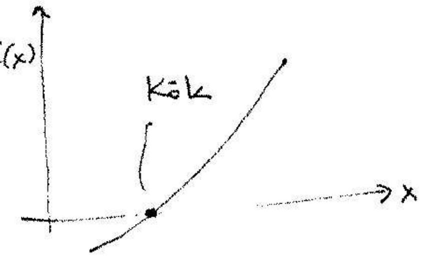
SAYISAL ANALİZ

Konular:

1) Tahmini çözümler/yaklaşımlar ve Hatalar

2) $f(x)=0$ şeklinde verilen denklemin köklerinin bulunması

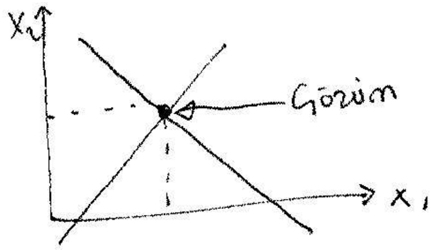


3) Lineer denklem sistemlerinin çözümü:

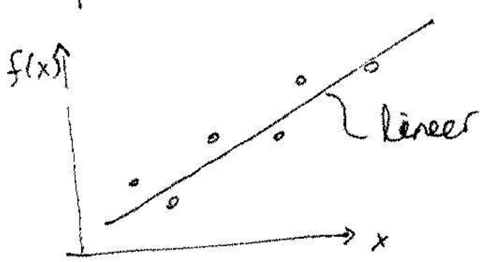
a_{ij} ve c_i'lerin verildiği

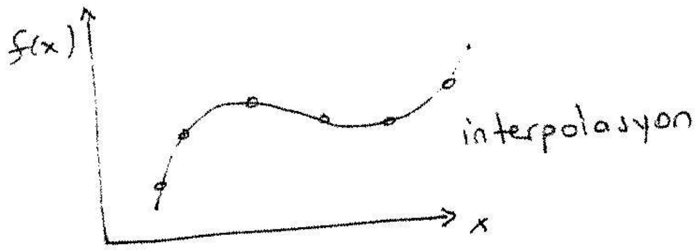
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

denklem sisteminin x_i'ler için çözülmesi



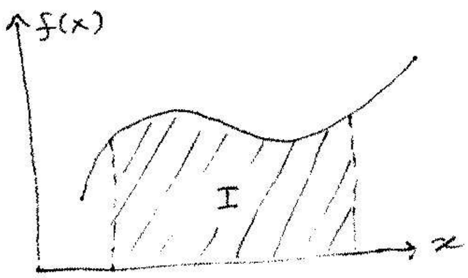
4-) Eğri Uydurulması:





5) İntegrasyon: $I = \int_a^b f(x)\,dx$

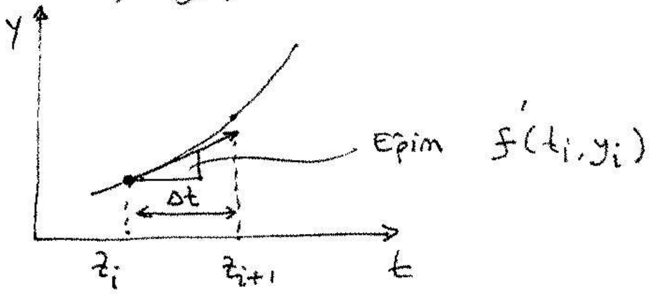
Eğri altında kalan alanın bulunması



6) Adi diferansiyel denklemler:

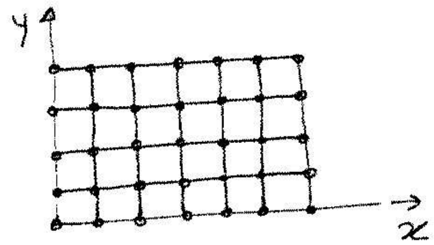
$\frac{dy}{dt} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t,y)$ verildiğinde, y'yi, t'nin fonksiyonu olarak çöz.

$y_{i+1} = y_i + f(t,y)\,\Delta t$



7-) Kısmi Diferansiyel Denklemler:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ verildiğinde, u'yu x ve y'nin fonksiyonu olarak çöz.



I. ERROR TANIMLARI:

Gerçek değer = yaklaşık değer + hata olacağından

Hatanın gerçek değeri

Gerçek hata = E_t = Gerçek değer − yaklaşık değer

olarak bulunur.

Hatanın bulunduğu probleme göre hata miktarının önemi değişecektir. Örneğin, 1cm bir nehirin uzunluğunda önemli olmazken, bir kovanın ölçülendirilmesinde önemlidir. Hatanın gerçek değere nispeten tarif edilmesi daha anlamlı olacaktır.

Relatif Hata = $\dfrac{\text{Hata}}{\text{gerçek değer}}$ şeklinde tanımlanır.

Buradaki hata, daha evvel tanımladığımız, E_t gerçek hatadır. Relatif hatayı yüzde olarak ifade edersek

$$\varepsilon_t = \frac{\text{gerçek hata}}{\text{gerçek değer}} \cdot 100\,\%$$

Hatanın Hesaplanması:

Bir nehirin uzunluğunu 9999 cm ve bir su birikintisinin uzunluğunu 9 cm olarak ölçmüş olalım. Bunların gerçek değerleri sırasıyla 10000 cm ve 10 cm olsun.
Her biri için hatayı ve relatif hatayı bulalım.

a) Nehir için; $E_t = 10000 - 9999 = 1\text{ cm}$

Birikinti için; $E_t = 10 - 9 = 1\text{ cm}$

b) Yüzde olarak relatif hata:

nehir için: $\varepsilon_t = \dfrac{1}{10000} \cdot 100\,\% = 0.01\,\%$

birikinti için: $\varepsilon_t = \dfrac{1}{10}\, 100\,\% = 10\,\%$

Buradan çıkardığımız sonuç: bağıl hatanın önemli olduğudur. Her iki ölçüm 1 cm hata ile yapılmış isede birikinti için bağıl hata, nehir için olana nazaran daha fazladır.

Dikkat edilecek olursa hata için t kullandık. Bunun sebebi bağıl hatayı gerçek değer ile karşılaştırdığımız içindir. Problemlerde genellikle gerçek değeri bilmeyiz.

Bu sebeble normalizaysonu yaklaşık değere göre yapmak zorundayızdır. Bu durumda bağıl hata

$$\mathcal{E}_a = \frac{\text{yaklaşık hata}}{\text{yaklaşık değer}} \times 100\%$$

olarak tanımlanır. Burada verilen yaklaşık hata işe bulunan yaklaşık değerler arasındaki farktır.

Yani;

$$\mathcal{E}_a = \frac{\text{yaklaşık değer} - \text{evvelki yaklaşık değer}}{\text{yaklaşık değer}} \times 100\%$$

Genellikle hatanın işaretinden ziyade mutlak değerinin belirli bir değerden az olmasını isteriz. Bu durumda hatanın mutlak değeri alınarak karşılaştırma yapılmalıdır. Yani;

$$|\mathcal{E}_a| < \mathcal{E}_s = \text{istenen hassasiyetlik.}$$

Gösterilebilir ki $\mathcal{E}_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$ sağlanırsa, n haneye kadar doğrudur.

<u>İteratife Metodların Hata Tahmini :</u>

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \qquad \text{Maclaurin serisi}$$

verilmiş olsun

$e^{0.5}$'i hesaplamaya çalışalım. Gerçekte $e^{0.5} = 1.648721271$ dir.

3 haneye kadar yaklaşım istersek;

$$\mathcal{E}_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

Yani $\mathcal{E}_a$ bundan küçük olmalı.

Sıfırıncı yaklaşımda $e^x \simeq 1$

1. 〃 $e^x \simeq 1 + x$

$x = 0.5$ için $e^{0.5} = 1 + 0.5 = 1.5$

$$\varepsilon_t = \frac{1.648721271 - 1.5}{1.648721271} 100\% = 9.02\%$$ hata.

ε_a ise : $\varepsilon_a = \frac{1.5-1}{1.5} 100\% = 33.3\%$ hata

ε_a istenilen değerden küçük olmadığı için $\frac{x^2}{2!}$ terimini de ekleyerek devam ederiz.

Terim	Sonuç	ε_t, %	ε_a, %
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.64583333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

6 terimden sonra hata $\varepsilon_s = 0.05\%$ in altına inmiştir. ~~Dikkat edilirse bulunan değer,~~

Kısaltma
KESME HATASI : Bilgisayarlarda saklanılan sayı sonsuz hane olarak saklanamaz. π örneğinde olduğu gibi makinaların yapısına göre saklayabilecekleri hane sayısı sınırlıdır.
Bilgisayarlar iki yöntemi kullanabilir.

1. Kesme: Belirli haneden sonraki haneleri kesmek.
   Örneğin: $\pm d_1 d_2 d_3 \ldots d_t d_{t+1} \ldots$ ise ; sonuç
   kesme noktası
   $\pm d_1 d_2 d_3 \ldots d_t$ olarak kalır.
2. Yuvarlatma: t. digitten sonra gelenler kesilir fakat son dijit yukarı veya aşağı yuvarlatılır.

Eğer $d_{t+1} \geq \beta/2 \Rightarrow$ yukarı yuvarlar

$d_{t+1} < \beta/2 \Rightarrow$ aşağı yuvarlar

Burada β, tabandır. Yani 10 tabanı, 2 tabanı vs...

Örnek:

$+0.2499 \Rightarrow$ 0.249 → kesme

0.250 → yuvarlatma

veya

$-0.2499 \Rightarrow$ −0.249 → kesme

−0.250 → yuvarlatma

IBM 370'ler reel sayıları keser.

Kesme Hatası: Metodun kendisinin neden olduğu hataya verilen isimdir. Bu hata sayısal metodların kesik Taylor serisine bağlı olmasından kaynaklanır.

Toplama ve Çıkartmada Sayısal Hata:

X ve Y sayılarımız olsun. Bunlar bilgisayarda $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ olarak saklansın.

Yapılan çıkartma işleminin hatası:

$$BH = \frac{|(X-Y)-(\bar{X}-\bar{Y})|}{(X-Y)}$$ olarak hesaplanır.

X ve Y birbirine yaklaşınca BH o kadar çok tanımsızlığa yaklaşır. Yani birbirine çok yakın iki sayının çıkartma işlemi doğru sonuç vermeyebilir.

Örnek: 0.2500 − 0.2499

3 dijit kullanırsak ($t=3$, $\beta=10$):

0.250 − 0.249 = 0.001 bulunur.

Örnek: $x^2+62.10x+1=0$ denkleminin kökleri

$x_1=-0.01610723$ ve $x_2=-62.08390$

Noktadan sonra 4 hane alarak işlemleri yapalım.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ formülünden,

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(62.10)^2-4.0000}=\sqrt{3856-4.0000}$$
$$=62.06$$

$$x_1=\frac{-62.10+62.06}{2.0000}=\frac{-0.0400}{2.000}=-0.020$$ kötü bir sonuç

$$x_2=\frac{-62.10-62.06}{2.0000}=-62.\cancel{08}$$
$$-62.10$$ iyi bir sonuç.

x_1'i $(-b-\sqrt{b^2-4ac})$ ile çarpıp bölelim.

$$x_1=\frac{+b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$x_1=\frac{-2.000}{62.10+62.06}=-0.0161$$ iyi bir sonuç, fakat

$$x_2=\frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}=\frac{-2.000}{62.10-62.06}=\frac{-2.000}{0.0400}=-50.00$$

çok kötü bir sonuç elde edilir.

Gerçek çıkartma işleminin doğru sonucu 0.0001 dir. Yapılan hatalar:

Mutlak hata $= |0.0001 - 0.001| = 9 \times 10^{-4}$

ve bağıl hata: $BH = |9 \times 10^{-4} / 0.0001| = 9.0$ dır.

Yani ≈ 10 katlık bir hata yapılmıştır.

Taylor Serileri:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

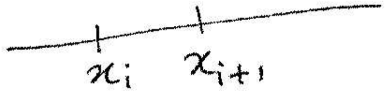
burada kalan R_n şöyle ifade edilir.

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

ve t serbest değişkendir.

Bu formül Taylor formülü veya serisi olarak bilinir.

Bu kalan terimi türev veya Lagrange formunda yazıldığında $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $a \leq \xi \leq x$ şeklinde ifade edilir.



fonksiyonun x_i 'deki değerlerinden x_{i+1} deki açılımını yazarsak:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$
$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}$$

Burada ξ, x_{i+1} ile x_i arasında bir değerdir.

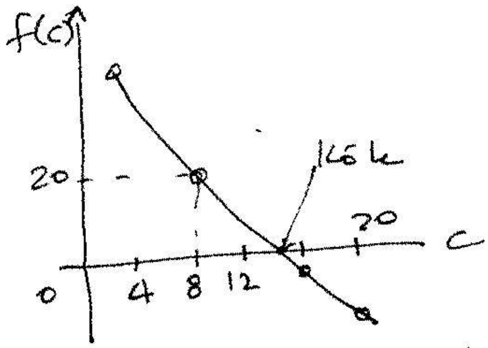
Fonksiyonların Köklerinin Bulunması:

1). Grafik Metodu: fonksiyonun grafiğini çiz. x eksenini kestiği noktaya bulmaya çalış.

Örnek: $f(x) = \dfrac{9.8(68.1)}{c}\left(1 - e^{-(c/68.1)10}\right) - 40$

veya $f(c) = \dfrac{667.38}{c}\left(1 - e^{-0.146843c}\right) - 40$

fonksiyonun x eksenini kestiği nokta bize bir paraşütçünün ($m = 68.1$ kg) 40 m/s ile atladıktan sonraki sürükleme katsayısını verecektir.



c	$f(c)$
4	34.115
8	17.653
12	6.067
16	-2.269
20	-8.401

Gözle yapılan incelemede 14.75 alırsak

$f(14.75) = \dfrac{667.38}{14.75}\left(1 - e^{-0.146843(14.75)}\right) - 40$

$= 0.059$, ki bu değer sıfıra yakındır.

Paraşütçünün hızını verilen formülden hesaplarsak $v = 40.059$ buluruz ki bu verilen 40 m/sn 'ye yakındır.

Ödev: $f(x) = \sin 10x + \cos 3x$ fonksiyonun $x = -5$, $x = +5$ aralığındaki köklerini grafik çizerek, yaklaşık olarak bulmaya çalışın.

Bisection Metodu :

Dikkat edilirse, eğer $f(x)$ $[x_\ell, x_u]$ aralığında sürekli ve gerçek ise ve $f(x_\ell)$ ve $f(x_u)$ farklı işaretlerde iseler, yani $f(x_\ell)f(x_u)<0$ ise; $[x_\ell, x_u]$ aralığında en az 1 kök vardır.

Metod: 1) Kök için alt ve üst değerleri seç. Öyleki fonksiyon bu iki değer için işaret değiştirsin. Yani $f(x_\ell)f(x_u)<0$

2) Köke daha iyi bir yaklaşım:

$$x_r = \frac{x_\ell + x_u}{2}$$

ile bulunur.

3) Hangi aralığa kökün düştüğünü bulmak için şunu yap:

a) Eğer $f(x_\ell)f(x_r)<0$, ise kök alt aralıktadır. Bu nedenle $x_u = x_r$ yap ve 2 ye geri dön.

b) Eğer $f(x_\ell)f(x_r)>0$ ise kök üst aralıktadır. Öyleyse $x_\ell = x_r$ seç ve 2'ye dön.

c) Eğer $f(x_\ell)f(x_r)=0$ ise, kök x_r değeridir. Hesaplamayı durdur.

Örnek: Evvelki örnekteki kökü bu metodla bulalım.

$x_r = \frac{12+16}{2} = 14$ ← ($\varepsilon_t = 5.3\%$, gerçek değer = 14.7802)

$f(12)\,f(14) = (6.067) \times (1.569) = 9.517 > 0$

öyleyse: $x_r = \frac{14+16}{2} = 15$, $\varepsilon_t = -1.5\%$

$f(14)\,f(15) = (1.569)(-0.425) = -0.666$

yani kök 14 ile 15 arasındadır.

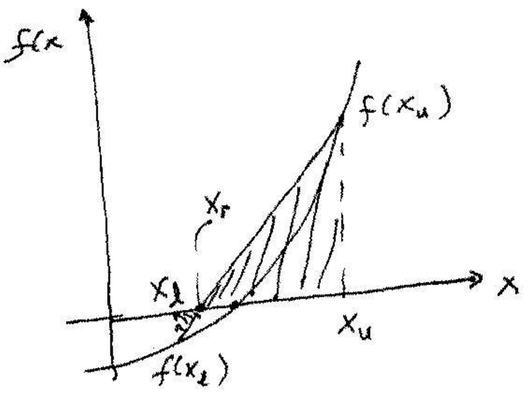
$x_r = \frac{14+15}{2} = 14.5 \rightarrow \varepsilon_t = 1.9\%$

ve metoda devam edilebilir daha hassas bir sonuç bulmak için.

Bisection metodunun hata tahmini:

$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| 100\%$ olarak bulunur.

YANLIŞ HATA METODU:



$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

(False-position formülü)

Örnek: $x_l = 12$

$x_u = 16$

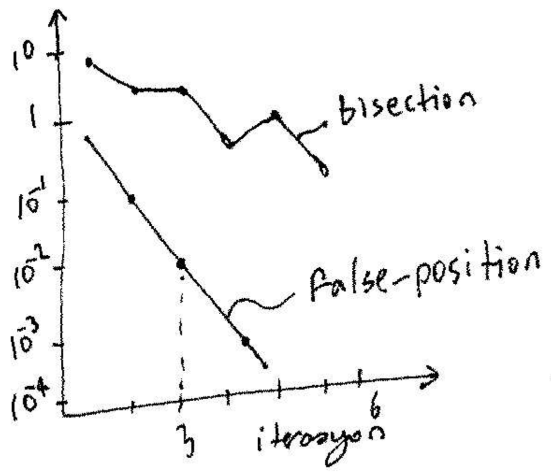
ilk iterasyon: $x_l = 12 \quad f(x_l) = 6.0669$

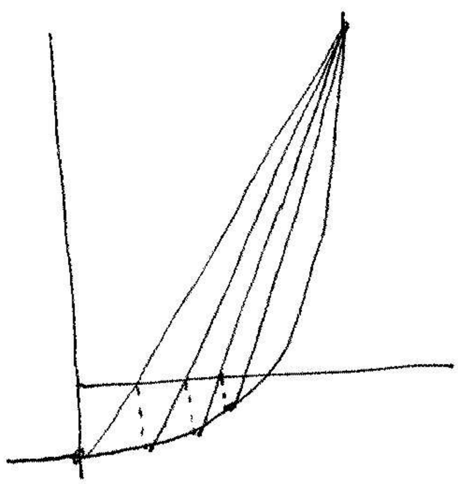
$x_u = 16 \quad f(x_u) = -2.2688$

$$x_r = 16 - \frac{(-2.2688)(12-16)}{6.0669-(-2.2688)} = 14.9113$$

bunun gerçek bağıl hatası 0.89 % dur.

ikinci iterasyon: $f(x_l)\, f(x_r) = -1.5426$





Yanlış-yer metodunun

yavaş yakınsama hali

Ödev: 1) $f(x) = -0.9x^2 + 1.70x + 2.5$

denkleminin köklerini

a) grafik metodu ile
b) bisection metodu ile ve yanlış-yer metodu ile

$x_l = 2.8$ ve $x_u = 3.0$ alarak bulunuz.

