

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Ders Notu:
Hayri ACAR
İstanbul Teknik Üniveristesi

8. Sürtünme

Tel: 285 31 46 / 116

E-mail: acarh@itu.edu.tr

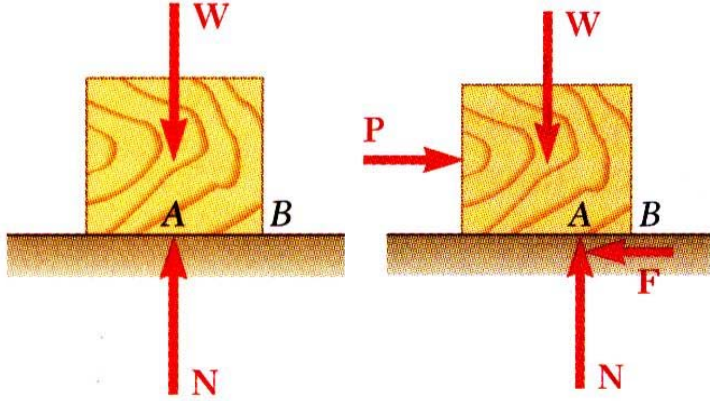
Web: <http://atlas.cc.itu.edu.tr/~acarh>

- Giriş
- Kuru Sürtünme Kanunları: Sürtünme Katsayıları
- Sürtünme Açıları
- Kuru Sürtünme Problemleri
- Kamalar
- Kare Dişli Vidalar
- Mil Yatakları – Dingil Sürtünmesi
- Basınç Yatakları ve Disk Sürüklemesi
- Tekerlek Sürtünmesi: Yuvarlanma Direnci
- Kayış Sürtünmesi

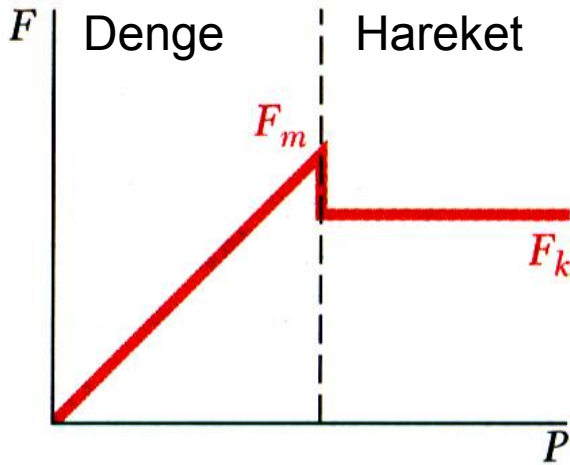
Giriş

- Daha önceki bölümlerde temas yüzeylerinde sürtünme olmadığını kabul etmiştik. Yüzeyler diğerlerine göre serbestçe hareket edebilmekteydi
- Gerçekte tam sürtünmesiz yüzey yoktur. Birbiriyle temas halindeki yüzeylerde, hareket halinde, yüzeye teğet kuvvetler oluşur ve bu kuvvete sürtünme kuvveti denir.
- Bunun yanında, sürtünme kuvvetinin şiddeti sınırlıdır ve yeterince kuvvet uygulanırsa harekete engel olamaz.
- İki tür sürtünme vardır: kuru veya *Coulomb sürtünmesi* ve *akışkan sürtünmesi*. Akışkan sürtünmesi yağlama mekanizmalarında kullanılır. Bu bölümde sadece kuru sürtünme ile ilgileneceğiz.

Kuru Sürtünme Yasaları. Sürtünme Katsayıları.



- W ağırlığındaki blok yatay yüzey üzerine yerleştirildiğinde, blok üzerine etkiyen kuvvetler: ağırlığı ve yüzeydeki tepki kuvvetidir (N).
- Bloğa küçük bir yatay P kuvveti uygulansın. Bloğun hareket etmesini engelleyecek sürtünme kuvveti (F) harekete ters yönde ve temas yüzeyine teğet olacaktır. Bu şekilde blok sabit kalacaktır. Burada F statik-sürtünme katsayısıdır.
- P kuvveti arttırılırsa, statik sürtünme kuvveti de maksimum değerine kadar artacaktır (F_m)



$$F_m = \mu_s N$$

- P kuvveti daha da arttırılırsa blok hareket etmeye başlayacaktır. Bu durumda F kuvveti azalır ve kinetik-sürtünme kuvveti (F_k) adını alır.

$$F_k = \mu_k N$$

Kuru yüzeyler için statik sürtünme katsayısının yaklaşık değerleri.

Metal ile metal	0.15 – 0.60
Ahşap ile metal	0.20 – 0.60
Taş ile metal	0.30 – 0.70
Deri ile metal	0.30 – 0.60
Ahşap ile ahşap	0.25 – 0.50
Deri ile ahşap	0.25 – 0.50
Taş ile taş	0.40 – 0.70
Toprak ile toprak	0.20 – 1.00
Beton ile kauçuk	0.60 – 0.90

- Maksimum statik-sürtünme kuvveti:

$$F_m = \mu_s N$$

- Kinetik-sürtünme kuvveti:

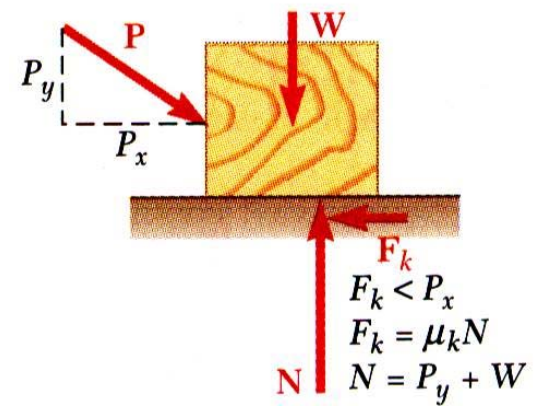
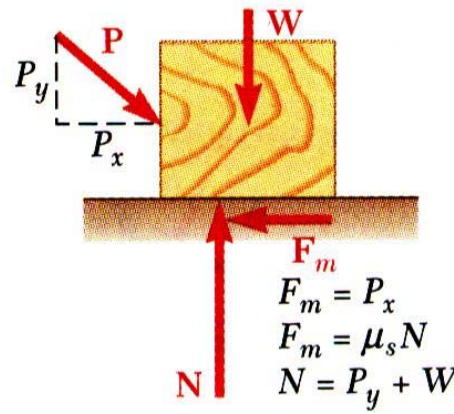
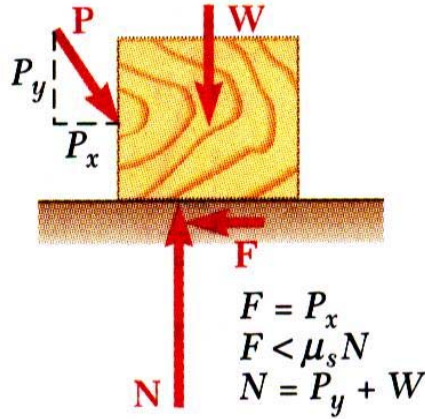
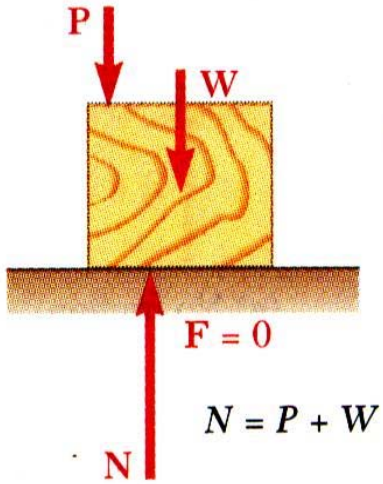
$$F_k = \mu_k N$$

$$\mu_k \cong 0.75 \mu_s$$

- Maksimum statik-sürtünme kuvveti ve kinetik-sürtünme kuvveti:

- normal kuvvet ile orantılıdır
- temas yüzeylerinin tipine bağlıdır
- temas alanından bağımsızdır

- Rijit cisim yatay bir yüzeyle temas halindeyken dört durum söz konusudur:



