\frac{\rho}{\mathbf{p}}} \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{d}^2}}$$

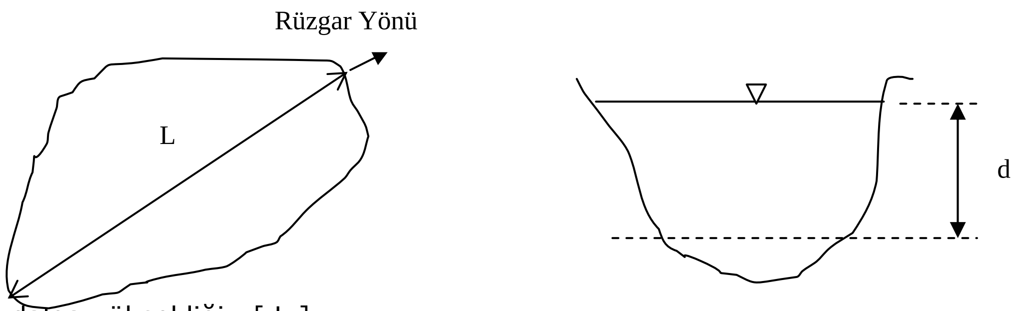
$p = \gamma.h$ $\rightarrow$ $\mathbf{Q} = \pi_1 \sqrt{\frac{\gamma \mathbf{h}}{\rho}} \mathbf{d}^2 = \pi_1 \sqrt{\frac{\gamma \mathbf{h}}{\frac{\gamma}{\mathbf{g}}}} \mathbf{d}^2 = \pi_1 \sqrt{\mathbf{gh}}.\mathbf{d}^2$

Orifis denklemi (Bernoulli denkleminden): $\mathbf{V} = \sqrt{2\mathbf{gh}}$ $\rightarrow \mathbf{Q} = \frac{\pi \mathbf{d}^2}{4} \sqrt{2\mathbf{gh}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\mathbf{gh}}.\mathbf{d}^2$

$$\boxed{\pi_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

5. **Soru** : Ortalama derinliği **d** olan bir gölde rüzgarın esmesi su yüzeyinde **H** yüksekliğinde permanan dalgaların oluşmasına sebep olmaktadır. H ‘nın ;

- Göldeki ortalama su derinliği (**d**)
- Gölün rüzgar doğrultusundaki uzunluğu (**L**)
- Suyun özgül ağırlığı (γ)
- Rüzgarın etkittiği kayma gerilmesi (τ) ile ilişkili olduğunu kabul ederek göldeki dalga yüksekliğini veren bağıntıyı elde ediniz.



H : dalga yüksekliği [L]
L : gölün rüzgar esne gönündeki uzunluğu [L]
d : ortalama göl derinliği [L]
γ : suyun özgül ağırlığı [$F.L^{-3}$]
τ : rüzgarın su yüzeyinde oluşturduğu kayma gerilmesi [$F.L^{-2}$]

n = 5 “ olaya etki eden parametre sayısı”
m = 2 “ olaya etki eden parametrelerin boyutlarında görülen temel boyut sayısı”, “esas değişken sayısı”
r = n – m “elde edilecek boyutsuz π sayısı”
seçilen esas değişkenler : γ , d

***FLT** boyut sistemi ile çözüm*

$$\pi_1 = \gamma^{X_1} d^{Y_1} H$$

$F^o L^o T^o = (F.L^{-3})^{X_1} \; (L)^{Y_1} (L)$
F^o : $0 = X_1$
L^o : $0 = -3X_1 + Y_1 + 1$

$X_1 = 0$
$Y_1 = -1$

$$\boxed{\pi_1 = \gamma^0 d^{-1} H = \frac{H}{d}}$$

$$\pi_2 = \gamma^{X_2} d^{Y_2} L$$

$F^o L^o T^o = (F.L^{-3})^{X_2} \; (L)^{Y_2} (L)$
F^o : $0 = X_2$
L^o : $0 = -3X_2 + Y_2 + 1$

$X_2 = 0$
$Y_2 = -1$

$$\boxed{\pi_2 = \gamma^0 \mathbf{d}^{-1}\,\mathbf{L} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{d}}}$$

$$\pi_3 = \gamma^{X_3}\mathbf{d}^{Y_3}\,\tau$$

$F^o L^o T^o = (F.L^{-3})^{\mathbf{X_3}}\ (\ L\ )^{\mathbf{Y_3}}\ (\ F.L^{-2}\ )$
$F^o\ \ :\ 0 = X_3 + 1$
$L^o\ \ :\ 0 = -3X_3 + Y_3 - 2$

$X_3 = -1$
$Y_3 = -1$

$$\boxed{\pi_3 = \gamma^{-1}\mathbf{d}^{-1}\,\tau = \frac{\tau}{\gamma.\mathbf{d}}}$$

$\pi_1 = f\ (\ \pi_2\ ,\ \pi_3\ )$

$$\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{d}} = \mathbf{f}\,(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{D}}, \frac{\tau}{\gamma\mathbf{d}})$$

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{d}.\mathbf{f}\,(\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{D}}, \frac{\tau}{\gamma\mathbf{d}})}$$

6. **Soru :**
Bir boru içerisindeki üniform-permanan laminer akım halinde, enerji çizgisi eğimi (**J**), akışkanın özgül ağırlığı (γ) ile akışkanın dinamik viskozitesine (μ) , ortalama akım hızına (**V**) ve boru çapına (**D**) bağlı olduğuna göre, (**J**) ‘ yi veren bağıntıyı boyut analizi ile elde ediniz.