ε_a ve ε_t'yi her iterasyonda hesaplayınız.

2-) $f(x) = x^3 - 98$ probleminin köklerini

a) analitik olarak
b) yanlış hata metodu ile $\varepsilon_s = 0.1\%$ olacak

şekilde bulun.

Basit Tek nokta İterasyonu:

$x = g(x)$ haline getirilebilen problemlerde

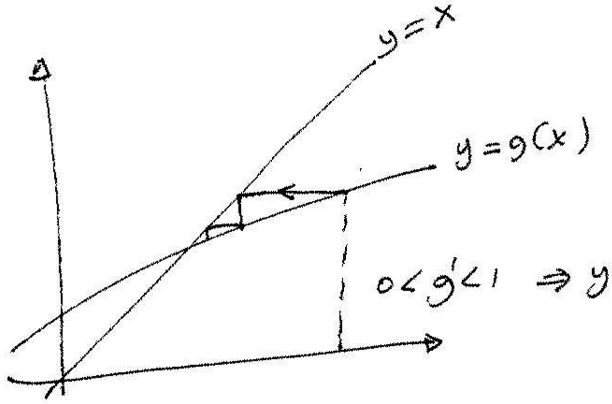
uygulanabilir.

Metod: $x_{i+1} = g(x_i)$ şeklinde uygulanır.

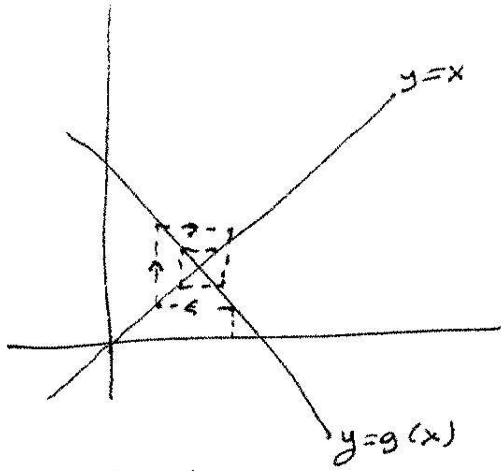
metodun hata hesabı $|\varepsilon_a| = \left| \dfrac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$

ile hesaplanır.

Metodun başarılı olması için $|g'(x)| < 1$ olmalıdır. (kökün civarında)

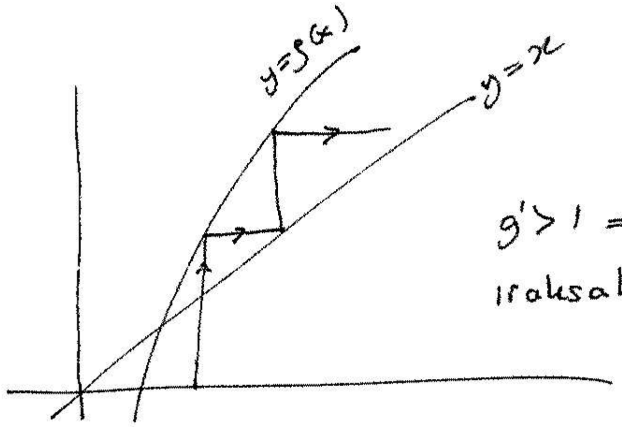


$0<g'<1 \Rightarrow$ yakınsama



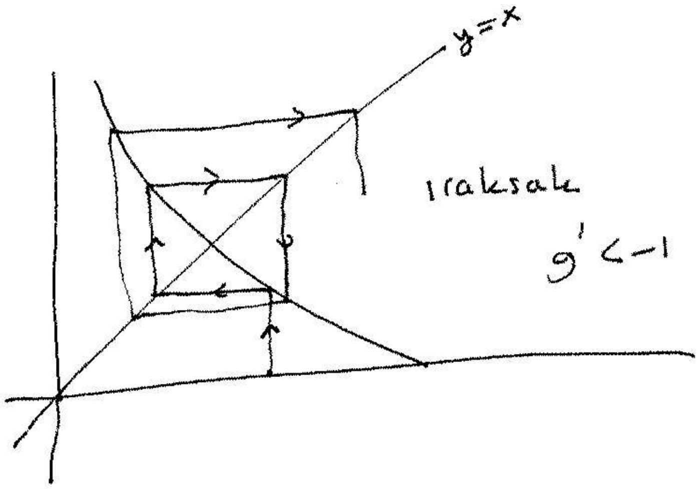
yakısak

$-1 < (g(x)) < 0$



$g'>1 \Rightarrow$

ıraksak



ıraksak

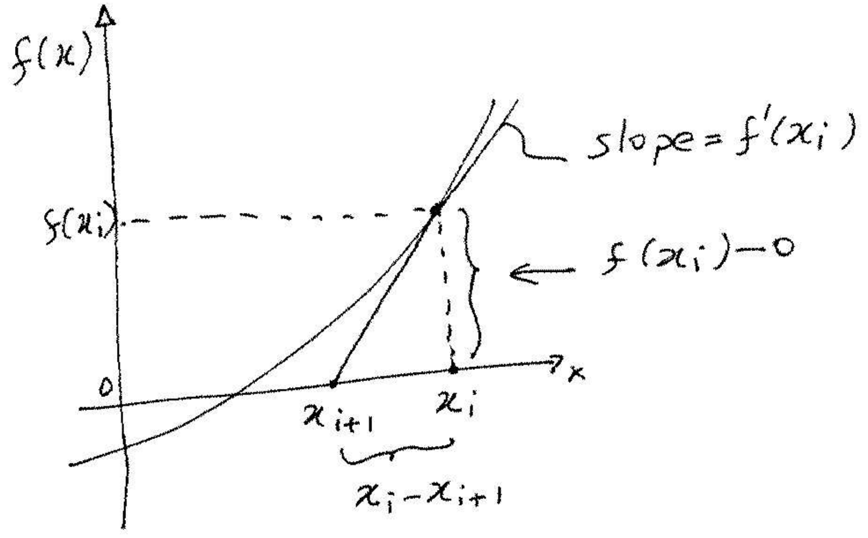
$g'<-1$

Örnek: $f(x) = e^{-x} - x$ denkleminin kökü

$x_{i+1} = e^{-x_i}$

i	x_i	$\lvert\varepsilon_t\rvert$, %	$\lvert\varepsilon_a\rvert$, %
0	0	100	
1	1.000000	76.3	100
2	0.367879	35.1	171.8
3	0.692201	22.1	46.9
4	0.500473	11.8	38.3
⋮	⋮	⋮	⋮
10	0.564879	0.399	1.11

Newton-Raphson Metodu:



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)-0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Fonksiyonun ilk türevinin alınmasının ve hesaplanmasının zor veya imkansız olduğu durumlarda bu türevi şöyle hesaplayabiliriz.

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$$, ileri farklar metodu

burada h küçük bir değerdir, mesela $h = 0.001$.

Geriye doğru farklar yaklaşımı ile aynı türev

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$ şeklinde de

yazılabilir.

Örnek: $a=155$ sayısının küpkökünün bulunması

$x=\sqrt[3]{a}$ veya $f(x)=x^3-a$ verilmişken $f(x)=0$

denklemi sağlayan x_i değerleri:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-a}{3x_n^2}=\frac{2}{3}x_n+\frac{a}{3x_n^2}$$

$a=155$ ve $x_0=5$ alalım.

n	x
0	5
1	5.4
2	5.371834
3	5.371686 (tam sonuç)

3 iterasyonda sonucu bulmuş olduk.

$x_0=10$ alarak tekrarlayalım.

n	x
0	10
1	7.183334
2	5.790176
3	5.401203
4	5.371847
5	5.371686 (tam sonuç)

Sadece 5 iterasyon ile sonucu bulduk.

Ödev: $y=\tan x-0.5x$'in ilk kökünü Newton-Raphson metodu ile bulunuz.

$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p ye yakınsayan bir dizi olsun ve

$e_n = p_n - p$, $n \geq 0$ olsun. Eğer pozitif λ ve α sabitleri

bulunabilirse ki, $\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda$.

Bu durumda bu dizinin, p ye α. mertebeden yakınsadığı söylenir. λ ise asimtotik hata sabitidir.

Bu durumda; $\alpha = 1$ ise metod lineer.
$\alpha = 2$ ise metod ikinci mertebedendir.

Birden fazla katlı kökün olduğu $f(x)=0$ denklemindeki kökleri N-R metodu ile bulmak istediğimizde kök civarında $f'(x_p) \cong 0$ ve $f(x_p) \cong 0$ olacaktır. Bu ise hesaplamalarda problem çıkarır ve yakınsama hızı 2 olan N-R metodunu, lineer hale düşürür. Bu durumda düzeltilmiş Newton metodu kullanılabilir. Yani;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)\,f''(x_n)}$$

Örnek: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ denkleminin kökleri.

1) N-R: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{4x_n}$

2) Düzeltilmiş N-R: $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2-2)\,x_n}{(x_n^2+2)}$

$x_0 = 1.5$ ile başlayarak;

	(1)	(2)
P_1	1.458333333	1.411764706
P_2	1.436607143	1.414211438
P_3	1.425497619	1.414213562

bulunur

(2). metodla elde edilen sonuç 10^{-9} mertebesinde 10^{-10} (a-2)
hassastır. Bu sonuca N-R ile 20 iterasyonla ulaşılabilir.

Yakınsamanın Hızlandırılması: <u>Aitken's Metod.</u>

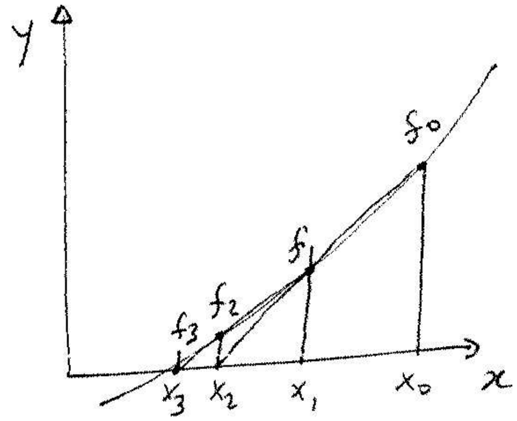
$f(x)=0$ denkleminin çözümü için yapılan iterasyonda x_0, x_1, x_2 değerleri elde edilmiş olsun. Metod lineer olarak yakınsıyorsa,

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} \quad ; \quad \hat{x}_0 = x_0 - \frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}$$

ile elde edilen $\hat{x}_n$ değeri köke daha hızlı yakınsar.

SECANT METODU:

Bu metodun N-R ile farkı f' değerinin bulunan f değerleri yardımıyla hesaplanmasıdır.



$$x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)}$$

$$y_n = f(x_n)$$

x_{n+1} ve x_n birbirine çok yakın olunca y_{n+1} ve y_n de birbirine yakın olur. Dolayısıyla önemli yuvarlama hataları olabilir. Bunu önlemek için:

a) $|y_{n+1}|$ belirli değerden küçük olunca, x_{n-1} ve y_{n-1} sabit tutulabilir.

b) x_{n-1} ve y_{n-1} değerleri $x_{n-1}+\xi$ ve $y(x_{n-1}+\xi)$ olarak hesaplanabilir. Burada ξ belirlenen küçük fakat önemli yuvarlama hatalarını engelleyecek kadar da büyük seçilir. Başlangıç değeri iyi seçilmezse bu metod istenmeyen kökü bulabilir veya hiç kök bulmayabilir.

Ödev: N-R metodu sanal sayılar içinde geçerlidir. Yani $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, burada x sanal sayıdır. Türev $f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$ şeklinde bulunur. x ve Δ sanaldır.
$y = x^5 - 0.2x^4 + 7x^3 + x^2 - 3.5x + 2.0$ denkleminin 5 kökünü bulunuz.

Lineer Denklem Sistemleri:

- Gauss metodu
- Gauss-Jordan Metodu
- LU ayrıştırması

- Gauss ve Gauss-Jordan Metodu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_n = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = y_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = y_n$$

lineer denklem sisteminde a_{ij}'ler katsayılar, x_i'ler bilinmeyenler ve y_i'ler bilinen değerlerdir. Sağ taraf vektörünün elemanlarından en az bir tanesi sıfırdan farklı ise bu denklem sistemi homojen olmayan sistemdir denir. Gauss metodu sadece bu tip sistemlere uygulanır. Bu tip problemlerde karşılaşılabilecek sorunlar:

- tek bir çözümün olmaması
- problemin kötü-koşullandırılmış olması

şeklindedir. Biz tek çözümü olan ve çözüm esnasında sorun çıkarmayan sistemler üzerinde duracağız.

İlk denklemi a_{21}/a_{11} ile çarpıp ikinci denklemden çıkaralım. Aynı şeyi diğerleri için de a_{i1}/a_{11} kullanarak yapalım.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = y_2$$
$$\vdots$$
$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = y'_n$$

burada $a'_{ij} = a_{ij} - (a_{i1}/a_{11}) \cdot a_{1j}$ dir.
ilk denklemin değişmediğine dikkat ediniz.
Gauss metodunda uygulanan, önce ileri doğru azaltma işlemi sonra geriye doğru yerleştirme işlemidir.
Aynı şeyi ilk denklemi kullanmadan $i > 2$ için yapalım ve bunu tekrarlayalım. Elde edeceğimiz:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= y'_2 \\
a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= y''_3 \\
&\vdots \\
a^{(n-1)}_{nn} x_n &= y^{(n-1)}_n
\end{aligned}$$

Burada her denklemin ilk katsayısına pivot denir. Bütün denklem bu pivot değerlerine bölünerek normalizasyon yapılabilir. Fakat bu işlem zamanın artırdığı için burda yapmadık.
Son denklemden: $x_n = y^{(n-1)}_n / a^{(n-1)}_{nn}$ bulunur. Böylece

$$x_{n-1} = \left[y^{(n-2)}_{n-1} - a^{(n-2)}_{n-1,n} x_n \right] / a^{(n-2)}_{n-1,n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \left[y_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \right] / a_{11}$$

olarak bulunur. Bu işlemi yaparken

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & y_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris kullanılması ile yukarıdaki işlemler bir matris üzerinde yapılabilir.

Örnek :

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$
$$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

Matrisimiz: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

ilk işlemde: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 23/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ bulunur.

2. işlem: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 23/2 \\ 0 & 0 & 11/7 & 22/7 \end{bmatrix}$

Buradan $x_3 = (22/7)/(11/7) \Rightarrow x_3 = 2$

benzer şekilde : $x_2 = 3$ ve $x_1 = 1$ olarak bulunur.

Gauss-Jordan Metodu: Bu metod Gauss metoduna benzer. Burda ilave olarak geriye doğru yoketme de uygulanır. Geriye doğru yok etme işleminde son denklemden başlamak üzere pivot elemanı 1'e indirgenir. Böylece; son denklem

$$0 \quad 0 \quad 0 \ldots \quad 1 \quad \bar{y}_n$$

olur. Burada $\bar{y}_n = y_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}$ dir.

Son denklem kullanılarak, son denklemden evvelki bütün denklemlerin n. kolonu sıfırlanır. Bu işleme geriye doğru devam edilir. Böylece:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1,n-1} & 0 & \bar{y}_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \cdots & a'_{2,n-1} & 0 & \bar{y}_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a^{(n-2)}_{n-1,n-1} & 0 & \bar{y}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & \bar{y}_n \end{matrix}$$

bulunur. Burada $\bar{y}_i = y_i^{(i-1)} - a_{in}^{(i-1)} \bar{y}_n$ dir.

Sonuçta, sağ taraf vektörü çözümdür. Yani

$$x_i = \bar{y}_i^{(n-i)}$$

<u>Örnek:</u> Evvelki problemi bu metodla çözelim. Gauss metodu ile geldiğimiz nokta:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 23/2 \\ 0 & 0 & 11/7 & 22/7 \end{bmatrix}$$ idi.

3. satırı 11/7 ile bölelim. 3. denklemi 1/2 ile çarpıp 2. denklemden, yine 3. denklemi −3 ile çarpıp 1. denklemden çıkaralım. Elde edeceğimiz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ olacaktır.

2. satırı 7 ile bölelim. 2. satırı 1 ile çarpıp 1. satırdan çıkaralım.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ elde ederiz.

Son olarak, 1. satırı 2 ile bölelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Gördüğümüz gibi son kolon istediğimiz çözümdür.
Yani, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

Pivotlama: Gauss veya Gauss-Jordan metodunda ilk denklemin ilk elemanı sıfır ise veya yoketme işleminde herhangi bir denklemin köşegen elemanı sıfır olursa bu metod çalışmaz. Çünkü bunlar ileri yoketme işleminde payda da kullanılırlar.
Mesela:

$$\begin{matrix} 0 & 10 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{matrix}$$

denklemş sistemini ele alırsak ilk satırın ilk elemanı sıfır olduğunda 2. ve 3. satırların ilk elemanlarını sıfırlayamayız. Bu durumda yapılması gereken denklemlerin yerini değiştirmektir. Bu değiştirme işleminde eğer kolonda bulunan elemanlardan mutlak değerce en büyük olanını seçersek, yuvarlama hataları en aza indirgenmiş olur. Yani;

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Böylece devam ederek

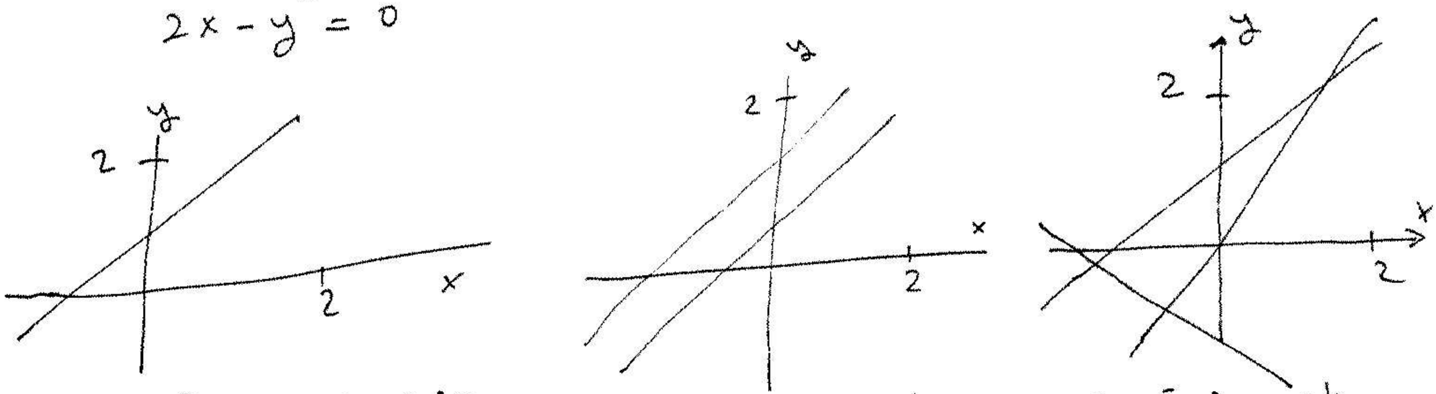
$x_1 = 2.7187$
$x_2 = 0.4062$
$x_3 = -2.0625$ bulunur.