- Sürtünme yok:
- Hareket yok:
- Hareket başlangıcı:
- Hareket: $\rightarrow$

$$(P_x = 0)$$

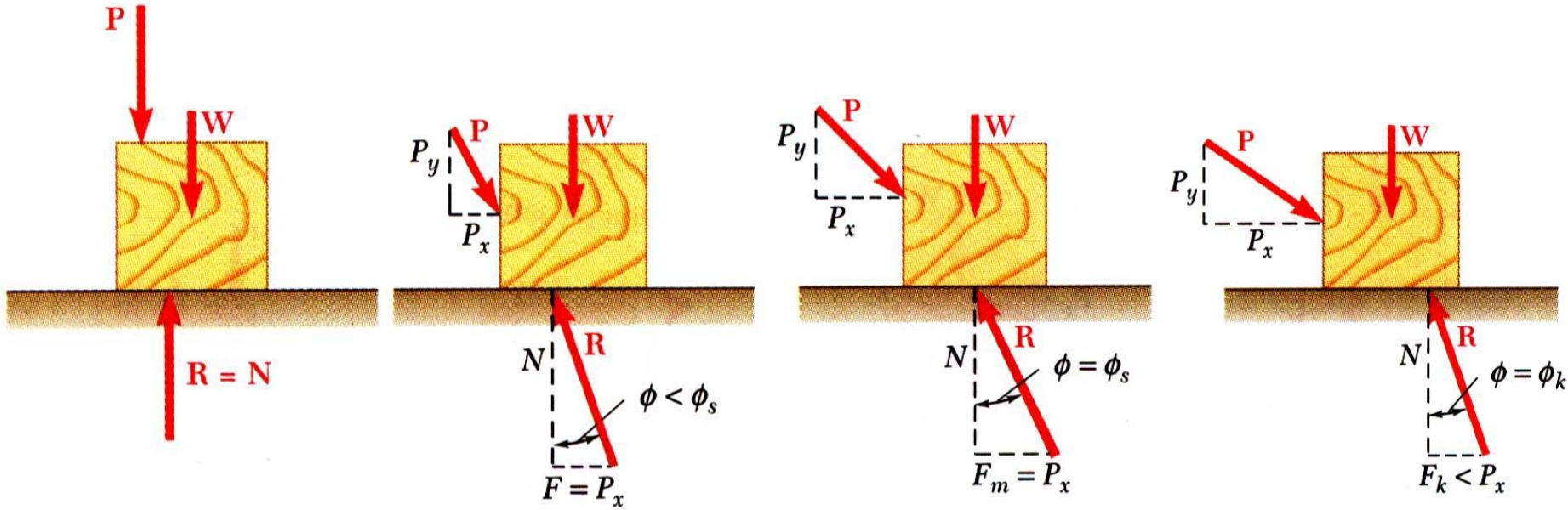
$$(P_x < F_m)$$

$$(P_x = F_m)$$

$$(P_x > F_m)$$

Sürtünme Açıları

- Bazı durumlarda N normal kuvveti ile F sürtünme kuvveti yerine bileşkesi R kuvveti kullanılır:



• Sürtünme yok:

• Hareket yok:

• Hareket başlangıcı:

• Hareket: →

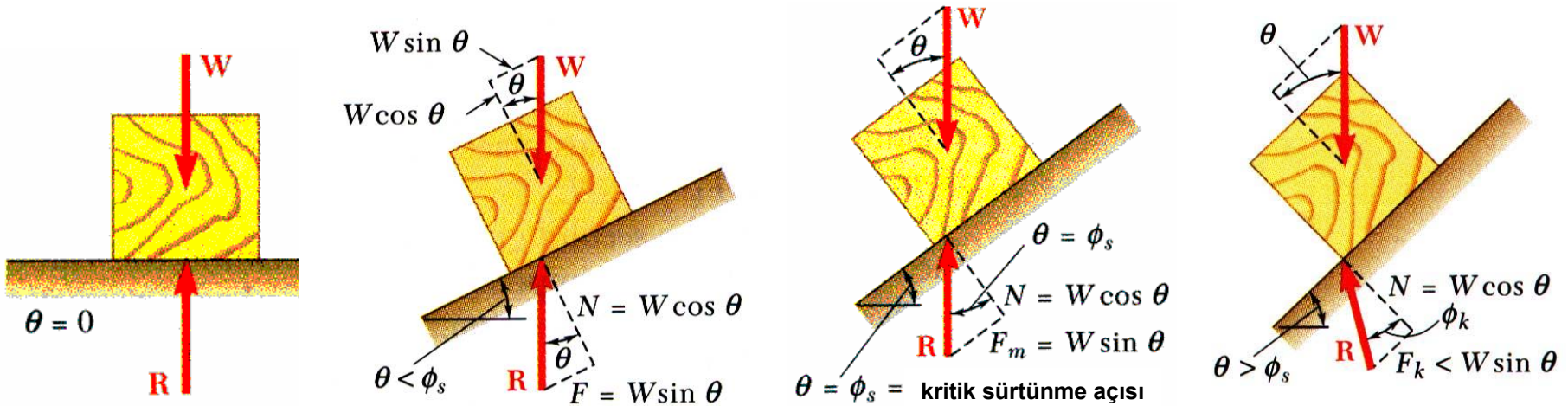
$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s$$

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \phi_k = \mu_k$$

- W ağırlığındaki bir bloğun θ açısına sahip bir yüzeye yerleştirildiği durumda, sürtünme açıları ile çözüm yapmak daha kolaydır.



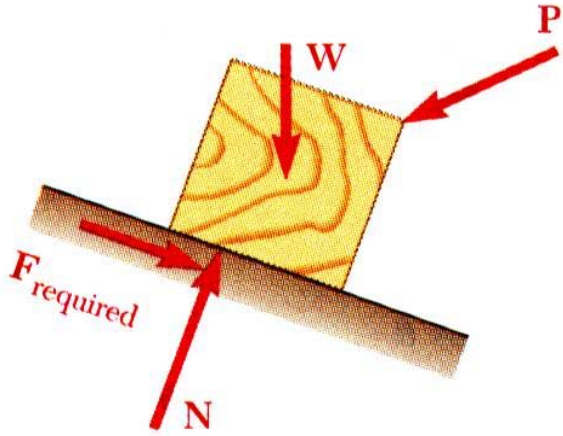
• Sürtünme yok:

• Hareket yok:

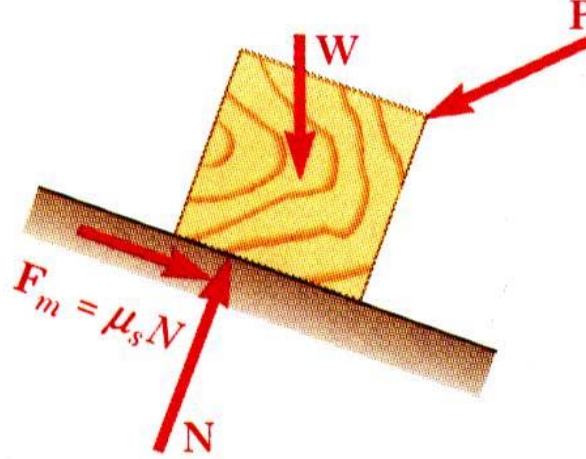
• Hareket başlangıcı:

• Hareket: ↘

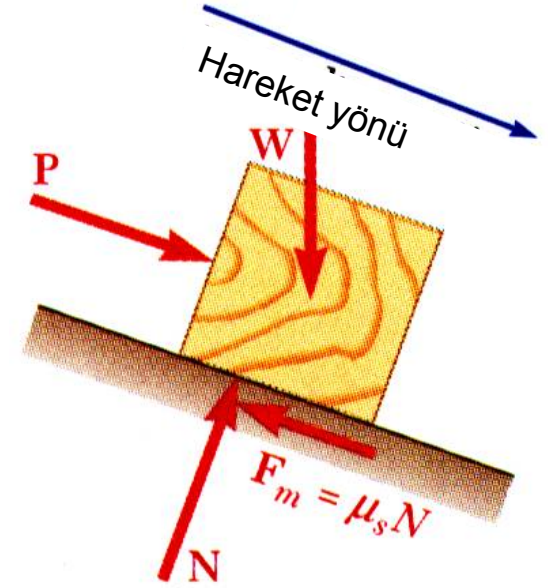
Kuru Sürtünme Problemleri



- Bütün kuvvetler biliniyor.
- Statik sürtünme katsayısı biliniyor.
- Bloğun hareket edip etmeyeceği araştırılır.