Çözüm :

J = f (□□, D , V , □□)

Olaya etki eden parametre sayısı ; n = 5
Parametrelerde gözlenen esas değişken sayısı ; m = 3
Elde edilebilecek boyutsuz π sayısı ; r = n - m = 5 – 3 = 2

Parametre		FLT boyut sistemi	MLT boyut sistemi	İlgili Bağıntı
J	Hidrolik eğim	[-]	[-]	$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{D}} \frac{\mathbf{V}^2}{2\mathbf{g}}$
□	Dinamik viskozite	[F L^{-2} T]	[M L^{-1} T^{-1}]	$\tau = \mu \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dy}}$
□	Özgül ağırlık	[F L^{-3}]	[M L^{-2} T^{-2}]	$\gamma = \rho \mathbf{g}$
V	Ortalama hız	[L T^{-1}]	[L T^{-1}]	
D	Boru çapı	[L]	[L]	

Esas değişken sayısı m tane olmalıdır. Geriye kalan r kadar parametre herbir boyutsuz π sayısı ifadesine ayrı ayrı yazılmalıdır.

Esas değişken seçiminde dikkat edilecek kurallar.

1. Fiziksel olaya etki eden parametrelerde gözlenen m adet boyut, esas değişkenlerin boyutlarında da gözlenmelidir.
2. Esas değişkenler kendi aralarında boyutsuz bir ifade oluşturmamalıdır.

FLT boyut sisteminde çözüm :
1. Esas değişkenler : γ , μ , D
Serbest değişkenler : J , V

$$\pi_1 = \gamma^{X_1} \mu^{Y_1} \mathbf{D}^{Z_1} V$$

$$F^o L^o T^o = (\mathbf{FL}^{-3})^{X_1} (\mathbf{FL}^{-2}\mathbf{T})^{Y_1} (\mathbf{L})^{Z_1} (\mathbf{LT}^{-1})$$

F $\rightarrow$ 0 = x_1 + y_1 $\rightarrow$ x_1 = -1
L $\rightarrow$ 0 = -3 x_1 - 2 y_1 + z_1 + 1 $\rightarrow$ z_1 = -2
T $\rightarrow$ 0 = y_1 - 1 $\rightarrow$ y_1=1

$$\pi_1 = \gamma^{-1} \mu^1 \mathbf{D}^{-2} \mathbf{V} = \frac{\mu \mathbf{V}}{\gamma \mathbf{D}^2}$$

π_2 boyutsuz ifadesi için serbest değişken boyutsuz J parametresi kullanıldığında x_2, y_2, z_2 değerleri sıfır elde edilecektir. Dolayısıyla ;

π_2 **= J**

olarak belirlenebilir.

FLT boyut sisteminde farklı değişkenler için diğer bir çözüm ;

2. Esas değişkenler : γ , μ , V
   Serbest değişkenler : J , D

$$\pi_1 = \gamma^{X_1} \mu^{Y_1} V^{Z_1} D$$

$F^o L^o T^o = (FL^{-3})^{X_1} (FL^{-2}T)^{Y_1} (LT^{-1})^{Z_1} (L)$

$F \rightarrow \quad 0 = x_1 + y_1 \quad \rightarrow x_1 = -y_1$

$L \rightarrow \quad 0 = -3 x_1 - 2 y_1 + z_1 + 1 \quad \rightarrow z_1 = -2$

$T \rightarrow \quad 0 = y_1 - z_1 \quad \rightarrow y_1 = z_1$

$$\pi_1 = \gamma^{1/2} \mu^{-1/2} V^{-1/2} D = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu V}} D$$

$$\pi_1^{'} = \frac{1}{\pi_1^2} = \frac{\mu V}{\gamma D^2}$$

π_2 boyutsuz ifadesi için serbest değişken boyutsuz J parametresi kullanıldığında x_2, y_2, z_2 değerleri sıfır elde edilecektir. Dolayısıyla ;

$$\pi_2 = J$$

olarak belirlenebilir.

MLT boyut sisteminde ;

Esas değişkenler : γ , μ , D
Serbest değişkenler : J , V

$$\pi_1 = \gamma^{X_1} \mu^{Y_1} D^{Z_1} V$$

$M^o L^o T^o = (ML^{-2}T^{-2})^{X_1} (ML^{-1}T^{-1})^{Y_1} (L)^{Z_1} (LT^{-1})$

$M \rightarrow \quad 0 = x_1 + y_1 \quad \rightarrow x_1 = -y_1$

$L \rightarrow \quad 0 = -2 x_1 - y_1 + z_1 + 1 \quad \rightarrow z_1 = -2$

$T \rightarrow \quad 0 = -2x_1 - y_1 - 1 \quad \rightarrow y_1 = 1$ ve $x_1 = -1$

$$\pi_1 = \gamma^{-1} \mu^{1} D^{-2} V = \frac{\mu V}{\gamma D^2}$$

ve

$$\pi_2 = J$$

olarak elde edilir.