Çözülemeyen Problemler: Bazen sayısal olarak lineer denklem sistemlerini çözemeyebiliriz. Örneğin:

a) $-x + y = 1$
$-2x + 2y = 2$

b) $-x + y = 1$
$-x + y = 0$

c) $-x + y = 1$
$x + 2y = -2$
$2x - y = 0$



(a) sonsuz çözüm (b) Çözüm yok (c) Çözüm yok

Matris ve Vektörler:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ bir kare matristir.

$A = [a_{ij}]$ yazılır. Aynı şekilde $B = [b_{ij}]$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ ise 2×3 matrisidir. Yani m tane satır, n tane kolonu vardır.

$C = A + B$ ise, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dir

$C = A - B$ ise, $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ dir.

$C = AB$ ise, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj}$ dir.

$B^{-1} A = C$ ise, burada A, B ile bölünüyor. B^{-1}, B nin tersidir. Sonuç $A = BC$ dir.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ ise vektördür. Bu $N \times 1$ matrisidir.

$a = [a_1 \; a_2 \; a_3]$ ise satır vektörü ve $1 \times N$ matrisidir.

A bir matris, x ve y birer vektör ve

$Ax=y$ ise, burada $y_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k$ dır.

Ödev: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

olduğuna göre $A+B$, $B-A$, AB, BA, $x+y$, $x-y$ ve Ax'i hesaplayınız.

Bir Matrisin Tersi :

$Ax=y$ verilmiş olsun. Bunu bir G matrisi ile çarpalım.

$GAx = Gy$.

G'yi A'nın tersi olarak seçelim. Bu durumda

$x = A^{-1}y$ elde edilir. Çünkü $A^{-1}A = I$ = Birim Matristir.

Yani Gauss-Jordan metodu aslında denklem sistemini $G = A^{-1}$ ile çarpmaya denktir.

Gauss-Jordan Metodunda uyguladığımızı birim matrise uygularsak, sonuçta birim matris A^{-1}'e dönüştürülür.

Yani $GI = A^{-1}$.

A^{-1}'i hesaplamak için A ve I'yı şöyle yazarız.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve Gauss-Jorden metodunu bu matrise uygularız. Matrisin sol yarısı birim matris haline geldiğinde, sağ yarısı A^{-1} olacaktır.

<u>Ödev</u>: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisini tersini bu metodla bulunuz.

<u>LU Ayrıştırması</u>: Bu metod A matrisini iki matrisi çarpımı olarak böler. Yani $A = LU$.
Burada L, alt üçgen matris ve U ise üst üçgen matristir.
3x3'lük bir sistem için bu ayrıştırma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. Dikkat edilirse L'nin bütün köşegen değerleri 1'dir.
Bilinmeyen l_{ij} ve u_{ij} değerleri, LU çarpımı yapılıp A matrisine eşitlenerek bulunur. Bunun için L'nin ilk satırını, U'nun her kolonu ile çarpıp, A'nın ilk satırına eşitlersek:

$$u_{1,j} = a_{1,j} \quad , j = 1, 2, 3$$

L'nin 2 ve 3. satırlarını, U'nun ilk kolonu ile çarpıp A'nın ilk kolonuna eşitleyerek:

$$a_{2,1} = l_{2,1}\, u_{1,1} \quad \text{ve} \quad a_{3,1} = l_{3,1}\, u_{1,1} \quad \text{veya}$$

$$l_{2,1} = a_{2,1}/u_{11} \quad , \quad l_{31} = a_{31}/u_{11} \quad \text{bulunur.}$$

L'nin 2. satırını, U'nun 2 ve 3. ~~satırları~~ kolonları ile çarpıp eşitleyerek:

$$a_{22} = l_{21}\, u_{12} + u_{22} \quad , \quad a_{23} = l_{21}\, u_{13} + u_{23} \quad \text{veya}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12} \quad , \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}\, u_{13} \quad \text{bulunur.}$$

L'nin 3. satırı ile U'nun 2. kolonu çarpılarak:

$$a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} \quad \text{veya}$$

$$l_{32} = [a_{32} - l_{31} u_{12}] / u_{22}$$

Son olarak U'nun son kolonunu L'nin son satırı ile çarparak u_{33} bulunur.

$$l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33} = a_{33} \quad \text{veya}$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} \quad \text{bulunur.}$$

<u>Örnek:</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Çözüm yöntemini takip edersek:

$u_{11} = a_{11} = 2$, $u_{12} = a_{12} = 1$, $u_{13} = a_{13} = -3$

$l_{21} = -0.5$, $l_{31} = 1.5$

$u_{22} = 3 - (-0.5)(1) = 3.5$

$u_{23} = 2 - (-0.5)(-3) = 0.5$

$l_{32} = [1 - (1.5)(1)] / 3.5 = -0.142857$

Böylece; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 1.5 & -0.1428 & 1 \end{bmatrix}$ ve $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.5714 \end{bmatrix}$

Bu matrislerin çarpımı yapılarak A matrisine eşit olduğu gösterilebilir.

LU ayrıştırması için genel metod: (N boyutlu matris)

a) U'nun ilk satırı; $u_{1j} = a_{1j}$, $j=1, N$

b) L nin ilk kolonu; $l_{i1} = a_{i1}/u_{11}$, $i=2, N$

c) U'nun 2. satırı; $u_{2j} = a_{2j} - l_{21} u_{1j}$, $j=2, N$

d) L'nin 2. kolonu; $l_{i2} = [a_{i2} - l_{i1} u_{12}]/u_{22}$, $i=3, N$

e) U'nun n. satırı; $u_{nj} = a_{nj} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kj}$, $j=n, N$

f) L'nin n. kolonu; $l_{in} = [a_{in} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik} u_{kn}]/u_{nn}$, $i=n+1, N$

Bu işlemde $l_{ii}=1$ olduğu için bunlar hesaplanmamıştır.

Görüldüğü gibi L'nin üst üçgeni ve U'nun alt üçgeni sıfırdır. Hafızada yer kazanmak için bu iki matris, bir matris halinde yazılabilir. Yani:

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} \end{matrix}$$

Bundan başka, ayrıştırmanın sonunda elde edilen l_{ij} veya u_{ij} değerlerini hafızada tutmak için a_{ij} elemanı kullanılabilir. Çünkü bu a_{ij} elemanı l_{ij} veya u_{ij} elemanını bulmak için bir kez kullanıldıktan sonra daha kullanılmamaktadır.

Şimdi $Ax=y$ lineer denklem sistemini çözmeye geçebiliriz.

$Ax=y$ denklemini $LUx=y$ şeklinde yazabiliriz. burada $LU=A$ dır. Eğer $Ux=z$ dersek,

$Lz=y$ denklemini elde ederiz.

L'nin üçgen matris olmasından dolayı z'ler kolayca bulunur. z değerleri bulunca x değerleri de $Ux=z$ denkleminden bulunur. 3×3 lük bir matris için bu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

buradan; $z_1 = y_1$, $z_2 = [y_2 - z_1 l_{21}]$, $z_3 = [y_3 - z_1 l_{31} - z_2 l_{32}]$

bulunur.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$ denkleminden

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{33}}, \quad x_2 = \frac{z_2 - u_{23}x_3}{u_{22}}, \quad x_1 = \frac{z_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}}$$

bulunur.

$N\times N$ lik sistem için ileri ve geri doğru yok etme şu şekilde özetlenebilir.

a) ileri doğru yoketme

$$z_1 = y_1$$
$$z_i = y_i - \left[\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} z_j\right], \quad i = 2,3,\ldots,N$$

3 Bandlı Matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

LU ile ; $L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = LU$, işleminden ;

① $a_{11} = l_{11}$

② $a_{i,i-1} = l_{i,i-1}$, her $i = 2,3,\ldots,n$ için

③ $a_{ii} = l_{i,i-1} u_{i-1,i} + l_{ii}$, her $i = 2,3,\ldots,n$ için

④ $a_{i,i+1} = l_{ii} u_{i,i+1}$, her $i = 1,2,\ldots,n-1$ için.

Önce ② ile L 'nin köşegen harici elemanları bulunur. Sonra ④ ve ③ sırasıyla kullanılarak U ve L içindeki diğer elemanlar bulunur.

Elde edilen L ve U matrisi A'da saklanabilir.

Geriye doğru yoketme:

$$x_N = \frac{z_N}{u_{NN}}$$

$$x_i = \frac{\left[z_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij} x_j \right]}{u_{ii}} \quad , \; i = N-1, N-2, \ldots, 3, 2, 1$$

Buraya kadar pivotlama kullanmadık. Pivotlama buradada kullanılabilir. Satırların yer değiştirmeleri (a) ve (b) adımlarında doğru olarak yapılmalıdır.

<u>Determinant</u>: Bir A matrisinin determinantı

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{i1} a_{j2} a_{k3} \ldots, a_{rN}$$ şeklinde yazılır.

Toplama işlemi a'nın ilk indisinin bütün permutasyonları üzerinde yapılır. $(\pm)$ değeri $(+)$ olur eğer permutasyon tek ise. $(-)$ olur eğer permutasyon çift ise ve

Örnek: $\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} a_{12} - a_{12} a_{21}$

3x3 sistem

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13}$$

Kural 1: $\det(BC) = \det(B) \cdot \det(C)$

Kural 2: $\det(M)$ = köşegen değerlerinin çarpımı

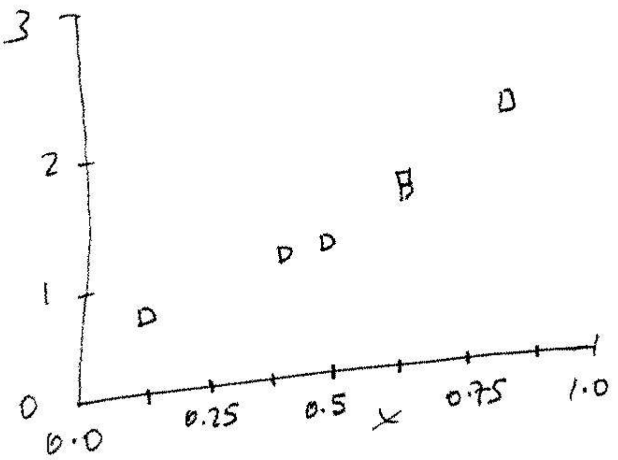
Buna göre, $\det(A) = \det(LU) = \det(L) \det(U) = \det(U)$

çünkü $\det[L] = 1$ dir.

demekki $\det(A) = \prod_{i=1}^{N} u_{ii}$

EĞRİ UYDURULMASI : Elimizde ölçtüğümüz aşağıdaki veriler olduğunu varsayalım.

i	x	y
1	0.1	0.61
2	0.4	0.92
3	0.5	0.99
4	0.7	1.52
5	0.7	1.47
6	0.9	2.03



Bu verilere uyan lineer bir fonksiyon bulmaya çalışalım. Öyleki bu fonksiyonun datalardan uzaklığı minimum olsun. Bu doğru $g(x)=a+bx$ olsun. Doğrunun her bir veri noktasına olan uzaklığı

$$r_i = y_i - g(x_i) = y_i - (a+bx_i)$$

olacaktır. Burada L toplam nokta sayısı $i=1,2,\ldots L$ ve a ve b bulunması gereken katsayılardır.

Bu uzaklığın karelerinin toplamı

$$R = \sum_{i=1}^{L} r_i^2 = \sum_{i=1}^{L} (y_i - a - bx_i)^2$$ şeklinde bulunur.

R'nin minimum olması için R'nin a ve b'ye göre kısmi türevlerinin sıfır olması gerekir. Yani

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{L}(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{L} x_i(y_i - a - bx_i) = 0$$

-2 ile bölünerek tekrar yazılırsa

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Burada $A_{11} = L$, $A_{12} = \sum x_i$, $Z_1 = \sum y_i$
$A_{21} = \sum x_i$, $A_{22} = \sum x_i^2$, $Z_2 = \sum x_i y_i$ dir.

Buradaki toplam işlemleri $i = 1, 2, \ldots, L$ içindir.
Görüldüğü gibi $A_{12} = A_{21}$ 'dir.

<u>Örnek</u> : Evvelki verdiğimiz veri seti için doğruyu bulunuz.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0.1	0.61	0.01	0.061
2	0.4	0.92	0.16	0.368
3	0.5	0.99	0.25	0.495
4	0.7	1.52	0.49	1.064
5	0.7	1.47	0.49	1.029
6	0.9	2.03	0.81	1.827
Toplam	3.3	7.54	2.21	4.844
	$A_{12}=A_{21}$	Z_1	A_{22}	Z_2

Buradan $\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$ bulunur.

Çözülürse $a = 0.2862$, $b = 1.7645$ elde edilir.

Böylece uydurulan lineer doğru : ~~de~~

$$g(x) = 0.2862 + 1.7645x$$

şeklinde bulunur. Fonksiyonun grafiği çizilerek verilerden ne kadar uzakta olduğu görülebilir.

Doğru uydurma metodu $g(x) = c\,x^b$ şeklinde fonksiyon seçilerek de uygulanabilir. Burada c ve b hesaplanması gereken katsayılardır.
Bu denklemin logaritmasını alarak,

$$\log(g) = \log(c) + b \log(x) \quad \text{elde edilir.}$$

$Y = \log(g)$, $X = \log(x)$, $a = \log(c)$ tanımı yapılarak

$Y = a + bX$ şekline getirilebilir. Bu ise lineer bir fonksiyondur. Veri değerleri $(\log(x_i), \log(y_i))$ şekline getirilerek a ve b katsayıları bulunabilir.
Yani logaritmik bir eksen sisteminde problem lineer regresyon şekline döner.

Polinomlar Kullanılarak Eğri Uydurulması:

n mertebeli bir polinom ele alalım.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$$

Bu verilen değerlerden geçen $g(x)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım. Öyleki toplam sapma minimum olmalı.

Her bir veri noktasından fonksiyonun farkı:

$$r_i = y_i - g(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, L$$

Toplam sapma: $R = \sum_{i=1}^{L} r_i^2$

R değerini minimum yapmak için R'nin a_k'ya göre her bir kısmi türevini alıp sıfıra eşitlememiz gerekir.

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N$$

veya

$$\sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{i=1}^{L} x_i^{n+k}\right] a_n = \sum_{i=1}^{L} x_i^k y_i \quad , \; k=0,1,2,\dots N \text{ için}$$

Daha açık olarak yazarsak:

$$\begin{bmatrix} L & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^N \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{N+1} \\ & & \dots & & \\ \sum x_i^N & \sum x_i^{N+1} & \sum x_i^{N+2} & \dots & \sum x_i^{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^N y_i \end{bmatrix}$$

a_n, $n=0,1,2,\dots N$ katsayıları yukarıdaki lineer denklem sistemini Gauss yoketme metodu kullanılarak çözülebilir.

<u>Ödev:</u> ilk örnekte verilen değerler için 2. dereceden polinom uydurunuz.

Bilinen Fonksiyonların Lineer Kombinasyonu Kullanılarak <u>Eğri Uydurulması</u>: Bu kez fonksiyonumuz,

$g(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \dots + a_N f_N(x)$ şeklindedir.

veya $g(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x)$

Eğrinin, datadan ayrılan değerleri

$$r_i = y_i - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x_i) \quad , \; i=1,2,\dots,L$$

burada L, toplam data sayısıdır.

Bu farkın karesi $R = \sum_{i=1}^{L} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{L}\left[y_i - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x_i)\right]^2$

R'nin bilinmeyen katsayılara göre kısmi türevlerini sıfıra eşitleyek minimize edelim.

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0, \quad k=1,2,\dots,N$$

Veya $\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{L} f_m(x_i)\, f_k(x_i)\right] a_m = \sum_{i=1}^{L} y_i f_k(x_i)\,, k=1\ldots N$

Bu denklemde N bilinmeyen vardır. Yine N denklem olduğu için NxN lik sistem Gauss metodu ile çözülebilir.

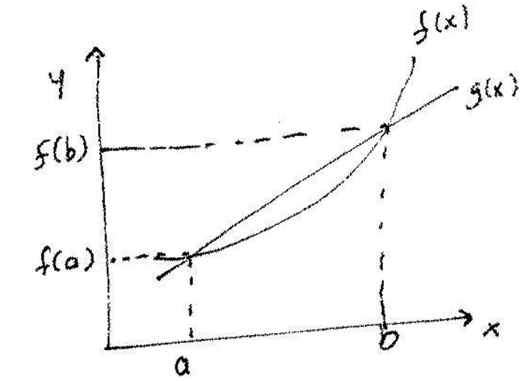
Ödev: $g(x)=a_1+a_2x+a_3\sin(x)+a_4\exp(x)$ seçerek aşağıdaki verilere eğri uyduruZuz.

x	0.1	0.4	0.5	0.7	0.7	0.9
y	0.61	0.92	0.99	1.52	1.47	2.03

POLİNOMLAR KULLANARAK İNTERPOLASYON:

Çeşitli metodlar vardır. Her birinin kuvvetli ve zayıf tarafları vardır.

Lagrange interpolasyonu	Kolay programlanır. Basit şekli var	Hesap makinesi ile yapmak zor.
Newton inter.	Polinomun mertebesi kolayca değiştirilebilir. Hata hesabı kolay.	fark tabloları hazırlanmalı
Lagrange inter., Chebyshev noktaları kullanarak	Hatalar daha düzenli dağıtılır.	Eşit olmayan grid aralıkları
Hermite inter.	Hassasiyet fazla çünkü türevede polinom uydurulur	Türev değerlerine ihtiyaç var
Cubic Metod	Her data noktalarına uygulanabilir (Ne kadar data olursa olsun)	denklem sistemi çözmek gerekir.



a ve b noktalarından geçen lineer doğru:

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

Burada $f(a)$ ve $f(b)$, $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ ve $x=b$ noktalarındaki değerleridir.