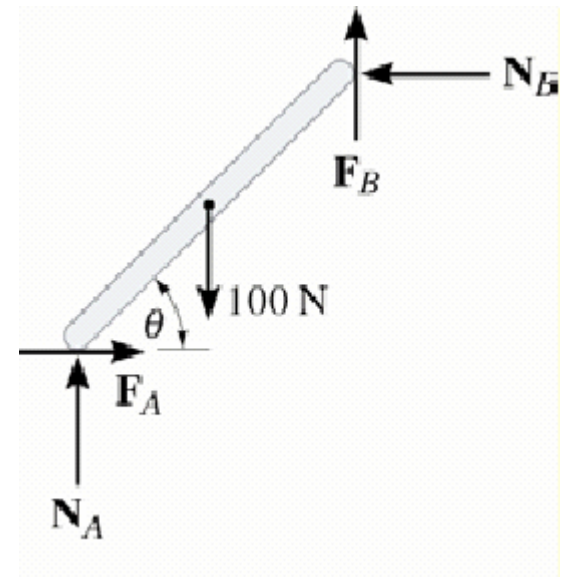
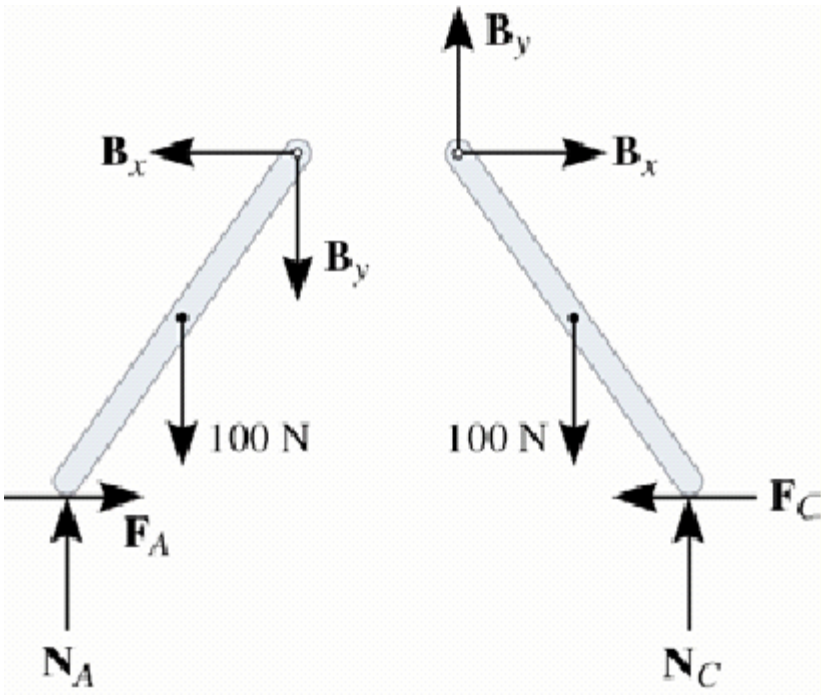
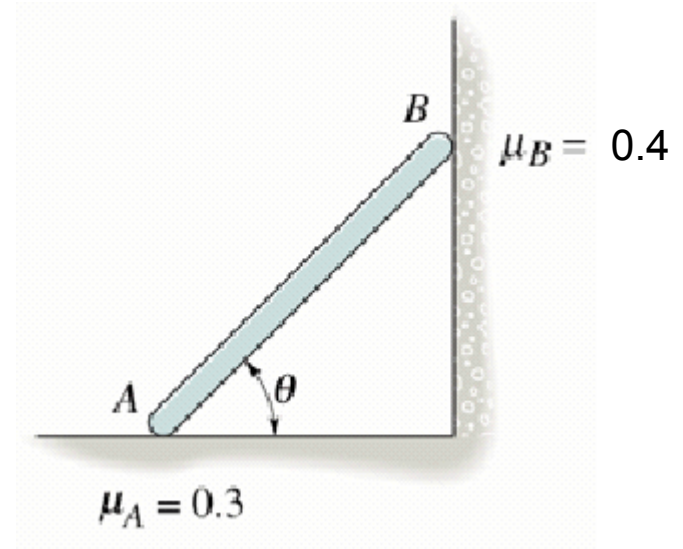
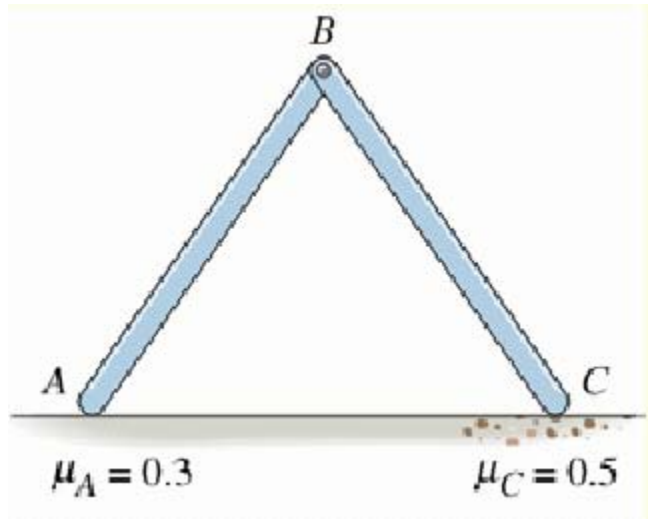


- Bütün kuvvetler biliniyor.
- Hareket sınırda.
- Statik sürtünme katsayısı araştırılır.

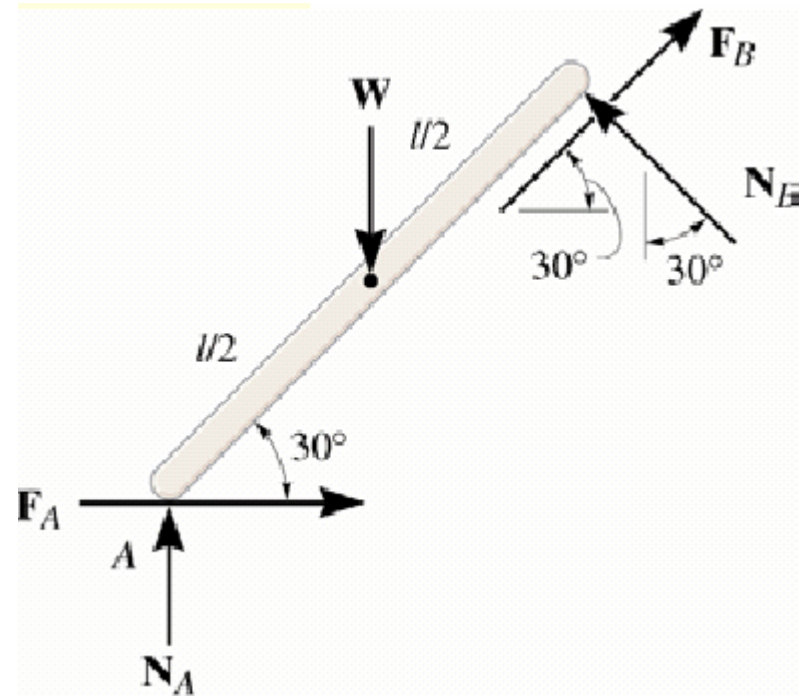
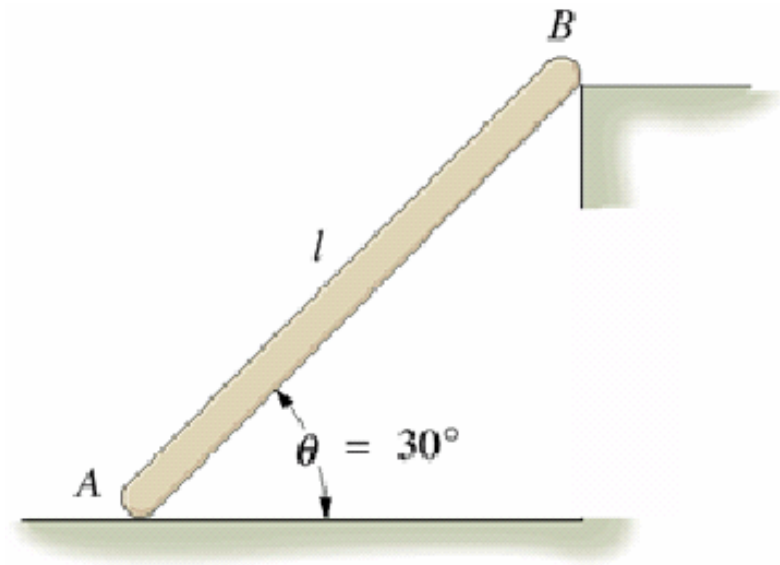