Yukarıdaki lineer interpolasyonun hatası

$$e(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b) f''(\xi) \quad , a < \xi < b$$

olarak gösterilebilir. Eğer $[a, b]$ aralığı küçük ve f'' çok az değişen bir fonksiyon ise $f''(\xi)$ değerini $f''(x_m)$ olarak yaklaşık hesaplayabiliriz. Burada $x_m = \frac{a+b}{2}$, yani orta noktadır.

Dikkat edilirse:

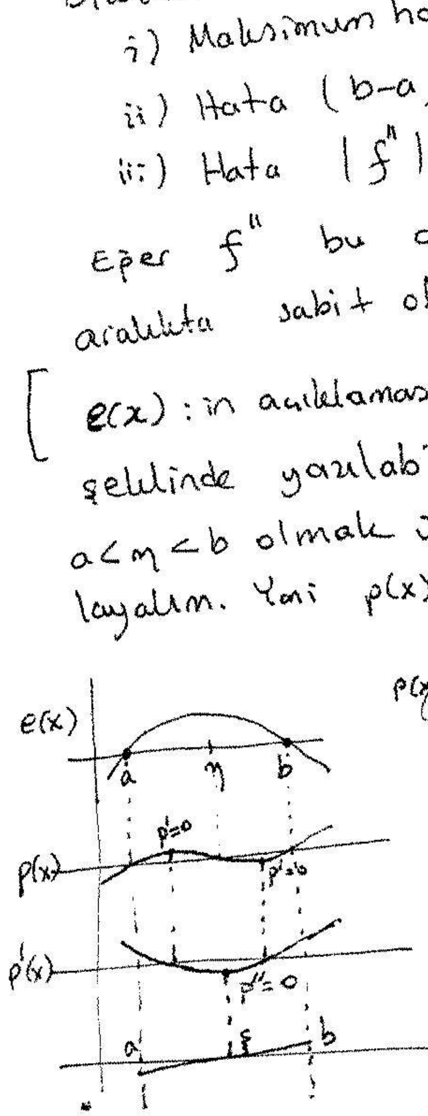
i) Maksimum hata orta noktada oluşur.

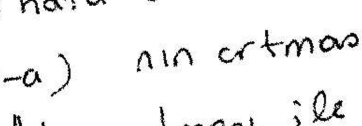
ii) Hata $(b-a)$ nın artması ile artmaktadır.

iii) Hata $|f''|$ artması ile artmaktadır.

Eğer f'' bu aralıkta bir noktada sıfır değerini alıyorsa, f'' nün bu aralıkta sabit olması kabulü geçerliliğini yitirir.

[$e(x)$: in açıklaması: $e(x) = f(x) - g(x)$, veya $e(x) = (x-a)(x-b)s(x)$ şeklinde yazılabilir. Çünkü a ve b de hata sıfır oluyor. $a < \eta < b$ olmak üzere $p(x) = f(x) - g(x) - (x-a)(x-b)s(\eta)$ tanımlayalım. Yani $p(x) = (x-a)(x-b)[s(x) - s(\eta)]$





$p(x)$, 3 noktada sıfır oluyor. a, b ve η

$p'(x)$, η 'nın sağında ve solunda iki yerde sıfır oluyor.

$p''(x)$, ξ ile belirtilen noktada sıfır oluyor.

iki kez türev alarak

$$p''(x) = f''(x) - 0 - 2s(\eta)$$

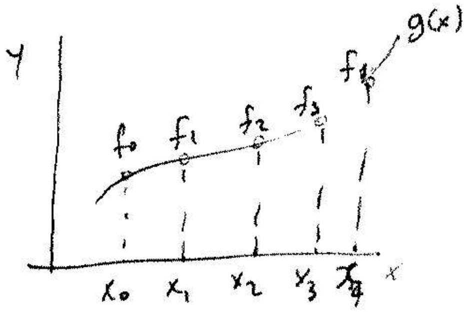
$x = \xi$ için $\quad 0 = f''(\xi) - 2s(\eta)$ veya $s(\eta) = \frac{1}{2} f''(\xi)$

değişken değiştirerek $s(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)$, $a < \xi < b$, $a < x < b$

Böylece hata $e(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi)$, $a<\xi<b$, $a<x<b$ bulunur.

Maksimum hata orta noktada oluşur. $Max|e(x)| \simeq \frac{h^2}{8}|f''(x_m)|$

Lagrange interpolasyonu:



Bu x_i noktalarından geçen $g(x)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım. Bu x_i noktalarına tekabül eden fonksiyon değerleri f_i olsun.

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N$, $N+1$ noktadan geçen polinom.

x_i noktalarında:

$$f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_N x_0^N$$
$$f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_N x_1^N$$
$$\vdots$$
$$f_N = a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \dots + a_N x_N^N$$

bu denklem sistemini kullanarak a_i değerlerini bulmak mümkündür. Fakat bunun için program yazmak gerekir. Ayrıca x_i değerlerinin kuvvetleri alındığında bazı terimler çok büyük olacak, neticede yuvarlama hatalarından dolayı hassas çözüm elde edilemeyecektir. Daha basit bir metodla,

$$\overline{V}_0(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)$$ polinomunu göz önüne alalım.

$x = x_0$ için $\overline{V}_0(x_0) = (x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_N)$

$\overline{V}_0(x)$ i $\overline{V}_0(x_0)$ ile bölelim.

$$V_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_N)}$$

bu yeni fonksiyon $x = x_0$ için 1, $x = x_1, x_2, x_3 \dots$ değerleri için sıfır değerini almaktadır. Diğer x_i noktaları için de

$$V_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_N)}$$ yazılabilir.

Bu $v_i(x)$ fonksiyonlarını f_i değerleri ile çarpıp toplarsak elde ettiğimiz N. dereceden polinom olur. Ve bu fonksiyon x_i noktalarında f_i değerini alır. Yani

$$g(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_N)} f_0$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_N)} f_1$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{N-1})}{(x_N-x_0)(x_N-x_1)\cdots(x_N-x_{N-1})} f_N$$

Bu fonksiyon daha evvel bahsettiğimiz, lineer sistemi çözmekle bulunan polinoma denktir. Uzun çözülmesine rağmen, yapısı anlaşılırsa hatırlanması kolaydır.

Örnek:

	i	0	1	2
°C	T_i	94	205	371
kg/m³	ρ_i	929	902	860

3 data noktası olduğuna göre polinomun derecesi 2 dir.

$$g(T) = \frac{(T-205)(T-371)}{(94-205)(94-371)}(929)$$

$$+ \frac{(T-94)(T-371)}{(205-94)(205-371)}(902)$$

$$+ \frac{(T-94)(T-205)}{(371-94)(371-205)}(860)$$

$T = 251\,°C$ için yoğunluğu bulmak istersek

$\rho = g(251\,°C) = 890.5\ kg/m^3$ elde edilir.

Lagrange formülü programlamada daha kısa yazabiliriz. C'de,

```
g=0
for( i=0; i<=n; i++ ){
 z=1.0;
 for(j=0; j<=n; j++) {
     if( i!=j ) z=z*(xa-x[j])/(x[i]-x[j]);
 }
 g=g+ z*f[i];
}
```

Burada f[i] ve x[i] verilen datalar; g, sonuç; z, terimlerin çarpımı; xa ise istenen x değeridir.

Hata $e(x)=f(x)-g(x)$ şeklinde hesaplanır. Hata,

i) x_i noktalarının dağılımına,

ii) interpolasyon aralığının büyüklüğüne,

iii) polinomun derecesine bağlı olarak değişir.

İspatlamadan $e(x)=f(x)-g(x)=L(x)\cdot f^{(N+1)}(\xi)$ $\quad x_0<\xi<x_N$

şeklinde yazılabilir. N+1 tane veri noktamız vardır.

Burada $L(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)}{(N+1)!}$ olarak verilir.

Eğer [a, b] aralığı küçük ise ξ için orta nokta x_m alınabilir. Bu durumda $e(x)=L(x)\,f^{(N+1)}(x_m)$ halini alır.

Burada x_m, iki uç nokta arasındaki orta noktadır.

Eğer 1 nokta daha elde edilebilirse $f^{(N+1)}$'i hesaplamak mümkündür. Aksi halde $f(x)$ fonksiyonundan hesaplanır.

<u>Ödev:</u> $f(x)=\log_{10}x$ için verilen

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	0.30103	0.47712	0.60206

tabloyu kullanarak $x=1.5,\ 2.5$ ve 3.5 noktalarındaki hatayı ve gerçek hatayı bulunuz.

Newton İleri ve Geri Farklar Metodu:

Bu metodda x_i noktalarının aralıkları eşit alınır.

İleri Farklar Tablosu:

$\Delta^0 f_i = f_i$ şeklinde ileri farklar tanımlanır.

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ Bu değerler kullanılarak aşağıdaki:

$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$

$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i$

$\vdots$

$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$

i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	$\Delta^5 f_0$
1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	
2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$		
3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$			
4	f_4	Δf_4				
5	f_5					

tablosu hazırlanır.

Dikkat edilmesi gereken bir şey, eğer $f(x)$ bir N mertebeli polinom ise L. kolon sabit hale geldiğinde (L+1). kolon sıfır olur. Eğer farklı ise ya insan hatası ~~veri~~ veya verilerde bir hata vardır.

Binom Katsayıları: $\binom{s}{0} = 1$, $\binom{s}{1} = s$, $\binom{s}{2} = \frac{1}{2!} s(s-1)$

$\binom{s}{3} = \frac{1}{3!} s(s-1)(s-2)$ ve $\cdots$ $\binom{s}{n} = \frac{1}{n!} s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)$

şeklindedir. Burada s, yerel koordinattır ve $s = \frac{x - x_0}{h}$ dir. h grid aralığıdır.

Newton ileri farklar interpolasyon formülü:

$(k+1)$ data noktasında $f_0, f_1, \dots, f_k$ değerini alan fonksiyon

$$g(x) = g(x_0+sh) = \sum_{n=0}^{k} \binom{s}{n} \Delta^n f_0$$ şeklinde verilir.

Örneğin $k=2$ ise $g(x_0+sh) = f_0 + s(f_1-f_0) + \frac{s(s-1)}{2}(f_2-2f_1+f_0)$

veya $$g(x) = g(x_0+sh) = f_0 + (sh)\frac{-f_2+4f_1-3f_0}{2h} + \frac{(sh)^2}{2}\frac{f_2-2f_1+f_0}{h^2}$$

şeklini alır.

$g(x)$ fonksiyonu k. dereceden polinomdur. Çünkü $\binom{s}{n}$ n. dereceden polinomdur ve en yüksek derecesi k'dır.

$g(x)$ fonksiyonu, $x = x_i$ noktalarında f_i değerlerine eşittir.

$s=0 \Rightarrow g(x_0) = g(x_0+0) = f_0$

$s=1 \Rightarrow g(x_1) = g(x_0+h) = f_0 + \Delta f_0 = f_1$

$s=2 \Rightarrow g(x_2) = g(x_0+2h) = f_0 + 2\Delta f_0 + \Delta^2 f_0 = f_2$

$\vdots$

$s=k \Rightarrow g(x_k) = g(x_0+kh) = f_0 + k\Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \dots = f_k$

~~(m+1) tane data noktası~~ aldığımızda ~~ilk tablomuzun~~ ilk satırından ~~(m+1) tane data noktası~~ ~~elde ederiz.~~

~~m. dereceden polinom elde ederiz.~~ $g(x)$ tanımında alacağımız ilk $(m+1)$ terim, m. dereceden bir polinom tanımlar. Bu polinom $(m+1)$ data noktası $(x_0, x_1, \dots x_m)$ na tekabül eder. Böylece istenilen derecede polinom elde edilebilir.

Benzer şekilde x_0 ve f_0, $g(x)$ formülünde x_2 ve f_2 ile yer değiştirirse;

$$g(x) = g(x_2+sh) = \sum_{n=0}^{k} \binom{s}{n} \Delta^n f_2$$

Burada $s = \dfrac{x - x_2}{h}$, yerel koordinattır. s, $x = x_2$ noktasında sıfır olur. s, $1, 2, 3 \ldots$ ~~nokta~~ değerlerini $x = x_3, x_4, x_5 \ldots$ noktalarında alır. Bu son formül k. dereceden bir polinom olup $x_2, x_3 \ldots x_{k+2}$ noktalarından geçer ve Tablomuzun 3. satırlar kullanılarak elde edilir. Böylece, fark tablosu bir kez hazırlandığında farklı veri noktalarından geçen polinomlar kolayca bulunur.

Bu metoddaki hata LI ile aynıdır.

$$e(x) = f(x) - g(x) = L(x)\, f^{(N+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_N$$ şeklinde

hesaplanır. Burada $f(x)$, gerçek çözüm, $g(x)$ ise Newton interpolasyon fonksiyonudur. Hata,

$$\binom{s}{N+1} \Delta^{N+1} f_0 = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-N)}{(N+1)!}\, \Delta^{N+1} f_0$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_N)}{(N+1)!} \times \frac{\Delta^{N+1} f_0}{h^{N+1}}$$

şeklinde gelir. Burada $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ ve $x_n = x_0 + nh$ dir.

$$\frac{\Delta^{N+1} f_0}{h^{N+1}} \simeq f^{(N+1)}(x_m), \quad x_m = \tfrac{1}{2}(x_0 + x_N)$$ olduğu gösterilebilir.

Eğer f_N den sonra f_{N+1} değeri ~~yok~~ yok ise türevi bulmak mümkün olmaz. Bu durumda eğer f_{-1} var ise $\Delta^{N+1} f_{-1}$ hesaplanarak $\Delta^{N+1} f_0$ için bir yaklaşım olarak kabul edilebilir.

Geriye Doğru Farklarla İnterpolasyon :

Tanım: $\nabla^0 f_i = f_i$ sıfırıncı mertebeden geriye doğru fark.

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ 1. dereceden

$\nabla^2 f_i = \nabla f_{i+1} - \nabla f_i \times \quad \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$

$\nabla^3 f_i = \nabla^2 f_{i+1} - \nabla^2 f_i \times \quad \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1}$

$\vdots$

$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_{i+1} - \nabla^{k-1} f_i \times \quad \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$

Bu interpolasyonda kullanılan binom katsayıları ise

$$\binom{s-1}{0} = 1$$

$$\binom{s}{1} = s$$

$$\binom{s+1}{2} = \frac{1}{2!}(s+1)s$$

$$\binom{s+2}{3} = \frac{1}{3!}(s+2)(s+1)s$$

$$\vdots$$

$$\binom{s+n-1}{n} = \frac{1}{n!}(s+n-1)(s+n-2)\dots(s+1)s$$

$x = x_j$, $x = x_{j-1}$, $x = x_{j-2}$, …, ve $x = x_{j-k}$ noktalarından geçen Newton geriye farklar interpolasyon formülü şöyledir:

$$g(x) = g(x_j + sh) = \sum_{n=0}^{k} \binom{s+n-1}{n} \nabla^n f_j \quad , \; -k \leq s \leq 0$$

burada s, yerel koordinattır ve $s = \frac{(x - x_j)}{h}$ şeklinde tanımlanır. $\nabla^n f_j$ ise geriye doğru farktır.

İleriye doğru fark ile geriye doğru fark arasındaki bağıntı

$\nabla^n f_j = \Delta^n f_{j-n}$ şeklindedir. Dolayısıyla yukarıdaki formül

$$g(x) = \sum_{n=0}^{k} \binom{s+n-1}{n} \Delta^n f_{j-n} \quad , \; -k \leq s \leq 0$$ şeklinde

yazılabilir.

Daha açık ifade ile;

$$g(x) = g(x_j + sh) = f_j + s(f_j - f_{j-1}) + \frac{1}{2}(s+1)s(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})$$
$$+ \frac{1}{6}(s+2)(s+1)s(f_j - 3f_{j-1} + 3f_{j-2} - f_{j-3}) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{k!}(s+k-1)(s+k-2)\cdots(s+1)s\ \Delta^k f_{j-k}$$

Örnek.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
f_i	0.99750	.97763	.93847	.88120	.80752	.71962	.62009

veriliyor. İleri farklar tablosunu çıkarın. $i=0,1,2,3,4$ ve $i=4,5,6$ noktalarından geçen polinomları bulun.

i	x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$	$\Delta^6 f_i$
0	0.1	0.99750	-0.01987	-0.01929	0.00118	0.00052	-.00003	-.00006
1	0.3	0.97763	-0.03916	-0.01811	0.00170	0.00049	-.00009	
2	0.5	0.93847	-0.05727	-0.01641	0.00219	0.00040		
3	0.7	0.88120	-0.07366	-0.01422	0.00259			
4	0.9	0.80752	-0.08790	-0.01163				
5	1.1	0.71962	-0.09953					
6	1.3	0.62009						

a) $g(x) = g(x_0 + sh) = \sum_{n=0}^{k} \binom{s}{n} \Delta^n f_0$, $k+1$ data ~~ps~~ noktaları

$k=4 \Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{4} \binom{s}{n} \Delta^n f_0$

$$g(x) = y = f_0 + s(f_1 - f_0) + \frac{s(s-1)}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}(\ldots)$$

$$y = 0.99750 - 0.01987s - \frac{0.01929}{2}s(s-1) + \frac{0.00118}{6}s(s-1)(s-2)$$
$$+ \frac{0.00052}{24}s(s-1)(s-2)(s-3) \quad , \quad s = \frac{x - x_0}{h}$$

b) $i=4,5,6$ ise $i=4$. satırı kullanıp,

$$y=0.80752-0.08790\,s-\frac{0.01163}{2}s(s-1) \quad , \quad s=\frac{x-x_4}{h}$$

<u>Örnek:</u> Bir evvelki veriler için geriye doğru farklar tablosunu yapınız. $i=3,4,5$ noktalarından geçen polinomu bulunuz.

Polinomun derecesi 2'dir.

$$g(x)=g(x_5+sh)=\sum_{n=0}^{2}\binom{s+n-1}{n}\nabla^n f_5 = f_5+s\nabla f_5+\frac{1}{2}(s+1)s\,\nabla^2 f_5$$

$s=\dfrac{x-x_5}{h}$ ve $-2\le s\le 0$. f_5, ∇f_5 ve $\nabla^2 f_5$ değerlerini kullanarak,

$$g(x)=0.71962-0.08790s-\frac{0.01422}{2}(s+1)s$$

yada $s=\dfrac{x-x_5}{h}$ kullanarak,

$$g(x)=0.71962-\frac{0.08790(x_5-x)}{h}-\frac{0.00711(x_5-x)(x_4-x)}{h^2}$$

<u>Ödev:</u> Eşit olmayan aralıklar için Newton interpolasyon formülünü çıkarınız.

<u>Chebyshev</u> Kökleri ile <u>interpolasyon:</u>

Bu fonksiyonlar $T_K=\cos(K\cos^{-1}(x))$, $-1\le x\le 1$ olarak tanımlanır. Burada K Chebyshev polinomunun derecesidir. Kuvvet serileri cinsinden aynı polinomlar,

$$T_0(x)=1$$
$$T_1(x)=x$$
$$T_2(x)=2x^2-1$$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ şeklindedir.

$T_j(x) = 2x\, T_{j-1}(x) - T_{j-2}(x)$ şeklinde bulunabilir.

Cosinüs fonksiyonu $\pm \pi/2$, $\pm 3\pi/2$ ... noktalarında sıfır olduğundan, K. dereceden polinom için

$K \cos^{-1}(x_n) = (K + \frac{1}{2} - n)\pi$, $T_k(x)$ fonksiyonunun
$(n = 1, 2, \ldots, K)$
kökleri olacaktır. Buradan,

$$x_n = \cos\left(\frac{K + 1/2 - n}{K}\pi\right), \quad n = 1, 2, \ldots, K \text{ olur.}$$

Örneğin $K=3$ ise x_1, x_2, x_3 değerleri -0.86602, 0, ve $+0.86602$ olur. Bu değerler kullanıldığında istenilen aralıktaki hatalar daha düzenli(uniform) olarak dağıtılır. $[-1, 1]$ aralığında ancak yukarıdaki 3 değeri kullanabileceğimizden üç aralıklarda bulunan interpolasyon polinomu, extrapolasyon yapmak için kullanılır.

$x = [-1, 1]$ aralığını, $z = [a, b]$ aralığına aktarmak için $z = \dfrac{(b-a)x + a + b}{2}$ formülü kullanılabilir.

Bu durumda,

$$z_n = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{K + 1/2 - n}{K}\pi\right) + a + b\right], \quad n = 1, 2, \ldots, K$$

olarak bulunur.

Örnek: $2 \le z \le 4$ aralığında 3 chebyshev noktası bulun.

$a=2,\ b=4,\ k=3$ alarak $n=1,2,3$ değerleri için

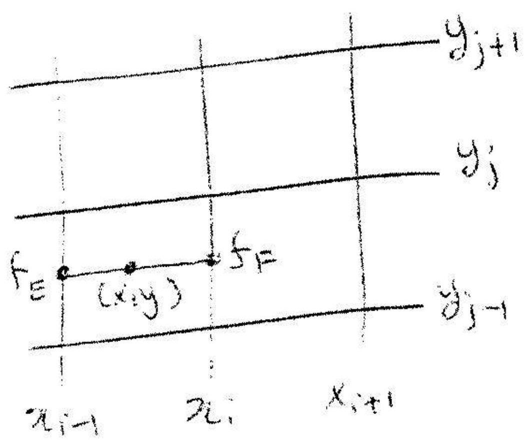
$$z_1 = 2.13397$$
$$z_2 = 3 \qquad \text{bulunur.}$$
$$z_3 = 3.86602$$

b) Bu noktaları kullanarak $\ln(z)$ ye uygun lagrange polinomunu bulun.

z	$\ln(z)$
2.13397	0.757984
3	1.098612
3.86602	1.352226

$$f(z) = \frac{(z-3)(z-3.86602)}{(2.13397-3)(2.13397-3.86602)}(0.757984)$$
$$+ \frac{(z-2.13397)(z-3.86602)}{(3-2.13397)(3-3.86602)}(1.098612)$$
$$+ \frac{(z-2.13397)(z-3)}{(3.86602-2.13397)(3.86602-3)}(1.352226)$$

İKİ BOYUTTA INTERPOLASYON:



$$f_E = \frac{y_j - y}{y_j - y_{j-1}} f_{i-1,j-1} + \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} f_{i-1,j}$$

$$f_F = \frac{y_j - y}{y_j - y_{j-1}} f_{i,j-1} + \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} f_{ij}$$

Bu değerleri kullanarak,

$$g(x,y) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f_E + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f_F$$ olarak bulunur.

Bu iki adımı birleştirebiliriz.

EXTRAPOLASYON: Bulunan polinom uç noktaların dışındaki x_i noktaları içinde kullanılabilir. Fakat bunun için fonksiyonun gidişatı hakkında analiz yapılmalıdır.

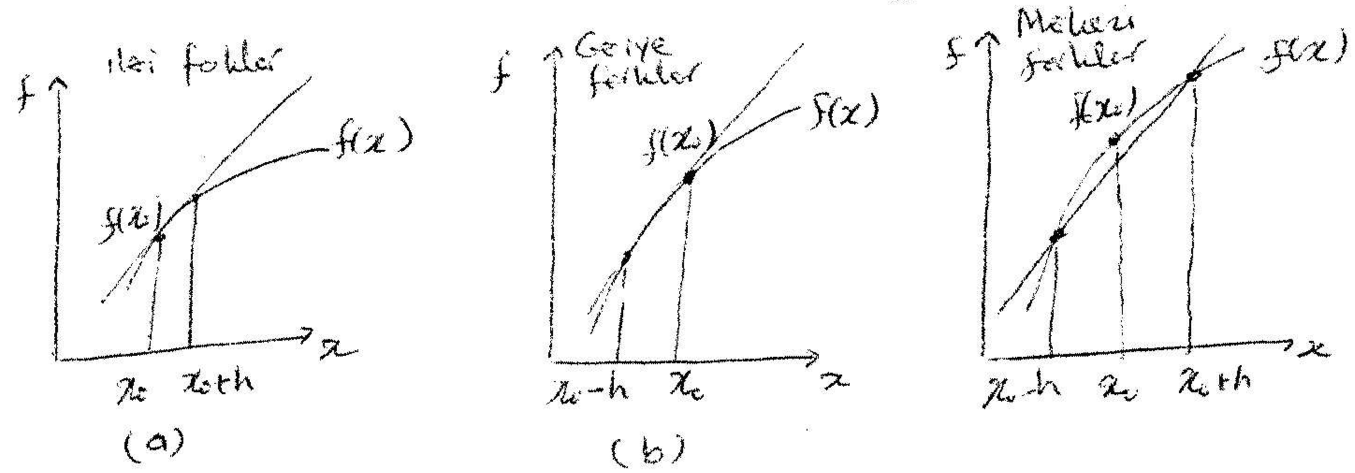
Nümerik Türev ve İntegral:

Bir x_0 noktasındaki türevi gözönüne alalım.

a) ileri farklar: $$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

b) Geriye doğru farklar: $$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

c) Merkezi farklar: $$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$



Türev Bulmak İçin 3 metod:

1) Taylor açılımı: A: Hata Terimleri açıkça verilebilir. Uniform olmayan gridlere uygulanabilir.
D: Sadece 1 formül bulunabilir tek bir analizde

2) Fark Operatörü: A: Farklar metoduna benzer. D: Hatayı bulmak için Taylor açılımı gerekir.

3) İnterpolasyon formüllerinin türevini almak.

A: Bir sürü yaklaşım elde edilebilir.

D: Eşit olmayan aralıklarda uygulanması zordur.

i) Taylor Açılımı:

$f_i' = f'(x_i)$ ve $f_i = f(x_i)$ ve $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ dir.

f_{i+1} in x_i noktasında açılımı:

$$f_{i+1} = f_i + h f_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + \frac{h^4}{24} f_i^{(iv)} + \cdots$$

Buradan f_i' 'yi çözersek:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{1}{2} h f_i'' - \frac{1}{2} h^2 f_i''' - \cdots$$

Birinci terimden sonra kesersek, bu formül ileri farklar metodu haline gelir. Kesilen terimler hatanın büyüklüğünü belirler. Bu hata miktarı ilk terim olan ($-\frac{1}{2} h f_i''$ bu halde) ile ifade edilir. Çünkü h küçük olduğunda diğer terimler ($h^2 \ldots$) çok daha hızlı küçülür. Kesme hatası ile bu metod.

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h),$$

burada $O(h) = -\frac{1}{2} h f_i''$.

Burada $O(h)$, hatanın yerel mertebesi olan h ile orantılı olduğunu gösterir.

Benzer şekilde geriye doğru farklar ile. f_{i-1} ve f_i kullanarak:

$$f_{i-1} = f_i - h f_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \frac{h^3}{6} f_i''' + \frac{h^4}{24} f_i^{(iv)} - \cdots$$

Buradan f_i' çözülürse.

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \Theta(h)$$ bulunur. Burada

$$\Theta(h) = \frac{1}{2} h f_i''$$ dir.

Merkezi farklar ile elde edilecek yaklaşım f_{i+1} ve f_{i-1} değerlerini yukarıdaki açılımlardan kullanarak bulunur. iki açılımı çıkartarak:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2h f_i' + \frac{1}{3} h^3 f_i''' + \dots$$ bulunur. f_i' için çözersek:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{1}{6} h^2 f_i''' + \dots$$ bulunur.

Yani $$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \Theta(h^2)$$ ve

$$\Theta(h^2) = -\frac{1}{6} h^2 f_i'''$$ dir

Burada f'' terimlerinin birbirini götürmesinden dolayı hata terimi h^2 ile orantılı çıktı. h aralığı küçüldüğünde, hata, ~~çok~~ diğer metodlara nazaran çok daha hızlı küçülecektir.

Bilindiği gibi $f_i^{(p)}$ fark yaklaşımı için p+1 veri kullanıldığında, daha faydalıdır. Daha fazla veri kullanarak daha hassas fark metodları bulunabilir. Verilen datalar için, en yüksek hassasiyetli fark formülü, hata teriminin en yüksek derecede olduğu haldir.

f_i' 'nü bulmak için f_{i+1} ve f_{i+2} yi kullanalım.

$$f_{i+1} = f_i + h f_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + \frac{h^4}{24} f_i^{(iv)} + \cdots$$

$$f_{i+2} = f_i + 2h f_i' + 4 \frac{h^2}{2} f_i'' + 8 \frac{h^3}{6} f_i''' + 16 \frac{h^4}{24} f_i^{(iv)} + \cdots$$

2. terimi yok etmek için ilk formülü 4 ile çarpıp çıkaralım.

$$4 f_{i+1} - f_{i+2} = 3 f_i + 2h f_i' - \frac{2}{3} h^3 f_i''' + \cdots$$

Yeni kesme hatasının ilk terimi 3. mertebeden türev terimidir. f_i' için çözülürse:

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 4 f_{i+1} - 3 f_i}{2h} + O(h^2) \quad \text{ve}$$

$$O(h^2) = \frac{1}{3} h^2 f_i''' \quad \text{bulunur.}$$

Bu formül 3 nokta ile ileri farklar alarak adlandırılır. Hatanın mertebesi merkezi farklar ile aynıdır. Aynı şekilde 3 nokta ile geriye doğru farkları kullanarak:

$$f_i' = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + O(h^2)$$

ve $O(h^2) = \frac{1}{3} h^2 f_i'''$ bulunur.

<u>Örnek:</u> tan(x) 'in ilk türevini x=1 noktasında h=0.1, 0.05 ve 0.02 alarak 5 değişik metod ile bulunuz. (Sayfa 173-174)

Çözüm

	h=0.1	h=0.05	h=0.02	% ha[illegible]
$[\tan(1)-\tan(1-h)]/h$	2.9724	3.1805	3.3224	3
$[\tan(1+h)-\tan(1)]/h$	4.0735	3.7181	3.5361	-3.2
$[\tan(1+h)-\tan(1-h)]/2h$	3.5230	3.4493	3.4293	-0.1
$[3\tan(1)-4\tan(1-h)+\tan(1-2h)]/2h$	3.3061	3.3885	3.4186	0.2
$[-\tan(1+2h)+4\tan(1+h)-3\tan(1)]/2h$	3.0733	3.3627	3.4170	0.2

f_i'' türevini bulmak için f_{i+1} ve f_{i-1} açılımlarını kullanalım. Bu formülleri ekleyerek

$$f_{i+1}+f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + \frac{1}{12} h^4 f_i'''' + \cdots$$ bulunur.

Her iki taraftan $2f_i$ çıkarılarak

$$f_{i+1}-2f_i+f_{i-1} = h^2 f_i'' + \frac{1}{12} h^4 f_i^{(iv)} + \cdots$$

Keserek yazarsak $$f_i'' = \frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

bulunur. Burada $O(h^2) = -\frac{1}{12} h^2 f_i^{(iv)}$ dür. Bu formül merkezi farklar ile f_i'' olarak bilinir.

f_i'' için başka bir fark metodu bulunabilir.

2 kez f_{i-1}'i f_{i-2} den çıkararak

$$f_{i-2}-2f_{i-1} = -f_i + h^2 f_i'' - h^3 f_i''' + \cdots$$ ve

$$f_i'' = \frac{f_{i-2}-2f_{i-1}+f_i}{h^2} + O(h), \quad O(h) = h f_i'''$$

bulunur. Bu formül f_i'' için geriye doğru farklar ile yaklaşım olarak bilinir.

(Tablo 5.2, Sayfa 175)

Fark Operatörlerinin Kullanımı:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad , \quad \nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad , \quad \delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$$

veya $\quad \delta f_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i \quad , \quad f_{i+1/2} = f(x_i + \frac{h}{2})$

Bunları kullanarak,

$$\Delta^2 f_i = \Delta (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

$$\Delta \nabla f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

$$\nabla \Delta f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

yazılabilir.

Dikkat edilirse, $\delta^2 = \Delta\nabla = \nabla\Delta$ dir.

Türev yaklaşımları:

$$\frac{d}{dx} \simeq \frac{\Delta}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx} \simeq \frac{\nabla}{\nabla x}$$

$$\frac{d}{dx} \simeq \frac{\delta}{\delta x}$$

Bunları kullanarak,

$$\left[\frac{d}{dx} f(x)\right]_{x_i} \cong \frac{\Delta}{\Delta x} f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

Üç nokta kullanarak $f'(x_0)$ hesabı:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0) \,,$$

$$x_0 < \xi_0 < x_0 + 2h$$

5 nokta kullanarak:

$$f_i' = f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}\right] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

veya

$$f_i' = \frac{1}{12h}\left[-25f_i + 48f_{i+1} - 36f_{i+2} + 16f_{i+3} - 3f_{i+4}\right] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)$$

Nümerik İntegrasyon:

$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ olarak hesaplanan değer $\int_a^b f(x)dx$ belirli integralinin yaklaşık değeridir.

Fonksiyonumuzu, $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ olan Lagrange interpolasyon fonksiyonuyla temsil edelim. Bu durumda,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) f^{(n+1)}(\xi) dx$$

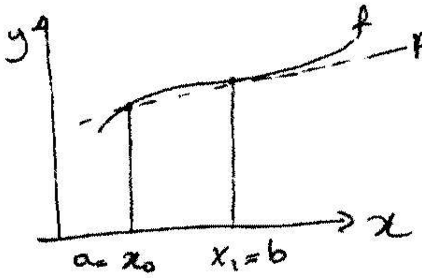
$a<\xi<b$ ve $a_i = \int_a^b L_i(x) dx$, $i=0,1,\dots,n$

1. ve 2. derece Lagrange polinomlarını kullanalım.

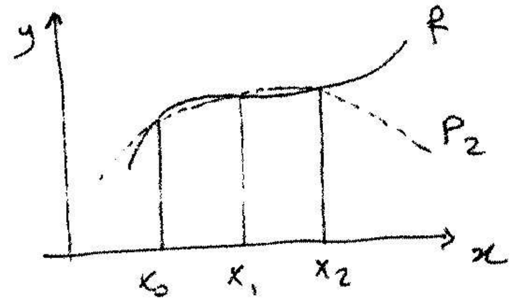
a) $P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1)$

sonuç olarak, $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$

elde edilir ve bu yamuk kuralı olarak bilinir.



b) 2 derece Lagrange Polinomu:



Simpson kuralı: $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

<u>Örnek:</u> $\int_0^2 f(x)\,dx$ integralini $f(x) = x^2,\ x^4,\ \frac{1}{(x+1)},\ \sqrt{1+x^2},\ \sin x,\ e^x$

için yamuk ve simpson kuralı ile bulunuz.

Simpson'ın $\frac{3}{8}$ kuralı:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

$n=3$ hali için.

$n=4$ ise:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left[7(f(x_0)) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi) \ ; \ x_0 < \xi < x_4$$

<u>Orta nokta kuralı:</u> (Newtonun ileri farklar formülü ile)

$n=0 \Rightarrow \quad \int_{x_{-1}}^{1} f(x)\,dx = 2h f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$

$n=1 \Rightarrow \quad \int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$

$n=2 \Rightarrow \quad \int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\left[2f_0 - f_1 + 2f_2\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$

$n=3 \Rightarrow \quad \int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}\left[11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3\right] + \frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\xi)$

Her bir integrali simpson kuralı ile alarak,

$$\int_a^b f(x,y_j)\,dx = \frac{h}{3}\Big[f(x_0,y_j) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_j) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_j) + f(x_{2n},y_j) \Big] - \frac{(b-a)}{180} h^4 \frac{\partial^4 f(\xi,y_j)}{\partial x^4}$$

$, a<\xi<b$ olmak üzere.

<u>Sonuç olarak:</u>

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \frac{hk}{9}\Big[f(x_0,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_0)$$

$$+ f(x_{2n},y_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_0,y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_{2j})$$

$$+ 8\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_{2j}) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n},y_{2j})$$

$$+ 4\sum_{j=1}^{m} f(x_0,y_{2j-1}) + 8\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_{2j-1})$$

$$+ 16\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_{2j-1}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2n},y_{2j-1})$$

$$+ f(x_0,y_{2m}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_{2m}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_{2m})$$

$$+ f(x_{2n},y_{2m}) \Big].$$ bulunur.

Hata terimi:

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\Big[\frac{\partial^4 f(\xi_0,y_0)}{\partial x^4} + 2\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^4 f(\xi_2,y_{2j})}{\partial x^4}$$

$$+ 4\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^4 f(\xi_{2j-1},y_{2j-1})}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_{2m},y_{2m})}{\partial x^4}\Big]$$

$$- \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\,dx.$$

şeklindedir.

Ödev: 1) Romberg integrasyon formülünü kullanarak $R_{3,3}$'ü hesaplayınız.

a) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$, b) $\int_0^2 x^3 dx$, c) $\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\, dx$, d) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

2) $R_{n,n-1}$ ile $R_{n,n}$ arasındaki fark 10^{-5}'den küçük olacak şekilde $\int_0^1 x^{1/3} dx$ integralini hesaplayınız.

3) Adaptif yöntemle $\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx$ integralini hesaplayınız.

4) $\int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx$ integralini $n=8$ alarak farklı metodlarla bulunuz.