- Statik sürtünme katsayısı biliniyor.
- Hareket yönü biliniyor.
- Uygulanan kuvvetin şiddeti veya yönü araştırılır

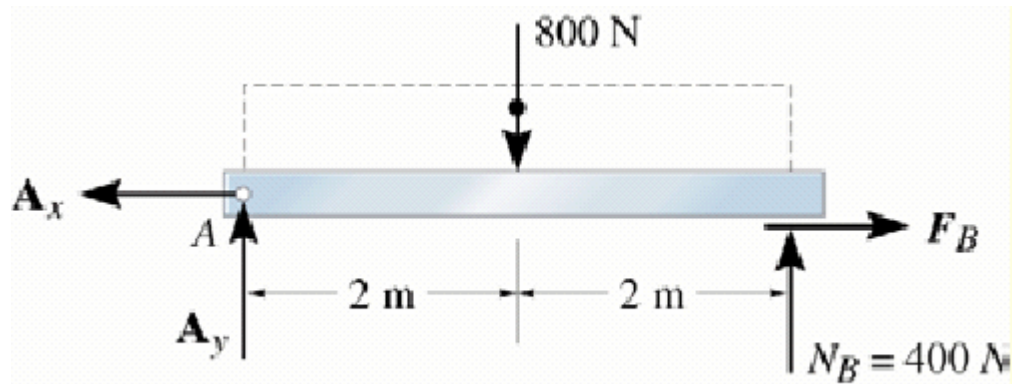
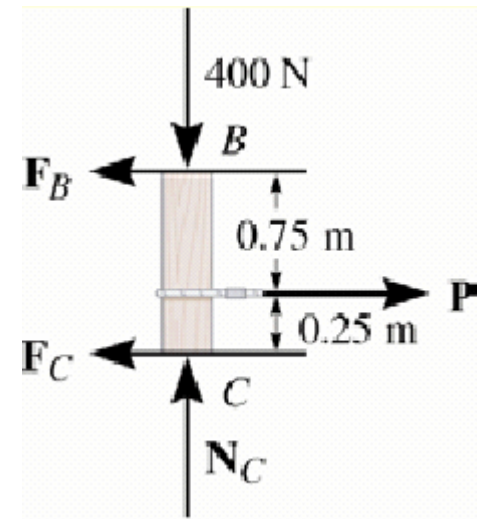
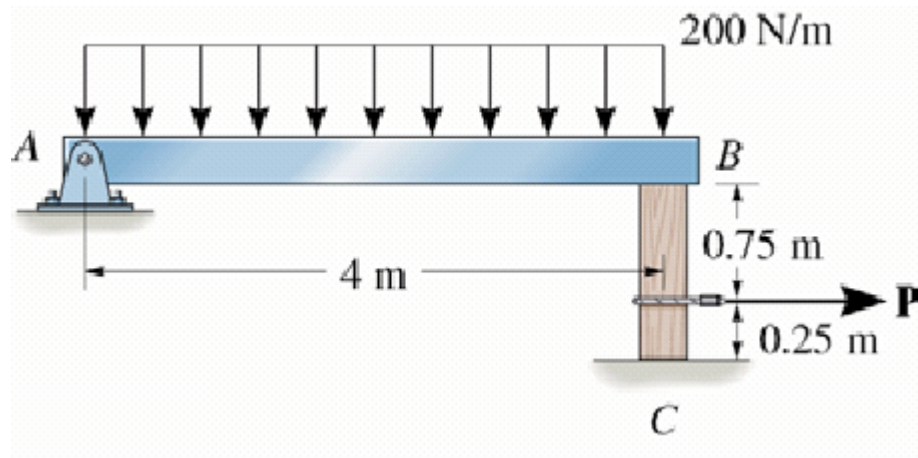
SÜRTÜNME



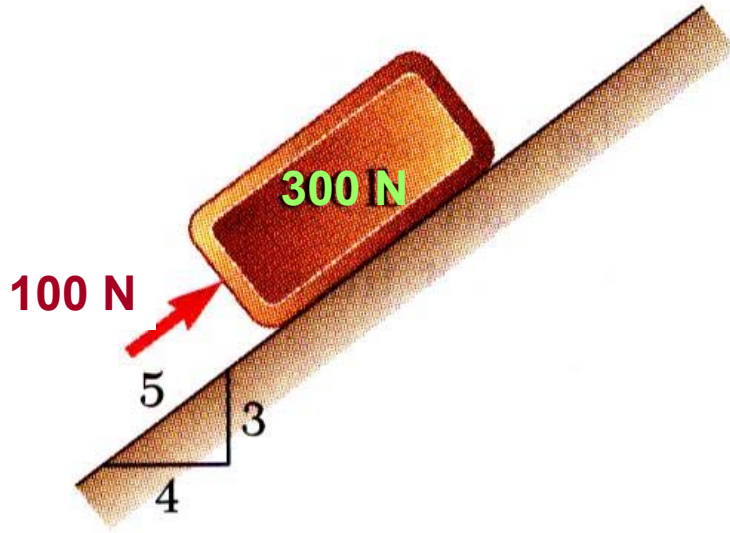
SÜRTÜNME



SÜRTÜNME



Örnek 8.1



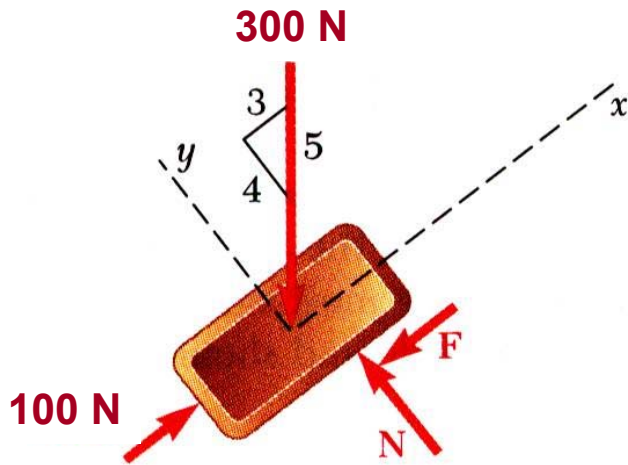
300 N ağırlığındaki blok açılı yüzeye yerleştirilmiştir ve 100 N'luk bir kuvvet uygulanmaktadır. Blok ile yüzey arasındaki sürtünme katsayıları:

$$\mu_s = 0.25 \text{ ve } \mu_k = 0.20.$$

Bloğun dengede olup olmadığını ve sürtünme kuvvetini bulunuz.

ÇÖZÜM:

- Sürtünme kuvveti hesaplanır ve dengeyi sağlayacak olan normal kuvvet bulunur.
- Maksimum sürtünme kuvveti ve denge için gerekli sürtünme kuvveti hesaplanır. Eğer büyükse blok hareket eder.
- Maksimum sürtünme kuvveti denge için gerekli sürtünme kuvvetinden küçükse blok dengede olacaktır. Kinetik-sürtünme kuvveti hesaplanır.



ÇÖZÜM:

- Sürtünme kuvveti hesaplanır ve dengeyi sağlayacak olan normal kuvvet bulunur.

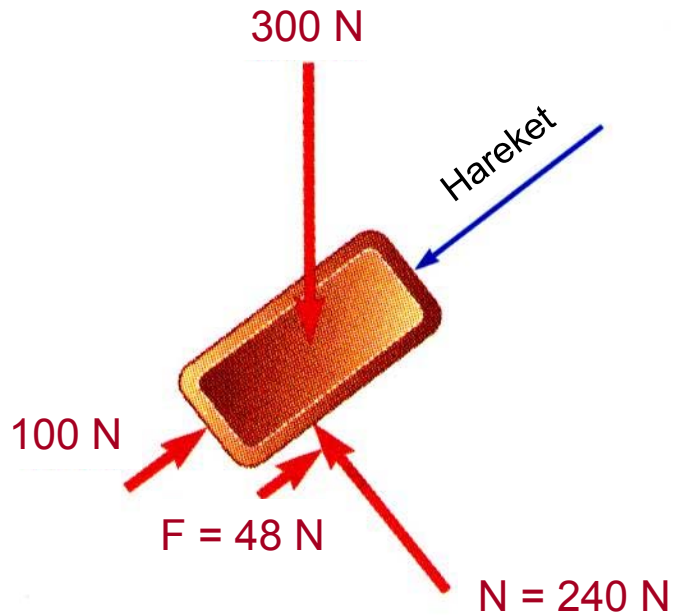
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: \quad 100 \text{ N} - \frac{3}{5}(300 \text{ N}) - F &= 0 \\ \Rightarrow F &= -80 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0: \quad N - \frac{4}{5}(300 \text{ N}) &= 0 \\ \Rightarrow N &= 240 \text{ N}\end{aligned}$$

- Maksimum sürtünme kuvveti ve denge için gerekli sürtünme kuvveti hesaplanır. Eğer büyükse blok hareket eder.

$$F_m = \mu_s N \Rightarrow F_m = 0.25(240 \text{ N}) = 48 \text{ N}$$

Blok aşağıya doğru kayacaktır.