İKİ BOYUTTA İNTEGRAL:

$\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini hesaplamak isteyelim. R bir dikdörtgensel bölge olsun. Yani $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$.

$h = \frac{b-a}{2n}$ ve $k = \frac{d-c}{2m}$ alarak integre edelim. Öncelikle $\int_c^d f(x,y)\,dy$ integralini Simpson kuralı ile bulalım.

x'i sabit alırken, $y_j = c + jk$ olacaktır. ($j=0,1,\ldots 2m$)

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = \frac{k}{3}\left[f(x,y_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x,y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x,y_{2j-1}) + f(x,y_{2m})\right]$$

$$- \frac{(d-c)\,k^4}{180} f_y^{(4)}(x,\mu) \; ; \; c<\mu<d$$

Bu ifadeyi $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$ ifadesinde yerine koyalım.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \frac{k}{3}\int_a^b f(x,y_0)\,dx + \frac{2k}{3}\sum_{j=1}^{m-1}\int_a^b f(x,y_{2j})\,dx$$

$$+ \frac{4k}{3}\sum_{j=1}^{m}\int_a^b f(x,y_{2j-1})\,dx + \frac{k}{3}\int_a^b f(x,y_{2m})\,dx$$

$$- \frac{(d-c)}{180} k^4 \int_a^b \frac{\partial^4 f(x,\mu)}{\partial y^4}\,dx .$$

Romberg Integrasyon Metodu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j)\right] - \left(\frac{b-a}{12}\right)h^2 f''$$

$$h = \frac{b-a}{m}, \quad x_j = a + jh$$

$$h_k = \frac{b-a}{m_k}, \quad m_n = 2^{n-1} \quad \text{with } m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 4 \ldots$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a)+f(b)+2\left(\sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} f(a+jh_k)\right)\right] - \frac{(b-a)}{12}h_k^2 f''$$

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}\left[f(a)+f(b)+2f(a+h_2)\right] \qquad h_1 = \frac{b-a}{4}$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{11} + h_1\, f(a+\tfrac{1}{2}h_1)\right]$$

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a+(i-\tfrac{1}{2})h_{k-1}\right)\right]$$

Örnek: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$, $n=6$ olarak bulunuz. $\boxed{R_g = 2}$

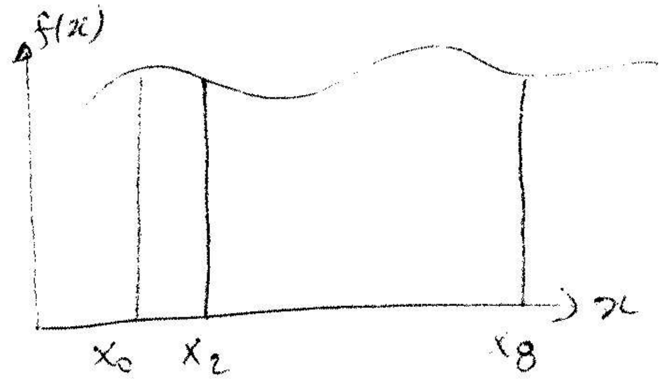
$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}\left[\sin 0 + \sin\pi\right] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + \pi\sin\frac{\pi}{2}\right] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 1.89611890$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[R_{3,1} + \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8}\right)\right] = 1.97423$$

$$R_{5,1} = 1.99357034, \quad R_{6,1} = 1.99839336$$



Eğer n tane alt bölge var ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$

Adaptif Metod:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

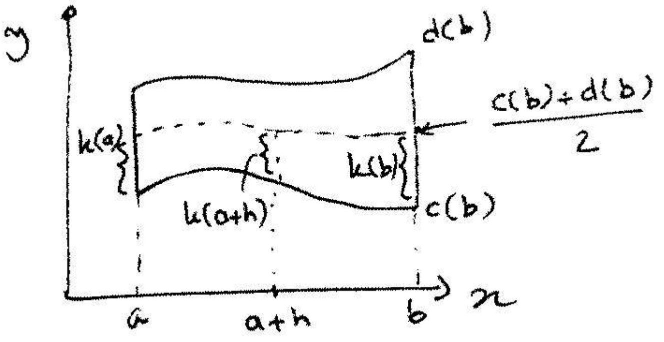
$$S(a,b) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{2} \quad \text{olmak üzere.}$$

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right]$$

$$S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = \frac{h}{6}\left[f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\xi)$$



$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx \approx \frac{h}{3}\Big\{ \frac{k(a)}{3}\Big[f(a,c(a)) + 4f(a,c(a)+k(a)) + f(a,d(a))\Big]$$

$$+ \frac{4k(a+h)}{3}\Big[f(a+h,c(a+h)) + 4f(a+h,c(a+h)+k(a+h)) + f(a+h,d(a+h))\Big]$$

$$+ \frac{k(b)}{3}\Big[f(b,c(b)) + 4f(b,c(b)+k(b)) + f(b,d(b))\Big]\Big\}.$$

formula dikdörtgen olmayan bölgelerin integralinde kullanılır.

Ödev: $\int_{0.1}^{0.5}\int_{x^3}^{x^2} e^{(y/x)}\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız. (GD=0.033305

BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ:

$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$, $a \le t \le b$, $y(a)=\alpha$ olmak üzere $y(t)$ değerlerinin verilen aralıkta bulunması problemidir. Dikkat edilirse $y(t)$ sürekli bir fonksiyon değildir ve grid noktalarındaki değerlerden oluşur.

$h = \frac{b-a}{N}$ adım aralığını seçerek $t_i = a + ih$, $i=0,1,\dots N$ noktalarında y_i değerlerini bulmaya çalışalım.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, problemimiz iyi koşullandırılmış bir problemdir.

a) problemin $y(t)$ gibi tek bir çözümü var ise,

b) $\frac{dz}{dt} = f(t,z) + \delta(t)$, $a \le t \le b$, $z(a) = \alpha + \varepsilon_0$

ε ve k pozitif sayılar olmak üzere, bu probleme tek bir çözüm bulunabiliyorsa ki,

$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon$, $\forall\ a \le t \le b$, ne zaman ki

$|\varepsilon_0| < \varepsilon$ ve $|\delta(t)| < \varepsilon$ olduğunda.

Bu probleme pertürbe edilmiş problem denir.

Taylor serisini kullanarak:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\, y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}\, y''(\xi_i)$$

$, t_i < \xi_i < t_{i+1}$ yazılabilir.

$h = t_{i+1} - t_i$ alarak,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, y'(t_i) + \frac{h^2}{2}\, y''(\xi_i) \quad \text{veya}$$

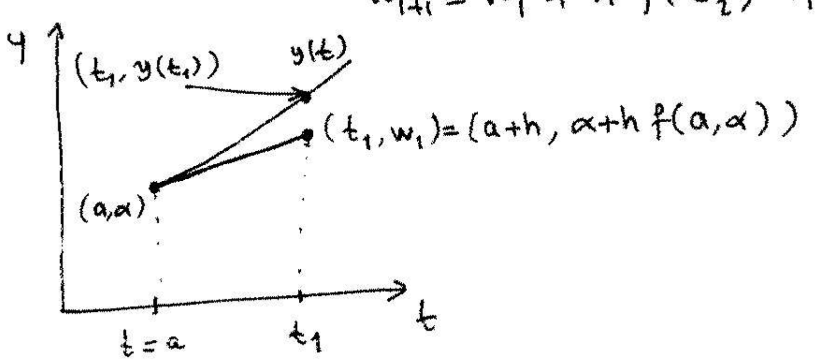
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}\, y''(\xi_i)$$

yazılabilir.

Euler Metodu: $w_i = y(t_i)$ alarak

$w_0 = \alpha$

$w_{i+1} = w_i + h\, f(t_i, w_i)$ şeklinde bulunur.



Örnek: $y' = -y + t + 1$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$ problemini

$N = 10$, yani $h = 0.1$, $t_i = 0.1\, i$ alarak çözünüz.

Çözüm: $w_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
w_i &= w_{i-1} + h\,(-w_{i-1} + t_{i-1} + 1) \\
&= w_{i-1} + 0.1\,(-w_{i-1} + 0.1\,(i-1) + 1) \\
&= 0.9\, w_{i-1} + 0.01\,(i-1) + 0.1 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, 10
\end{aligned}
$$

Gerçek çözüm: $y(t) = t + e^{-t}$

t_i	w_i	y_i	Hata $= \lvert w_i - y_i \rvert$
0.0	1.0	1.0	0
0.1	1.0	1.004837	0.004837
0.2	1.01	1.018731	0.008731
0.3	1.029	1.040818	0.011818
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.0	1.348678	1.367879	0.019201

Taylor Metodu:

$$
y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, y'(t_i) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\, y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\, y^{(n+1)}(\xi_i) \, , \quad t_i < \xi_i < t_{i+1}
$$

$$
y'(t) = f(t, y(t)) \, , \quad y''(t) = f'(t, y(t)) \, , \quad y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t))
$$

Böylece
$$
y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}\, f'(t_i, y(t_i)) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\, f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))
$$

Dolayısıyla:
$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
w_{i+1} &= w_i + h\, T^{(n)}(t_i, w_i) \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \\
T^{(n)}(t_i, w_i) &= f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}\, f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}\, f^{(n-1)}(t_i, w_i)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Euler metodu, Taylor metodunun özel bir hali olan $n=1$ halidir.

Örnek: $y' = -y + t + 1$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$

$$f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(-y+t+1) = -y'+1 = y-t-1+1 = y-t$$

$$f''(t, y(t)) = -y+t$$

$$f'''(t, y(t)) = y-t$$

$$T^{(2)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i)$$

$$= -w_i + t_i + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i) = \left(1-\frac{h}{2}\right)(t_i - w_i) + 1$$

$$T^{(4)}(t_i, w_i) = \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}\right)(t_i - w_i) + 1$$

2. mertebeden Taylor metodu:

$$w_0 = 1$$
$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1-\frac{h}{2}\right)(t_i - w_i) + 1\right], \quad i=0,1\ldots,N-1$$

4. mertebeden Taylor metodu:

$$w_0 = 1$$
$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}\right)(t_i - w_i) + 1\right], \quad i=0,1$$

Ödev: $y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)$, $1 \le t \le 2$, $y(1) = 1$, $h=0.1$ alarak Euler metodu, Taylor metodu, 2. ve 4. mertebeden alarak hesaplayınız ve karşılaştırınız.

Orta Nokta Metodu :

$$w_0 = \alpha,$$
$$w_{i+1} = w_i + h\, f\left(t_i + \frac{h}{2},\ w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$$
$$i = 0, 1, \ldots, N-1$$

Düzeltilmiş Euler Metodu:

$$w_0 = \alpha,$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + h f(t_i, w_i))\right]$$
$$i = 0, 1, \ldots, N-1$$

Heun Metodu:

$$w_0 = \alpha$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3 f\left(t_i + \frac{2h}{3},\ w_i + \frac{2h}{3} f(t_i, w_i\right.\right.$$
$$i = 0, 1, \ldots, N-1$$

Bu 3 formül 2. mertebeden Runge-Kutta formülleridir.

Örnek : $y' = -y + t^2 + 1$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$

($y_g = -2e^{-t} + t^2 - 2t + 3$, doğru çözüm)

t_i	GD	Orta NM	DEuler	Heun M.
0.0	1.000	1.00	1.00	1.00
0.1	1.0003252	1.00025	1.0005	1.0003333
0.2	1.0025385	1.0024263	1.0029025	1.002585
⋮				
0.9	1.1968607	1.1971047	1.1986647	1.1976247
1.0	1.2642411	1.2645798	1.2662416	1.2651337

Öyle a, b, c, d, m, n ve p katsayıları bulalım ki

$$k_1 = h f(t, y)$$
$$k_2 = h f(t+mh, y+mk_1)$$
$$k_3 = h f(t+nh, y+nk_2)$$
$$k_4 = h f(t+ph, y+pk_3) \quad \text{ve}$$
$$y(t+h) \cong y(t) + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

formülü Taylor formülünü h^4 'e kadar versin. (t, y) civarında seriye açıp, ilgili terimlerin katsayılarını eşitleyerek;

$a+b+c+d = 1$, $cmn + dnp = \frac{1}{6}$, $bm + cn + dp = \frac{1}{2}$, $cmn^2 + dnp^2 = \frac{1}{8}$

$bm^2 + cn^2 + dp^2 = \frac{1}{3}$, $cm^2n + dn^2p = \frac{1}{12}$, $bm^3 + cn^3 + dp^3 = \frac{1}{4}$, $dmnp = \frac{1}{24}$

$m = n = \frac{1}{2}$, $p = 1$, $a = d = \frac{1}{6}$, $b = c = \frac{1}{3}$ seçerek

$k_1 = h f(t, y)$, $k_2 = h f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$, $k_3 = h f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$

$k_4 = h f(t+h, y+k_3)$ ve

$$y(t+h) \cong y(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{bulunur.}$$

Bu formül 4. dereceden Runge-Kutta metodu olarak adlandırılır. Bu formülün hatası $O(h^4)$ mertebesindedir.

Örnek: $y' = -y+1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$

t	Euler $h=0.025$	DEuler $h=0.05$	4. mertebeden R-K	G.Değer
0.1	0.096312	0.095123	0.0951625	0.095162582
0.2	0.183348	0.181198	0.18126910	0.181269247
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.397312	0.393337	0.39346906	0.39346934

3. Mertebeden R-K Metodu:

$$k_1 = h f(t, y)$$

$$k_2 = h f\left(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f(t+h,\ y - k_1 + 2k_2)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

4. Mertebeden alternatif R-K Metod:

$$k_1 = hf(t, y)$$

$$k_2 = h f\left(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(t + \frac{h}{2},\ y + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)$$

$$k_4 = h f(t+h,\ y - k_2 + 2k_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4)$$

n. mertebeden bir R-K metodunun hatası $c\, y^{(n+1)} h^{(n+1)}$ şeklindedir.

Runge-Kutta-Fehlberg Metod: Yerel kesme hatasının her adımda ε gibi bir değerden az olmasını isteyelim.

Kesme hatası: $\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6$ ve

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5$$

olmak üzere, yerel hata,

$$R = \frac{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}{h}$$

Eğer $R < \varepsilon$ ise devam edilir.

Eğer $R > \varepsilon$ ise $h_{yeni} = q\, h_{eski}$, $q = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{1/4} \times 0.84$

olmak üzere yeni adım aralığı seçilir ve devam edilir.

Kontrol açısından $q_{min} = 0.1$ ve $q_{max} = 4$ seçilebilir.

Burada,

$$k_1 = h f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = h f\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4} k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32} k_1 + \frac{9}{32} k_2\right)$$

$$k_4 = h f\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3\right)$$

$$k_5 = h f\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4\right)$$

$$k_6 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27} k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5\right)$$

<u>Örnek:</u> $y' = -y + t + 1$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$

$\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ olmak üzere her adımdaki hata ε 'dan büyük olmamalı, maksimum adım $h_{max} = 0.1$ 'i ve minimum adım $h_{min} = 0.02$ 'yi geçmemeli. Başlangıçta $h = \varepsilon^{1/4}$ alarak, noktadan sonra 6 hane ile hesap yapalım.

i	t_i	h_i	w_i	R_i	$y(t_i)$	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$
1	0.08408963	0.08408963	1.003437	9.674×10^{-8}	1.003437	0
2	0.1840896	0.1	1.015948	2.398×10^{-7}	1.015950	2×10^{-6}
3	0.2840896	0.1	1.036785	1.42×10^{-7}	1.036787	2×10^{-6}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	0.9840898	0.1	1.357858	8.615×10^{-8}	1.357868	1×10^{-5}

<u>Ödev:</u> Runge-Kutta-Fehlberg metodunu kullanarak ve $\varepsilon = 10^{-4}$ alarak aşağıdaki problemleri çözünüz.

a) $y' = \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)$, $1 \le t \le 1.2$, $y(1) = 1$, $h_{max} = 0.05$

b) $y' = \sin t + e^{-t}$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 0$, $h_{max} = 0.25$

<u>ÇOK ADIMLI METODLAR</u>: w_{i+1} değerlerini bulmak için w_i değerini kullanmakta idik. Halbuki w_{i-1}, w_{i-2} gibi değerlerde elimizde mevcuttur. Bu değerleri de kullanarak w_{i+1} için daha iyi bir sonuç elde edebiliriz.

$y' = f(t,y)$, $a \le t \le b$, $y(a) = \alpha$ problemini çözelim.

$$w_{i+1} = a_{m-1} w_i + a_{m-2} w_{i-1} + \dots + a_0 w_{i+1-m} + h \big[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1})$$
$$+ b_{m-1} f(t_i, w_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m}) \big]$$

burada $m > 1$ olmak üzere t_{i+1}'deki değer olarak yazılabilir.

$i = m-1, m, \dots N-1$ için başlangıç değerleri;

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \dots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

verilir. Burada $h = \dfrac{b-a}{N}$ dir.

Eğer $b_m = 0 \Rightarrow$ metod, açık metod olarak bilinir.

Eğer $b_m \neq 0 \Rightarrow$ metod, kapalı " " "

4. Mertebeden Adams-Bashforth metodu:

$w_0 = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$, $w_2 = \alpha_2$ olmak üzere (ve $w_3 = \alpha_3$)

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} \cancel{\left[9 f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19 f(t_i, w_i) \right)}$$
$$= w_i + \frac{h}{24} \big[55 f(t_i, w_i) - 59 f(t_{i-1}, w_{i-1})$$
$$+ 37 f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9 f(t_{i-3}, w_{i-3}) \big]$$

$i = 3, 4, \dots N-1$ değerleri için.

4. mertebeden Adams-Moulton metodu:

$w_0 = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$, $w_2 = \alpha_2$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} \big[9 f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19 f(t_i, w_i)$$
$$- 5 f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2}) \big]$$

Başlangıç değerleri $w_0 = \alpha$'yı kullanarak Runge-Kutta veya benzeri metodlarla bulunur. Bu son metodda w_{i+1}'i tek başına bulabileceğimiz, her zaman mümkün olmayabilir.

2. adımlı Adams-Bashforth Metodu.