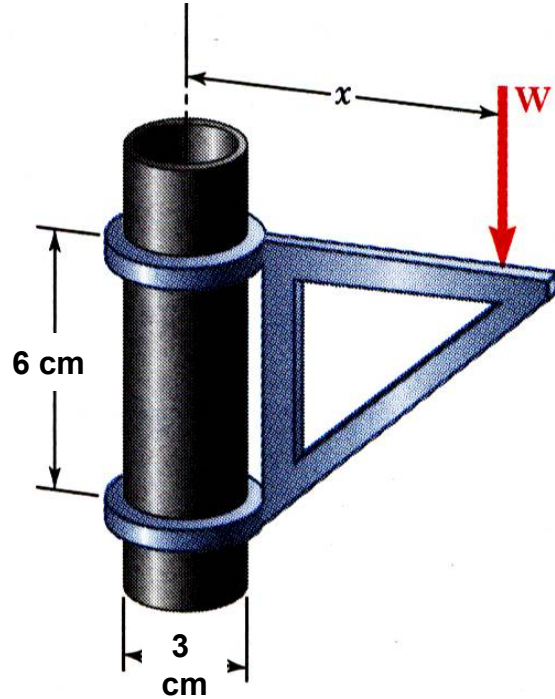


- Maksimum sürtünme kuvveti denge için gerekli sürtünme kuvvetinden küçükse blok dengede olacaktır. Kinetik-sürtünme kuvveti hesaplanır.

$$\begin{aligned} F_{actual} &= F_k = \mu_k N \\ &= 0.20(240 \text{ N}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{actual} = 48 \text{ N}$$

Örnek 8.3



ÇÖZÜM:

- W yüklemesinin desteklenebilmesi için gerekli olan minimum x mesafesi, dirseğin hareket etmek üzere olduğu durumda gerçekleşir. Sürtünme kuvvetleri maksimum değere sahip olacaktır.
- Statik denge denklemleri ile x mesafesi hesaplanır.

Hareket ettirilebilen dirsek şeklindeki gibi 3 cm çaplı bir boruya geçirilmiştir. Boru ile dirsek arasındaki sürtünme katsayısı 0.25 ise, yüklemenin desteklenebilmesi için gerekli minimum x mesafesini hesaplayınız. Dirseğin ağırlığı ihmal edilecektir.

ÇÖZÜM:

- W yüklemesinin desteklenebilmesi için gerekli olan minimum x mesafesi, dirseğin hareket etmek üzere olduğu durumda gerçekleşir. Sürtünme kuvvetleri maksimum değere sahip olacaktır.

$$F_A = \mu_s N_A = 0.25 N_A$$

$$F_B = \mu_s N_B = 0.25 N_B$$

- Statik denge denklemleri ile x mesafesi hesaplanır.

$$\sum F_x = 0: -N_A + N_B = 0 \Rightarrow N_A = N_B$$

$$\sum F_y = 0: F_A + F_B - W = 0$$

$$0.25 N_A + 0.25 N_B - W = 0$$

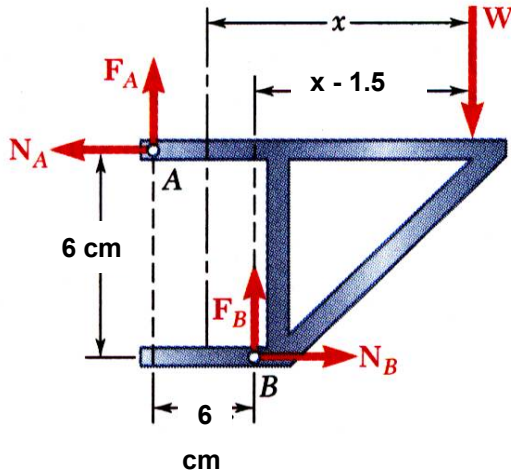
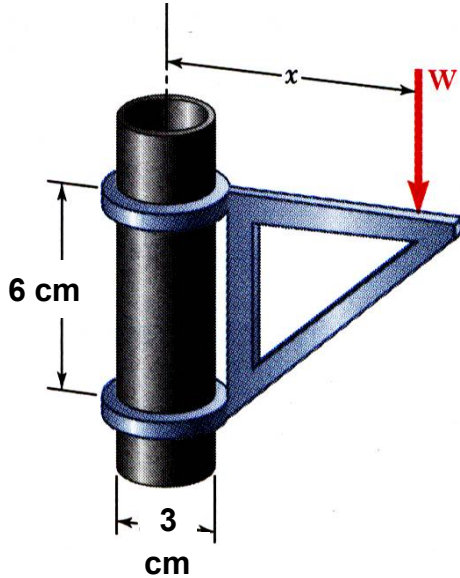
$$0.5 N_A = W \Rightarrow N_A = N_B = 2W$$

$$\sum M_B = 0: N_A(6 \text{ cm}) - F_A(3 \text{ cm}) - W(x - 1.5 \text{ cm}) = 0$$

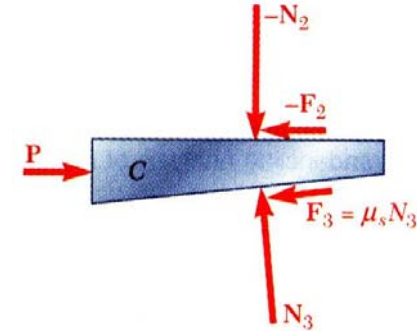
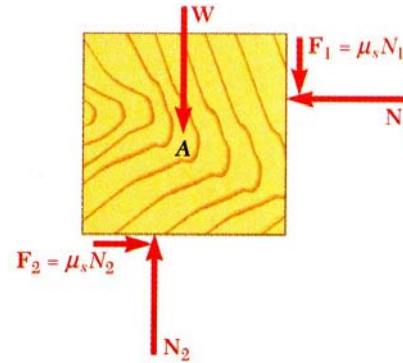
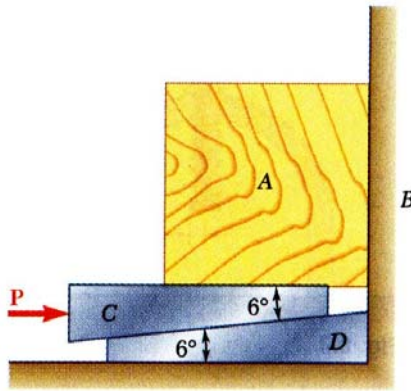
$$6 N_A - 3(0.25 N_A) - W(x - 1.5) = 0$$

$$6(2W) - 0.75(2W) - W(x - 1.5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$



Kamalar



- *Kamalar* – ağır yükleri kaldırmak için kullanılan basit makinalardır.
- Bloğu kaldırmak için gerekli kuvvet blok ağırlığından oldukça küçüktür.
- Sürtünme kamanın kaymasını engeller.
- Bloğu kaldıracak minimum P kuvveti araştırılır.

• Blok için SCD:

$$\sum F_x = 0:$$

$$-N_1 + \mu_s N_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-W - \mu_s N_1 + N_2 = 0$$

veya

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{W} = 0$$

• Kama için SCD:

$$\sum F_x = 0:$$

$$-\mu_s N_2 - N_3(\mu_s \cos 6^\circ - \sin 6^\circ) + P = 0$$

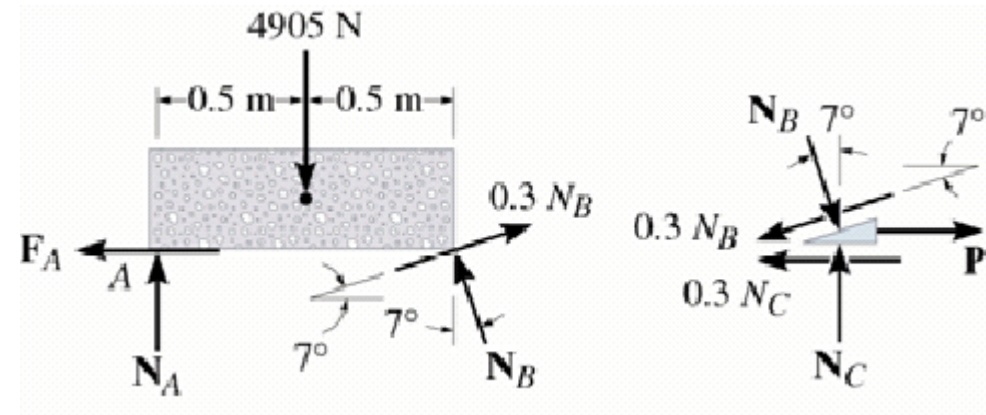
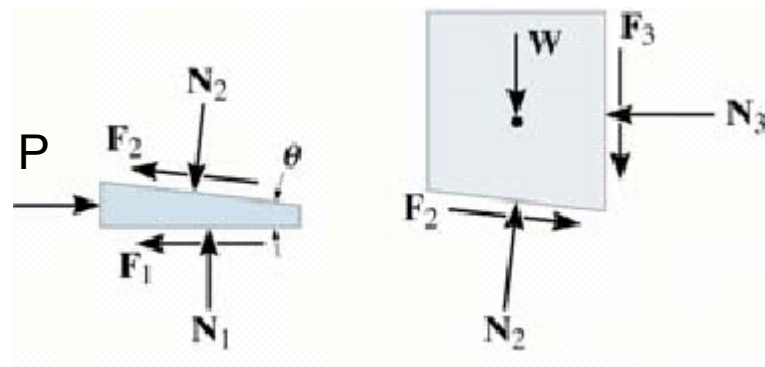
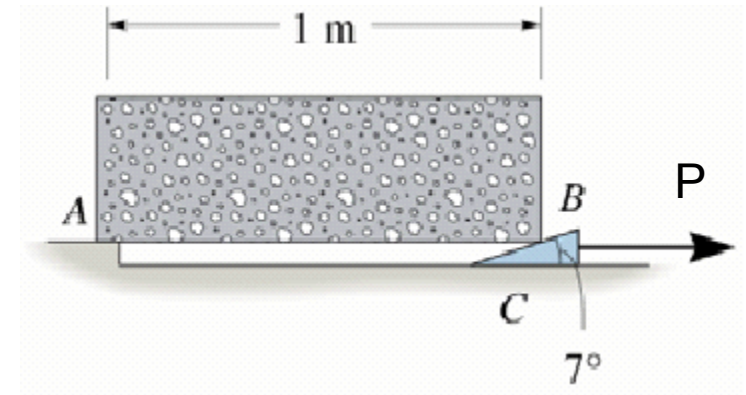
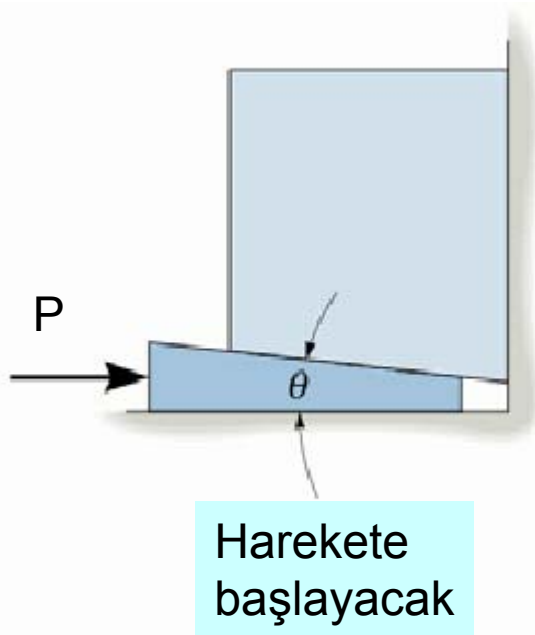
$$\sum F_y = 0:$$

$$-N_2 + N_3(\cos 6^\circ - \mu_s \sin 6^\circ) = 0$$

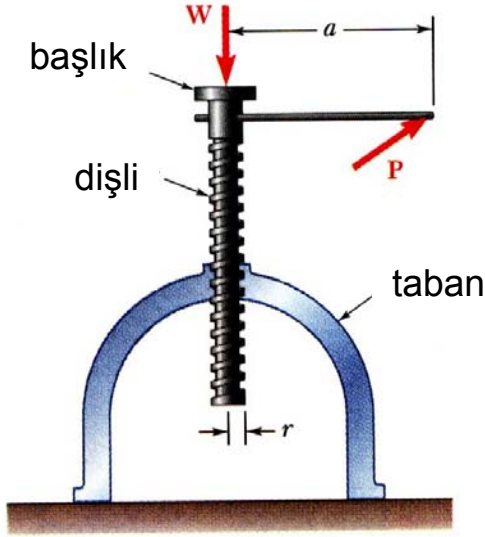
veya

$$\vec{P} - \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = 0$$

SÜRTÜNME - KAMA



Kare Dişli Vidalar



- Kare dişli vidalar kriko, pres ve buna benzer makinalarda sıkça kullanılırlar. Analiz hesabı eğik bir düzlemde kayan bir bloğun hesabına benzer. Sürtünme kuvvetinin temas alanına bağlı olmadığı daha önce belirtilmişti.

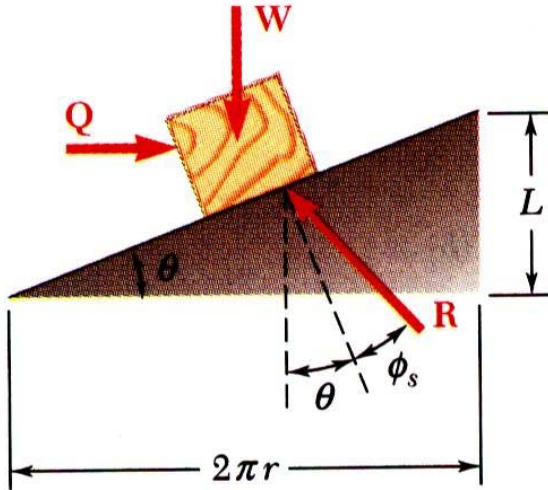
- Dişli W yükünü taşımaktadır ve kriko tabanı ile mesnetlenmektedir. Dişli ile taban arasındaki temas, bunların dişlerinin bir kısmı boyunca olur. Kola bir P kuvveti uygulanarak dişli döndürülür ve W yükü kaldırılır.

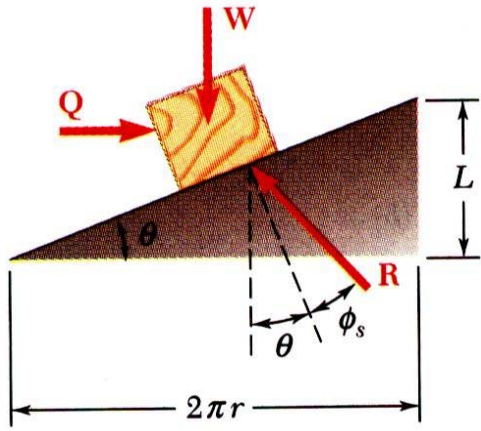
- Tabandaki dişin açınımı şekildeki gibi bir doğru olarak gösterilir. r dişin ortalama yarıçapı ise gerçek eğim yatayda $2\pi r$, düşeyde L (vida yolu: vidanın birdönüşte ilerlediği mesafe, adım: iki ardışık diş arasındaki uzaklık) ile bulunur.

- Sürtünme kuvveti alana bağlı olmadığına göre, iki dişin gerçekteki temas alanından küçük bir temas alanı seçilebilir ve dişli şeklindeki gibi blok ile gösterilebilir.