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[3 f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})\right]$$

$i = 1, 2, \dots N-1$, yerel kesme hatası $\theta(h^2) = \frac{5}{12} y'''(\mu_i) h^2$

3. adımlı A-B Metod:

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}\left[23 f(t_i, w_i) - 16 f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5 f(t_{i-2}, w_{i-2})\right]$$

$i = 2, 3, \dots N-1$, yerel kesme hatası: $\theta(h^3) = \frac{3}{8} y^{(4)}(\mu_i) h^3$

4. adımlı A-B. Metod:

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[55 f(t_i, w_i) - 59 f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37 f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9 f(t_{i-3}, w_{i-3})\right]$$

$i = 3, 4, \dots, N-1$, LTE, $\theta(h^4) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$

5. adımlı A.B. Metod:

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3 \text{ ve } w_4 = \alpha_4$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}\left[1901 f_i - 2774 f_{i-1} + 2616 f_{i-2} - 1274 f_{i-3} + 251 f_{i-4}\right]$$

$i = 4, 5, \dots N-1$ ve LTE; $\theta(h^5) = \frac{95}{288} y^{(6)}(\mu_i) h^5$

Kapalı metodlar, ek olarak $(t_{i+1}, f(t_{i+1}, y(t_{i+1})))$ noktasını da interpolasyon da kullanarak elde edilir

Adams-Moulton 2. adımlı Metod:

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}\left[5 f_{i+1} + 8 f_i + (-f_{i-1})\right], \quad i = 1, 2, \dots N-1$$

$$\text{LTE} = -\frac{1}{24} y^{(4)}(\mu_i) h^3$$

A-M 3 adımlı Metod:

$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[9 f_{i+1} + 19 f_i + (-5 f_{i-1}) + f_{i-2}\right]$$

$i = 2, 3, \ldots N-1$ ve $LTE = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$

A-M 4 adımlı Metod:

$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2$, ve $w_3 = \alpha_3$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}\left[251 f_{i+1} + 646 f_i - 264 f_{i-1} + 106 f_{i-2} - 19 f_{i-3}\right]$$

$i = 3, 4, \ldots N-1, \quad LTE = -\frac{3}{160} y^{(6)}(\mu_i) h^5$

Örnek: $y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

Gerçek çözüm: $y(t) = e^{-t} + t$

4 adımlı A.B ve 3 adımlı A-M metodu ile $h = 0.1$ alarak çözelim.

a) A-B: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right]$

$i = 3, 4, \ldots 9$

$t_i = 0.1 i$ ve $f_i = -w_i + t_i + 1$ alarak

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}\left[18.5 w_i + 5.9 w_{i-1} - 3.7 w_{i-2} + 0.9 w_{i-3} + 0.24 i + 2.52\right]$$

$i = 3, 4, \ldots 9$

b) A-M: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}\right], \quad i = 2, 3, \ldots 9$

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}\left[-0.9 w_{i+1} + 22.1 w_i + 0.5 w_{i-1} - 0.1 w_{i-2} + 0.24 i + 2.52\right]$$

w_{i+1}'i çözerek;

$$w_{i+1} = \frac{1}{24.9}\left[22.1 w_i + 0.5 w_{i-1} - 0.1 w_{i-2} + 0.24 i + 2.52\right], \quad i = 2, 3, \ldots$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ değerlerini gerçek [illegible]

t_i	A-B w_i	Hata	A-M w_i	Hata
0.3	başlangıç değeri	—	1.0408180061	2.146×10^{-7}
0.4	1.0703229200	2.874×10^{-6}	1.0703196614	3.846×10^{-7}
0.5	1.1065354755	4.816×10^{-6}	1.1065301384	5.213×10^{-7}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	1.3678899580	1.052×10^{-5}	1.3678785994	8.418×10^{-7}

Kapalı metod olan A-M metodunun üstünlüğü görülüyor.
Fakat, kapalı metod her zaman bu kadar kolay açık hale getirilemez. Örneğin;

$$y' = e^y, \quad 0 \le t \le 0.25, \quad y(0) = 1$$

problemi 3 adımlı A-M metodu ile

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[9e^{w_{i+1}} + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}}\right]$$

olurki, buradan w_{i+1}'i bulmak kolay değildir.
Bu sebeble kapalı metodlar, daha ziyade, kapalı metodla elde edilen sonucu iyileştirmek için kullanılır. Bu tip metodlara tahmin edip-düzeltme metodları denir. 4 adımlı R-K ile w_0, w_1, w_2 ve w_3 değerlerini bulup A-B algoritmasına vererek,

$$w_4^{(0)} = w_3 + \frac{h}{24}\left[55 f_3 - 59 f_2 + 37 f_1 - 9 f_0\right]$$

bulunur. Bu değeri 3 adımlı A-M metodunda kullanarak,

$$w_4^{(1)} = w_3 + \frac{h}{24}\left[9 f(t_4, w_4^{(0)}) + 19 f_3 - 5 f_2 + f_1\right]$$ bulunur.

Bu değer $y(t_4)$ için yaklaşık değer kabul edilir ve devam edilir.

$w_4^{(1)}$ için daha iyi bir sonuç elde etmek için A-M metodunda iterasyon yapılabilir. Yani

$$w_{i+1}^{(k+1)} = w_i + \frac{h}{24}\left[9 f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k)}) + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}\right]$$

Bu iterasyonda adım aralığı düşürülerek daha hassas çözüm bulunabilir.

<u>Örnek</u>: 4 adımlı Adams Tahmin-Düzeltme metodu ile

$$y' = -y + t + 1 \quad , \quad 0 \le t \le 1 \quad , \quad y(0) = 1$$

t_i	w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$
0.4	1.0703199182	1.278×10^{-7}
0.5	1.1065302684	3.923×10^{-7}
0.6	1.1488110326	6.035×10^{-7}
⋮	⋮	⋮
1.0	1.3678783660	1.075×10^{-6}

<u>Denklem sistemleri</u>:

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \ldots u_m)$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, \ldots u_m)$$

$a \le t \le b$ aralığında ve başlangıç şartları

$u_1(a)=\alpha_1$, $u_2(a)=\alpha_2 \ldots, u_m(a)=\alpha_m$ olarak verilsin.

$t_j = a+jh$;

$w_{ij} = u_i(t_j)$, $j=0,1,\ldots N$ ve $i=1,2,\ldots m$

[w_{ij}, j. noktadaki i. çözüm; (t_i)]

$$w_{1,0}=\alpha_1,$$
$$w_{2,0}=\alpha_2,$$
$$\vdots$$
$$w_{m,0}=\alpha_m$$

$w_{1,j}, w_{2,j} \ldots, w_{m,j}$ değerlerinin hesaplandığını kabul

ederek,

$$k_{1,i} = h f_i\left(t_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots w_{m,j}\right) \quad , i=1,2,\ldots m$$

$$k_{2,i} = h f_i\left(t_j+\frac{h}{2}, w_{1,j}+\frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j}+\frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots w_{m,j}+\frac{1}{2}k_{1,m}\right)$$

$i=1,2,\ldots m$

$$k_{3,i} = h f_i\left(t_j+\frac{h}{2}, w_{1,j}+\frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j}+\frac{1}{2}k_{2,2}\ldots, w_{m,j}+\frac{1}{2}k_{2,m}\right)$$

$i=1,2,\ldots m$

$$k_{4,i} = h f_i\left(t_j+h, w_{1,j}+k_{3,1}, w_{2,j}+k_{3,2}, \ldots, w_{m,j}+k_{3,m}\right)$$

$i=1,2,\ldots m$

olmak üzere,

$$w_{i,j+1} = w_{i,j}+\frac{1}{6}\left[k_{1,i}+2k_{2,i}+2k_{3,i}+k_{4,i}\right]$$

$i=1,2,\ldots m$

Dikkat edilirse, $k_{2,1}$'i hesaplamak için $k_{1,1}, k_{1,2}\ldots k_{1,m}$ hesaplanmalıdır.

(+2)

Örnek: $\dfrac{dI_1}{dt} = f_1(t, I_1, I_2) = -4I_1 + 3I_2 + 6\,,\quad I_1(0) = 0$

$$\frac{dI_2}{dt} = f_2(t, I_1, I_2) = -2.4\,I_1 + 1.6\,I_2 + 3.6\,,\quad I_2(0) = 0$$

$h = 0.1$ ve 4 adımlı R-K ile,

$$w_{1,0} = I_1(0) = 0\,,\quad w_{2,0} = I_2(0) = 0$$

$$k_{1,1} = h\,f_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1\ f_1(0,0,0) = 0.6$$

$$k_{1,2} = h\,f_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1\ f_2(0,0,0) = 0.36$$

$$k_{2,1} = h\,f_1(t_0 + \tfrac{1}{2}h,\ w_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1},\ w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2})$$

$$= 0.1\ f_1(0.05, 0.3, 0.18) = 0.534$$

$$k_{2,2} = h\,f_2[t_0 + \tfrac{1}{2}h,\ w_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1},\ w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{2,1})$$

$$= 0.1\ f_2(0.05, 0.3, 0.18) = 0.3168$$

devam ederek

$$k_{\substack{\cancel{1,3}\\ 3,1}} = (0.1)\ f_1(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.54072$$

$$k_{\substack{\cancel{2,3}\\ 3,2}} = (0.1)\ f_2(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.321264$$

$$k_{\substack{\cancel{1,4}\\ 4,1}} = 0.4800912 = 0.1\ f_1(0.1, 0.54072, 0.321264)$$

$$k_{\substack{\cancel{2,4}\\ 4,2}} = 0.1\ f_2(0.1, 0.54072, 0.321264) = 0.2816\,2944$$

$$I_1(0.1) \cong w_{1,1} = w_{1,0} + \tfrac{1}{6}\,[k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}]$$

$$= 0 + \tfrac{1}{6}\,[0.6 + 2(0.534) + 2(0.54072) + 0.480091$$

$$= 0.538255D$$

ve $I_2(0.1) \cong w_{2,1} = w_{2,0} + \dots = 0.3196259.$

Buradan hareketle, $y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$, $a \le t \le b$ ve $y(a)=\alpha_1$, $y'(a)=\alpha_2 \dots y^{(m-1)}(a)=\alpha_3$ sistemini,

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m \quad \text{ve}$$

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m);$$

ve

$$u_1(a) = y(a) = \alpha_1$$

$$u_2(a) = y'(a) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

ile çözülür.

<u>Örnek</u>: $y'' - 2y' + 2y = e^{2t}\sin t$, $\quad 0 \le t \le 1$

$y(0) = -0.4$, $\quad y'(0) = -0.6$

<u>Çözüm</u>: $u_1(t) = y(t)$, $\quad u_2(t) = y'(t)$

$$u_1'(t) = u_2(t)$$

$$u_2'(t) = e^{2t}\sin t - 2u_1(t) + 2u_2(t)$$

$$u_1(0) = -0.4 = w_{1,0}$$

$$u_2(0) = -0.6 = w_{2,0}$$

$h=0.1$, 4 adımlı R.K ile,

$$k_{1,1} = h f_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = h\, w_{2,0} = -0.06$$

$$k_{1,2} = h f_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = -0.04$$

$$k_{2,1} = h f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)$$

$$k_{2,1} = h\,[w_{2,0} + \tfrac{1}{2} k_{1,2}] = -0.062$$

$$k_{2,2} = h f_2\left(t_0 + \tfrac{h}{2},\ w_{1,0} + \tfrac{1}{2} k_{1,1},\ w_{2,0} + \tfrac{1}{2} k_{1,2}\right)$$

$$= -0.03247644757$$

$$k_{3,1} = h\,[w_{2,0} + \tfrac{1}{2} k_{2,2}] = -0.06162382238.$$

$$k_{3,2} = h\,[\,e^{2(t_0+0.05)} \sin(t_0 + 0.05) - 2(w_{1,0} + \tfrac{1}{2} k_{2,1})$$

$$+ 2(w_{2,0} + \tfrac{1}{2} k_{2,2})\,] = -0.03152409237$$

$$k_{4,1} = h\,[w_{2,0} + k_{3,2}] = -0.06315240924$$

$$k_{4,2} = h\,[\,e^{2(t_0+0.1)} \sin(t_0 + 0.1) - 2(w_{1,0} + k_{3,1})$$

$$+ 2(w_{2,0} + k_{3,2})\,]$$

$$= -0.02178637298.$$

$$w_{1,1} = w_{1,0} + \tfrac{1}{6}\,[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}]$$

$$= -0.4617338423,$$

$$w_{2,1} = w_{2,0} + \tfrac{1}{6}\,[\qquad\qquad] = -0.6316312421$$

Gerçek Çözüm: $u_1(t) = y(t) = 0.2\, e^{2t}\,[\sin t - 2\cos t]$

t_j	$w_{1,j}$	$w_{2,j}$	$y(t_j)$	$\lvert y(t_j) - w_{1,j} \rvert$
0.0	-0.4	-0.6	-0.4	0
0.1	-0.46173334	-0.63163124	-0.46173297	3.7×10^{-7}
0.2	-0.52555988	-0.64014895	-0.52555905	8.3×10^{-7}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	-0.35339886	0.25787663	-0.35339436	4.5×10^{-6}

Kararlılık :

Uyumluluk : Eğer $h \to 0$ iken yerel kesme hatası sıfıra gidiyorsa, metod uyumludur denir. Yani,

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \le i \le N} |\tau_i| = 0 .$$

Yakınsaklık : Eğer $h \to 0$ iken w_i nümerik çözüm y_i olan gerçek çözüme yaklaşıyorsa, metod yakınsaktır denir. Yani

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \le i \le N} |y_i - w_i| = 0 \quad , \quad y_i = y(t_i)$$

$y' = \frac{dy}{dt} = f(t,y)$, $a \le t \le b$, $y(a) = \alpha$ olsun.

Adams çok adımlı genel metodu:

$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \ldots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}$ olmak üzere

$$w_{i+1} = a_{m-1} w_i + a_{m-2} w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + h F(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots w_{i+1-m})$$

ile hesaplanıyorsa;

$$p(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} - a_{m-2} \lambda^{m-2} - \cdots - a_1 \lambda - a_0$$

polinomu karakteristik polinom olarak adlandırılır.

Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $p(\lambda) = 0$ denkleminin kökleri olsun:

Eğer $|\lambda_i| \le 1$ ise , $i = 1, 2, .., m$; metod kök şartını sağlıyor denir.

Eğer $\lambda = 1$, denklemin tek kökü ise , metod kuvvetli kararlı,

Eğer $\lambda = 1$ kökü birden fazla ise, zayıf kararlı,

Eğer 1'den büyük kökler var ise , kararsızdır , denir

Örnek : 4. mertebeden A-B metodu:

$$w_{i+1} = w_i + h\,F(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i-3})$$

$$F(\;) = \frac{1}{24}\left[55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right]$$

$m=4$, $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$$

kökler : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$

$\Rightarrow$ Metod kuvvetli kararlıdır.

Örnek : $w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1} + 4 f_i + f_{i-1}\right]$

4. mertebeden çok adımlı kapalı Simpson metodu.

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ ve kökler ; $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1$

Mutlak değeri 1 olan, birden fazla kök olduğu için zayıf kararlıdır.

Örnek : $y' = -6y + 6$, $0 \le t \le 1.5$ $y(0) = 2$

problemini $h=0.1$ alarak ~~aşağıdaki bir~~ metodla (Simpson ile

$$w_{i+1} = \frac{-0.8\,w_i + 0.8\,w_{i-1} + 1.2}{1.2} \quad , i = 1, 2, \dots 14$$

3 adımlı A-M metodu ile:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{24}\left[9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}\right]$$

veya
$$v_{i+1} = \frac{12.6\,v_i + 3\,v_{i-1} - 0.6\,v_{i-2} + 14.4}{29.4} \quad , i = 2, 3, \dots, 14$$

Gerçek çözüm: $y(t) = e^{-6t} + 1$

t_i	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$	u_i	$\lvert u_i - y_i \rvert$	y_i
					2.0
0.0	—	—	—	—	1.5488
0.1	—	—	—	—	1.30119
0.2	1.300792	4.015×10^{-4}	—	—	1.16529
0.3	1.165344	4.578×10^{-5}	1.164674	6.237×10^{-4}	1.09071
0.4	1.090298	4.189×10^{-4}	1.090107	6.094×10^{-4}	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	1.002507	2.384×10^{-3}	1.000116	6.676×10^{-6}	1.00012

A-M metodu kuvvetli kararlı olduğu için hata miktarı ilerledikçe azalır.

<u>Hassas Problemler</u>. $y' = -30y$, $0 \le t \le 1.5$, $y(0) = \frac{1}{3}$ problemининin gerçek çözümü $y = \frac{1}{3} e^{-30t}$ dir.

$h = 0.1$ alarak $t = 1.5$'daki y değerini bulunuz. Euler, R-K 4. mertebe ve T-D metodlarını kullanınız. $h = 0.3$, 0.1, 0.05 ve 0.01 alarak R-K ile çözünüz.

$y' = \lambda y$, $y(0) = \alpha$ problemini ele alalım. Bu problemi Euler metoduyla çözmeye çalışalım.

$$w_0 = \alpha$$
$$w_{i+1} = w_i + h(\lambda w_i) = (1 + \lambda h) w_i$$

veya $w_{i+1} = (1 + \lambda h)^{i+1} w_0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$

Gerçek çözüm: $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$, mutlak hata,

$$\lvert y(t_i) - w_i \rvert = \lvert e^{\lambda h i} - (1 + \lambda h)^i \rvert \cdot \lvert \alpha \rvert$$

$e^{\lambda h} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \ldots$ olduğuna göre,

$\lambda < 0$ olduğu zaman $e^{\lambda h i}$ değeri, sıfıra doğru iner.

Bunun olması için $|1+\lambda h| < 1$ olmalıdır.

Bu durumda; $1+\lambda h < 1$ veya $1+\lambda h > -1$

olmalıdır. Yani $\underline{\lambda < 0}$ ve $h > 0$ olmalı ve

$$1+\lambda h > -1 \Rightarrow \lambda h > -2 \Rightarrow \underline{h < \frac{2}{|\lambda|}} \text{ olmalı.}$$

$y' = -30y \quad , \quad 0 \le t \le 1.5 \quad y(0) = \frac{1}{3}$

$h = 0.1$ alındığında $t = 1.5$ için;

Gerçek Çözüm	9.54173×10^{-21}
Euler metodu :	-1.09225×10^{4}
R-K metodu :	3.95730×10^{1}
T-D metodu :	8.03840×10^{5}.

Kapalı Yamuk Kuralı:

$$w_0 = \alpha$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f_{i+1} + f_i \right]$$
$$0 \le i \le N-1$$

metodu kararlı bir metoddur.

h	Yamuk Metodu	R-K	Gerçek Değer
$0.3 \Rightarrow$	-3.47861×10^{-2}	7.10213×10^{10}	9.54173×10^{-21}
$0.1 \Rightarrow$	-1.09227×10^{-11}	3.95748×10^{1}	
$0.05 \Rightarrow$	1.47890×10^{-26}	4.25227×10^{-18}	
$0.01 \Rightarrow$	6.77706×10^{-21}	9.57905×10^{-21}	

Kapalı yamuk metodunda w_{i+1} 'i bulmak için,

$$F(y) = y - w_i - \frac{h}{2}\,[\,f_i + f(t_{i+1}, y)\,] = 0$$

denklemini çözersek,

$$w_{i+1}^{(k)} = w_i^{(k)} - \frac{F(w_i^{(k)})}{F'(w_i^{(k)})}$$

$$= w_{i+1}^{(k-1)} - \frac{w_{i+1}^{(k-1)} - w_i - \frac{h}{2}\,[\,f_i + f(t_{i+1}, w_{i+}^{(k-1}}{1 - \frac{h}{2}\; f_y(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k-1)}}$$

iteratif metodu $|w_{i+1}^{(k)} - w_{i+1}^{(k-1)}|$ değeri belli bir değerin altına inince durulur.