- Q kuvvetinin oluşturduğu moment P kuvvetinin momentine eşittir. Buradan gerekli P kuvveti hesaplanabilir:

$$\Rightarrow Q = Pa/r$$





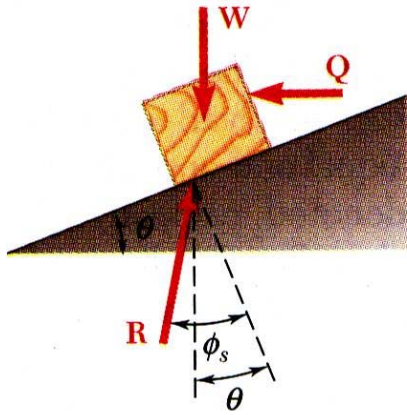
- Yük kaldırma işlemi küçük ardışık adımlarla yapılıyorsa:

$$\theta = \phi_s$$

- Yük kaldırma işlemi sürekli olarak yapılıyorsa:

İlk hareket için $\rightarrow \theta = \phi_s$

Daha sonra $\rightarrow \theta = \phi_k$

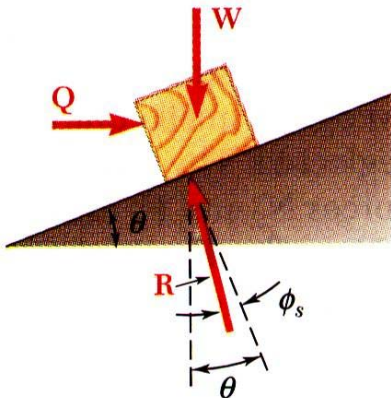


$\phi_s > \theta$ ise dişli *kendi kendini kilitleyen* türdedir.

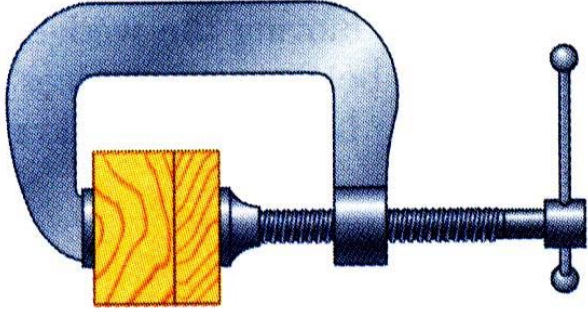
- Dişli yük altında yerinde kalacaktır.
- Yükü alçaltmak için Q kuvveti uygulanmalıdır.

$\phi_s < \theta$ ise dişli yük altında ters döner.

- Yükü dengelemek için Q kuvveti uygulanmalıdır.



Örnek 8.5



Bir mengene iki tahtayı birlikte tutmak için kullanılmaktadır. Çift kare dişli mengenenin ortalama çapı 2 cm ve adımı 0.40 cm dir. Dişler arasındaki sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.30$ dur.

Mengeneyi sıkıştırmak için gerekli maksimum tork (moment) 40 N*m ise
(a) tahta parçalarına etkiyen kuvveti,
(b) mengeneyi gevşetecek kuvveti hesaplayınız.

ÇÖZÜM

- Vida yolu ve adım hesaplanır.
- Harekete başlayan blok SCD 'ı ile tahtalar uygulanan kuvvet bulunur.
- Hareket başlamak üzere olan blok SCD 'ı ile mengeneyi gevşetecek kuvvet bulunur.

ÇÖZÜM

- Vida yolu ve adım hesaplanır.

Vida çift dişli olduğundan L ilerlemesi adımın 2 katıdır.

$$2x(0.40\text{cm}) = 0.80\text{cm}$$

$$\tan\theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{0.8\text{cm}}{2\pi\text{mm}} = 0.127 \quad \Rightarrow \theta = 7.3^\circ$$

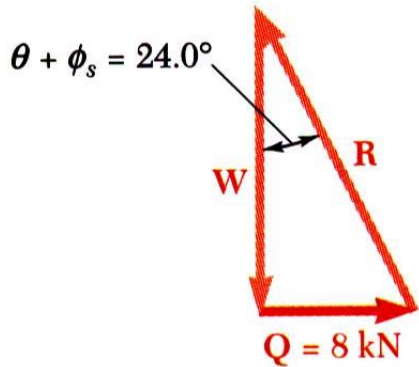
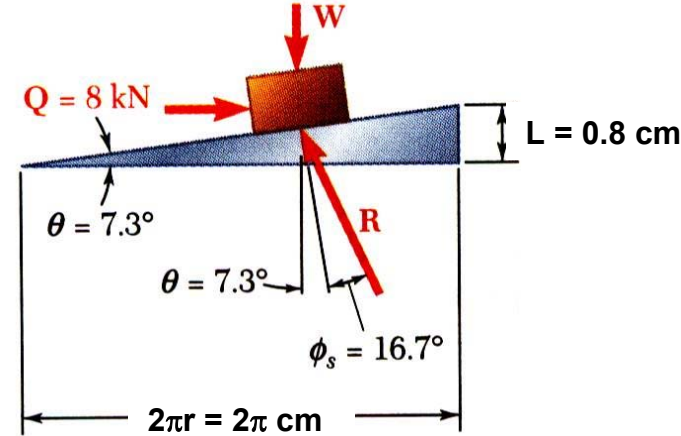
$$\tan\phi_s = \mu_s = 0.30 \quad \Rightarrow \phi_s = 16.7^\circ$$

- Harekete başlayan blok SCD 'ı ile tahtalar uygulanan kuvvet bulunur.

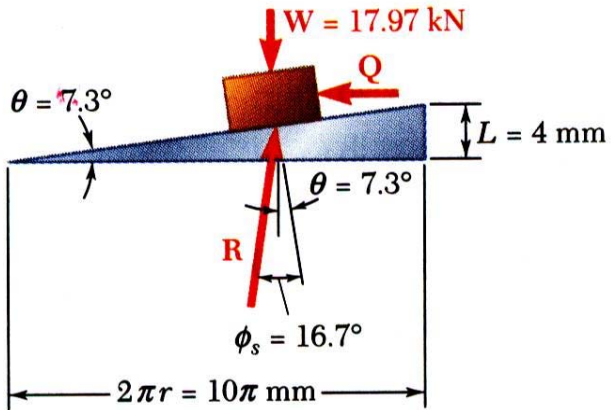
$$Qr = 40 \text{ N} \cdot \text{m} \quad Q = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \text{ mm}} = 8 \text{ kN}$$

$$\tan(\theta + \phi_s) = \frac{Q}{W} \quad W = \frac{8 \text{ kN}}{\tan 24^\circ}$$

$$W = 17.97 \text{ kN}$$



- Hareket başlamak üzere olan blok SCD 'ı ile mengeneyi gevşetecek kuvvet bulunur.

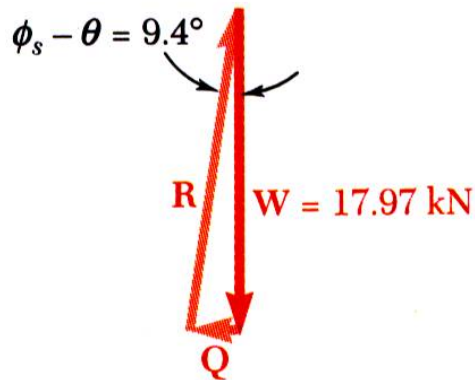


$$\tan(\phi_s - \theta) = \frac{Q}{W} \quad Q = (17.97 \text{ kN}) \tan 9.4^\circ$$

$$Q = 2.975 \text{ kN}$$

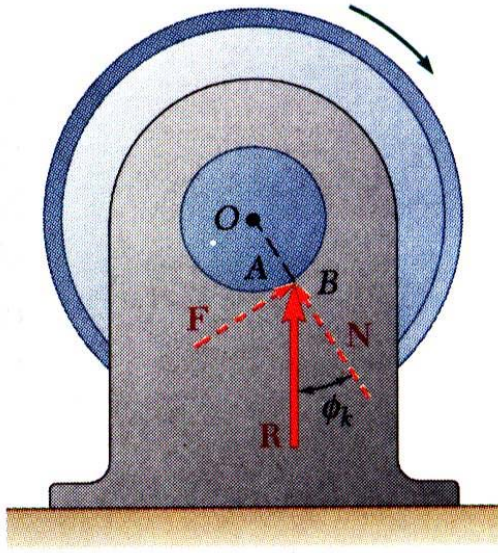
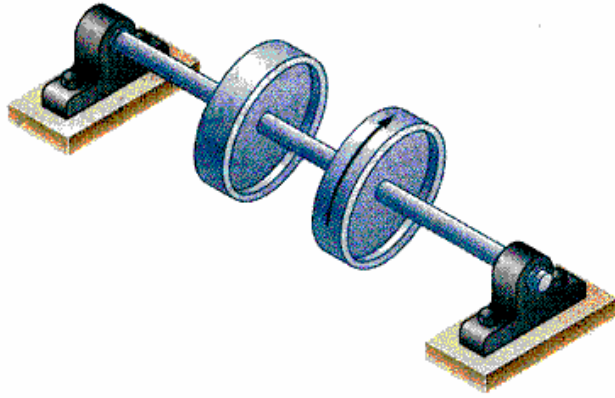
$$Tork = Qr = (2.975 \text{ kN})(5 \text{ mm})$$

$$= (2.975 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m})$$

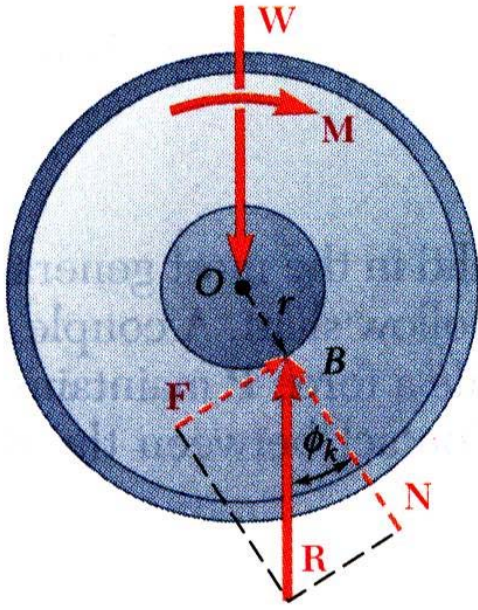


$$\Rightarrow Tork = 14.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Mil Yatakları – Dingil Sürtünmesi