$A\phi_{xx}+B\phi_{xy}+C\phi_{yy}+D\phi_x+E\phi_y+F\phi=S$ şeklinde verilen bir kısmi diferansiyel denklem için,

$B^2-4AC=0$ ise Parabolik
$B^2-4AC<0$ ise Eliptik
$B^2-4AC>0$ ise Hiperboliktir.

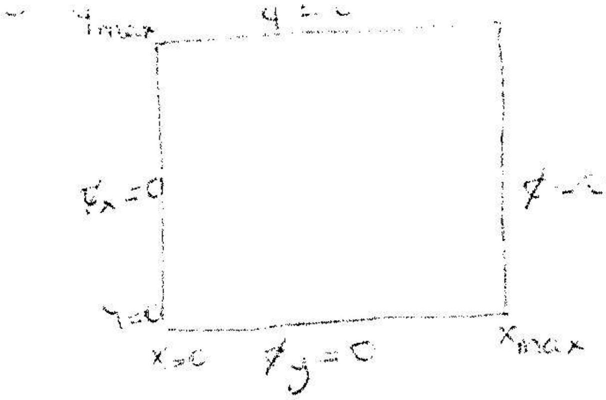
Eliptik denklemler 2 ve 3 boyuttaki daimi olaylarda ortaya çıkar. Katılarda ısı iletimi, küçük tanecik yayınımı ve bir diyafram'ın titreşmesi gibi örnekler verilebilir.

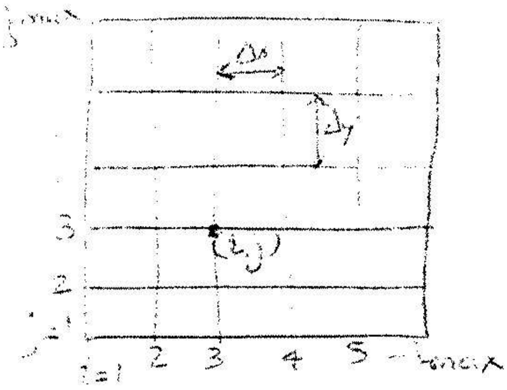
$-\nabla^2\phi(x,y)=S(x,y)$, Poisson Denklemi
$-\nabla^2\phi(x,y)=0$, Laplace denklemi

Kartezyen koordinatlarda, $-\nabla^2\phi(x,y)=S(x,y)$ denkleminin $0\leq x\leq x_{max}$, $0\leq y\leq y_{max}$ aralığında çözmek istediğimizde verilebilecek sınır şartları şöyle olabilir.

$\phi_x=0$, sol tarafta (Neumann Tipi Sınır Şartı)
$\phi=0$, sağ tarafta (Dirichlet Tipi Sınır Şartı)
$\phi_y=0$, alt tarafta
$\phi=0$, üst tarafta

Eğer $a\phi_x+b\phi=0$ ise Robin tipi sınır şartı





Merkezi farkları kullanarak;

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$ ve

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

Bunu laplace denkleminde yerine koyarsak

$$\frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

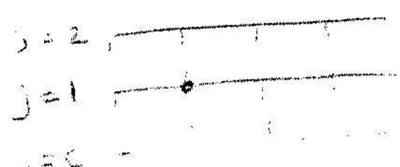
elde edilir.

Alt tarafta sınır şartı uygulayalım.

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{i,1} \simeq \frac{(\phi_y)_{i,1+1/2} - (\phi_y)_{i,1}}{\Delta y/2}$$

$$(\phi_y)_{i,1+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{i,2} - \phi_{i,1}}{\Delta y}$$

Bu durumda alt tarafta $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{2\phi_{i,2} - 2\phi_{i,1}}{\Delta y^2}$



Yani

$$(\phi_y)_{i,1} = \frac{\phi_{i,2} - \phi_{i,0}}{2\Delta y} = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{\phi_{i,0} = \phi_{i,2} \text{ alınabilir.}}$

3) Yerine koyarsak;

$$\frac{\phi_{i-1,1} - 2\phi_{i,1} + \phi_{i+1,1}}{\Delta y^2} + \frac{2\phi_{i,2} - 2\phi_{i,1}}{\Delta y^2} = 0$$

bulunur.

Benzer şekilde $i=1$ iken $\phi_x = 0$ denklemi

$$\frac{-2\phi_{1,j} + 2\phi_{2,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{1,j-1} - 2\phi_{1,j} + \phi_{1,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

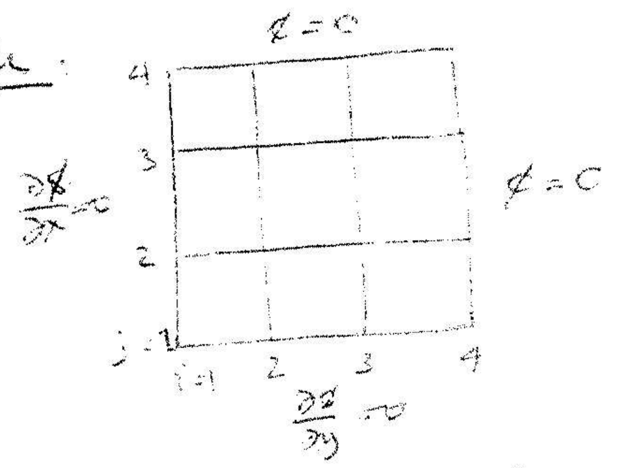
şeklini alır.

$i=j=1$ noktasında $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{1,1} \cong \frac{2\phi_{1,2} - 2\phi_{1,1}}{\Delta y^2}$ ve

$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{1,1} \cong \frac{2\phi_{2,1} - 2\phi_{1,1}}{\Delta x^2}$ ile hesaplanarak

$$\frac{-2\phi_{1,1} + 2\phi_{2,1}}{\Delta x^2} + \frac{2\phi_{1,2} - 2\phi_{1,1}}{\Delta y^2} = 0$$ yazılabilir.

Örnek:



eşit grid aralıkları
Laplace Denk. $\nabla^2 \phi = 0$

$$4\phi_{11} - 2\phi_{21} - 2\phi_{12} = 0$$
$$4\phi_{21} - \phi_{11} - \phi_{31} - 2\phi_{22} = 0$$
$$4\phi_{31} - \phi_{21} - 2\phi_{3,2} = 0$$
$$4\phi_{12} - 2\phi_{22} - \phi_{11} - \phi_{13} = 0$$
$$4\phi_{22} - \phi_{12} - \phi_{32} - \phi_{21} - \phi_{23} = 0$$

$$4\phi_{32} - \phi_{22} - \phi_{31} - \phi_{33} = 0$$
$$4\phi_{13} - 2\phi_{23} - \phi_{12} = 0$$
$$4\phi_{23} - \phi_{13} - \phi_{33} - \phi_{22} = 0$$
$$4\phi_{33} - \phi_{32} - \phi_{23} = 0$$

Bu denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \\ \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = 0$$

Yukarıdaki denklem sistemi Gauss yoketme veya LU ayrıştırması ile çözülebilir. Grid aralığı küçüldüğünde denklem sayısı artacaktır. Bu durumda bilgisayarın hafıza kullanımı artacaktır. Büyük denklem sistemleri iteratif metodla çözülebilir. Bu halde, sıfır olan değerleri hafızada tutmaya gerek kalmaz

5. Jacobi iteratif Metod:

5. (i,j) noktasında ϕ fonksiyonunun $(n+1)$. iterasyonundaki değeri,

$$\phi_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(\phi_{i-1,j}^{n} + \phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i,j-1}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n} \right)$$

şeklinde yazılabilir. (Laplace denklemi için ve eşit aralıklı kartezyen koordinatlarda.)

Başlangıç şartları verdikten sonra

$$\left| \phi_{i,j}^{(n)} - \phi_{i,j}^{(n-1)} \right| < \varepsilon$$ olduğunda iterasyon durdurulur. Değişimin relatif olarak küçük olduğunu test etmek için daha doğru bir test, $\left| 1 - \dfrac{\phi_{ij}^{(n)}}{\phi_{ij}^{(n-1)}} \right| < \varepsilon$ seçilmelidir.

Bu test çok sayıda "if" deyiminin kullanılmasını gerektirir. Bunu önlemek için 1. norm hata kullanılabilir.

$$\frac{\sum_{ij} \left| 1 - \phi_{ij}^{(n)} / \phi_{ij}^{(n-1)} \right|}{\text{Toplam Nokta sayısı}} < \varepsilon$$ alınabilir.

SOR Metodu: Bunun için (i,j) noktasında

$$\phi_{ij}^{(n)} = w \cdot \left[\frac{1}{4} \left(\phi_{i-1,j}^{(n)} + \phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \phi_{i,j-1}^{(n)} + \phi_{i,j+1}^{(n-1)} \right] + (1-w)\, \phi_{i,j}^{(n)}$$ kullanılır.

Burada w değeri $1<w<2$ arasında bir sayıdır. N küçükken, w değeri 1'e yakındır. N büyüdükçe w değeri 2 değerine yaklaşır.

Eğer $w=1$ ise, Gauss-Siedel Metoduna denilir.

Eğer w, $0<w<1$ aralığında seçilirse ~~under~~ rahatlatma metodu uygulanmış olur.

Bir başka metod, çift (i,j) noktaları ve tek (i,j) noktalarında uygulanan Kırmızı-Siyah (Red-Black) SOR Metodudur.

Bu metodda:

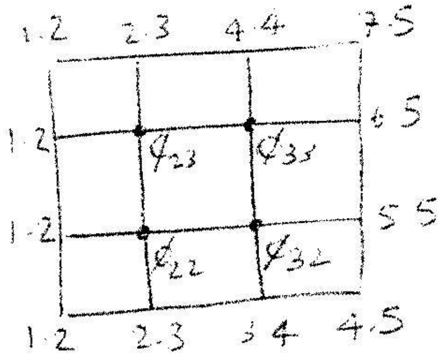
$$\phi_{ij}^{n} = w\left[\frac{1}{4}\left(\phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \phi_{i,j-1}^{(n-1)} + \phi_{i,j+1}^{(k-1)}\right)\right]$$

$$+ (1-w)\cdot \phi_{ij}^{(n-2)}$$

şeklindedir. Bu metod paralel bilgisayarlarda uygulamaya elverişlidir.

F

Örnek



$\nabla^2 \phi(x,y) = 0$

$\Delta x = \Delta y = 1$

Denklem sistemini bulup, $w = 1.3$ alarak SOR metodu ile çözünüz.

$$\phi_{23} = \frac{1}{4}\left(1.2 + 2.3 + \phi_{22} + \phi_{33}\right) = 0.875 + 0.25 \times \overbrace{(\phi_{22} + \phi_{33})}^{a}$$

$$\phi_{33} = \frac{1}{4}\left(4.4 + 6.5 + \phi_{23} + \phi_{32}\right) = 2.725 + 0.25 \times (\phi_{23} + \phi_{32})$$

$$\phi_{22} = \frac{1}{4}\left(1.2 + 2.3 + \phi_{23} + \phi_{32}\right) = 0.875 + 0.25 \times \underbrace{(\phi_{23} + \phi_{32})}_{b}$$

$$\phi_{32} = \frac{1}{4}\left(3.4 + 5.5 + \phi_{33} + \phi_{22}\right) = 1.975 + 0.25 \times (\phi_{22} + \phi_{33})$$

i	ϕ_{22}	ϕ_{23}	ϕ_{32}	ϕ_{33}	a	b
1'	0.875	0.875	1.975	2.725	4.68	3.705
1	1.1375	1.1375	2.5675	3.5425		
2'	1.88125	2.045	3.145	3.65125 ~~2.2668~~	~~3.8121~~	~~4.153~~
~~2~~	~~1.5453~~	~~1.2622~~	~~2.2912~~	~~3.7633~~ ~~1.9133~~		
1/3	~~1.9133~~					
2						
	2.425	2.55	3.65	4.275		

```
!
! Program Laplace Denklemini Çözer
!
        program laplace
        dimension f(4,4),g(4,4),h(4,4)

        f=0
        h=f
        w=1.3
        do i = 1,12
        g(2,3)=0.875+0.25*(f(2,2)+f(3,3))
        g(3,3)=2.725+0.25*(g(2,3)+f(3,2))
        g(2,2)=0.875+0.25*(g(2,3)+f(3,2))
        g(3,2)=1.975+0.25*(g(2,2)+g(3,3))

        print '(4F10.4,I4)',g(2,2),g(2,3),g(3,2),g(3,3),I
        g(2,3)=w*g(2,3)+(1-w)*h(2,3)
        g(3,3)=w*g(3,3)+(1-w)*h(3,3)
        g(2,2)=w*g(2,2)+(1-w)*h(2,2)
        g(3,2)=w*g(3,2)+(1-w)*h(3,2)

        print '(4F10.4,I4)',g(2,2),g(2,3),g(3,2),g(3,3),I
        h=g
        f=g
        end do
        end
```

1.0938	.8750	2.9844	2.9437	1
1.4219	1.1375	3.8797	3.8269	1
2.3917	2.1872	3.6334	4.2417	2
2.6827	2.5021	3.5595	4.3662	2
2.4242	2.6372	3.6496	4.2742	3
2.3466	2.6777	3.6766	4.2466	3
2.4250	2.5233	3.6500	4.2750	4
2.4485	2.4770	3.6420	4.2835	4
2.4250	2.5580	3.6500	4.2750	5
2.4180	2.5823	3.6524	4.2724	5
2.4250	2.5476	3.6500	4.2750	6
2.4271	2.5372	3.6493	4.2758	6
2.4250	2.5507	3.6500	4.2750	7
2.4244	2.5548	3.6502	4.2748	7
2.4250	2.5498	3.6500	4.2750	8
2.4252	2.5483	3.6499	4.2751	8
2.4250	2.5501	3.6500	4.2750	9
2.4249	2.5506	3.6500	4.2750	9
2.4250	2.5500	3.6500	4.2750	10
2.4250	2.5498	3.6500	4.2750	10
2.4250	2.5500	3.6500	4.2750	11
2.4250	2.5501	3.6500	4.2750	11
2.4250	2.5500	3.6500	4.2750	12
2.4250	2.5500	3.6500	4.2750	12

Parabolik Kısmi D.D

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad , \quad 0<x<l, \quad t>0$$

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(l,t)=0, \quad t>0$$

$$u(x,0)=f(x), \qquad 0\le x\le l$$

(x_i, t_j) noktalarında çözümü isteyelim

$$x_i = ih \quad \text{ve} \quad t_j = jk \quad , \quad i=0,1,\ldots m \quad \text{ve} \quad j=0,1,\ldots$$

$m = \frac{l}{h}$ olmak üzere.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j+k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_i, \mu_j)$$

$\mu \in (t_j, t_{j+1})$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i+h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2}$$

$$- \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad , \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ denkleminde yerine koyarak,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

kesme hatası.

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

Dolayısıyla,

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{i,j} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} \left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} \right)$$

$i=1,2,\ldots,(m-1)$ ve $j=1,2,\ldots$ için

$u(x,0) = f(x)$ olduğundan, $0 \le x \le l$

$w_{i,0} = f(x_i)$, $i=0,1,\ldots,m$ olacaktır.

$u(0,t)=0$ ve $u(l,t)=0$ şartları uygulanırsa,

$w_{0,1} = w_{m,1} = 0$ olacaktır. Zamanda bu şekilde

devam ederek, A, $(m-1)\times(m-1)$ matris olmak

üzere;

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix}$$

elde edilir ve $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$ dir.

Yaklaşık çözüm $w^{j} = A\, w^{(j-1)}$, $j=1,2,\ldots$

ile bulunur. Buna ileri farklar metodu denir.

Burada $w^{(0)} = \left(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{m-1}) \right)^T$ ve

$w^{(j)} = \left(w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m-1,j} \right)^T$, $j=1,2,\ldots$

olarak verilir

Örnek: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$, $0<x<1$, $0<t$

Sınır şartları: $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $0<t$

Başlangıç şartları: $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $0 \le x \le 1$

Gösterilebilirki problemin gerçek çözümü

$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ ile verilir.

$t=0.5$ anındaki değeri, $h=0.1$ ve $k=0.0005$ ve $\lambda=0.05$

alarak hesaplarsak: (ileri farklar metodu ile)

x_i	$u(x_i, 0.5)$	$w_{i,1000}$	$\lvert u(x_i,0.5) - w_{i,1000} \rvert$
0.0	0	0	—
0.1	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}
0.2	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}
0.3	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}
⋮			
0.9	0.00222241	0.00228652	6.511×10^{-5}
1.0	0	0	—

Eğer $h=0.1$, $k=0.01$ ve $\lambda=1$ alırsak,

$x_i = 0.1$ için $w_{i,50} = 8.19876 \times 10^{7}$ bulunur ki hatalı bir sonuçtur. Yani bu parametrelerin seçimi kararlılık analizine uygun olmalıdır.

Eğer $w^{(0)}$ da yapılan hata $e^{(0)}$ ise, $w^{(1)}$ için

$w^{(1)} = A(w^{(0)} + e^{(0)}) = A w^{(0)} + A e^{(0)}$

Böylece devam edildiğinde $w^{(n)}$ deki hata $A^n e^{(0)}$

olacaktır. Metodun kararlı olması için $\|A^n e^{(0)}\| \leq \|e^{(0)}\|$ bütün n için. Böylece hatalar büyümez. Yani $\|A^n\| \leq 1$ olmalıdır. Bunun için maksimum özdeğerin 1'den küçük olması gerekir. Yani $\rho(A^n) = (\rho(A))^n \leq 1$ veya

$\rho(A) \leq 1$ olmalıdır. A matrisinin özdeğerleri,

$$\mu_i = 1 - 4\lambda \left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2 , \quad i = 1, 2, \ldots, (m-1)$$

veya $$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq m-1} \left| 1 - 4\lambda \left(\sin \frac{i\pi}{2m}\right)^2 \right| \leq 1$$ veya

$$0 \leq \lambda \left(\sin\left(\frac{i\pi}{2m}\right)\right)^2 \leq \frac{1}{2} , \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

bu eşitsizlik $h \to 0$ veya $m \to \infty$ için geçerli olmalıdır.

$$\lim_{m \to \infty} \left[\sin \left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)\right]^2 = 1$$ olduğundan

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$$ olduğunda kararlılık olur.

Yani $$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$ olmalıdır.