- Mil yatakları dönel millerin yatay olarak desteklenmesi için kullanılır.
- Mil yatağı tamamen yağlanmışsa, sürtünme direnci dönme hızına, dingille yatak arasındaki boşluğa ve yağın viskozitesine bağlıdır. Yatağın tam olarak yağlandığı durumda, dingil ve yatak bir çizgi boyunca birbirine değdiği kabul edilir.
- Her biri W ağırlığında iki tekerlek bağlanmış milden yataklara gelen kuvvetler: tekerleklerin ağırlığı, hareketi sağlayan kuvvet çifi (M) ve yataktaki tepki kuvvetidir.
- Tepki bileşkesi -W olan yatay ve düşey kuvvetlerdir.
- Tepki tesir çizgisi mil merkezinden geçmez. R kuvveti merkezin sağında ve merkeze göre momenti kuvvet çiftinin M momentini dengeleyecek şekilde belirli bir uzaklıkta bulunur.
- Bu nedenle mil ile yatak arasındaki değme, en alçak A noktasında olmaz B noktasında olur.

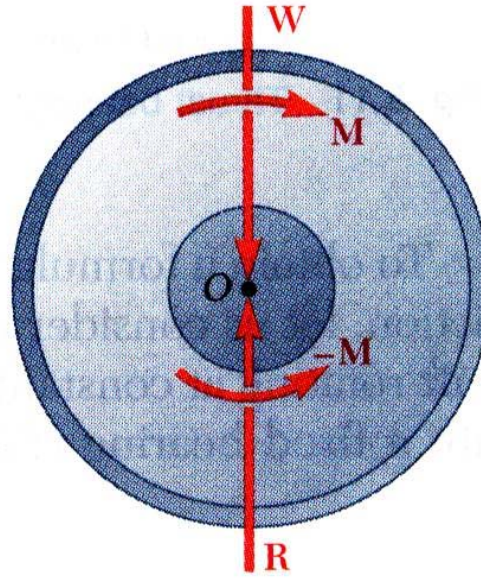


- Bu konum, R tepkisi ile yatak düzleminin normali arasındaki açıya, ϕ_k eşit olacak şekildedir.

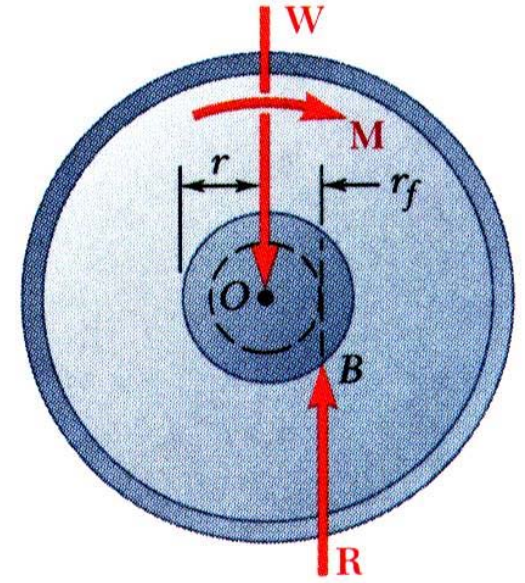
$$\sum M_O = 0$$

$$\Rightarrow M = Rr \sin \phi_k$$

$$\approx Rr\mu_k$$



- Tepki tesir çizgisi mil merkezinden geçiyorsa, M kuvvet çifti ile aynı şiddete sahip kuvvet çifti, -M, ilave edilmelidir.”



- Grafik çözüm istenirse, R nin tesir çizgisi, merkezi mil merkezinde olan

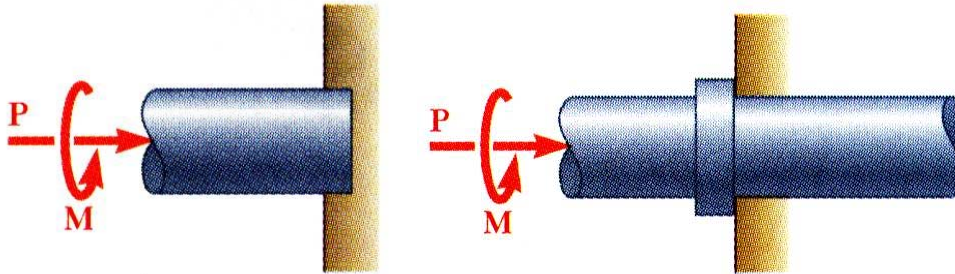
$$r_f = r \sin \phi_k$$

$$\approx r\mu_k$$

yarıçaplı çembere teğet olması gerekir. Bu çembere “sürtünme çemberi” denir.

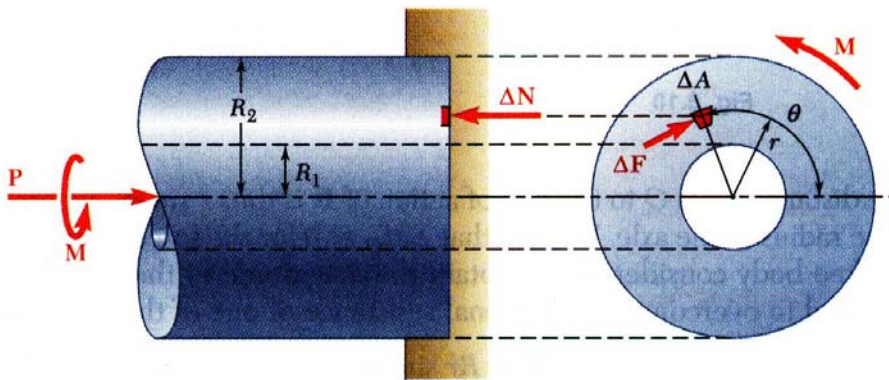
Basınç Yatakları ve Disk Sürüklemesi

Basınç yatakları dönel millere aksenal mesnet sağlamak için kullanılır.



(a) uç yatağı

(b) bilezik yatağı



İçi boş dönel bir mil olsun:

$$\begin{aligned}\Delta M &= r\Delta F = r\mu_k\Delta N = r\mu_k\frac{P}{A}\Delta A \\ &= \frac{r\mu_k P\Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\end{aligned}$$

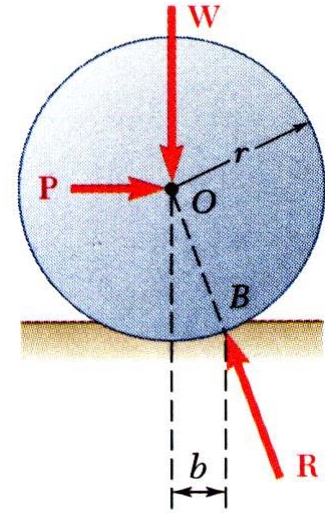
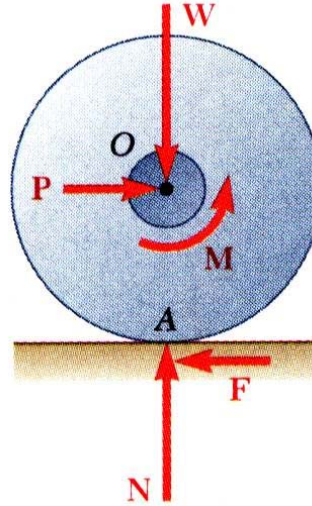
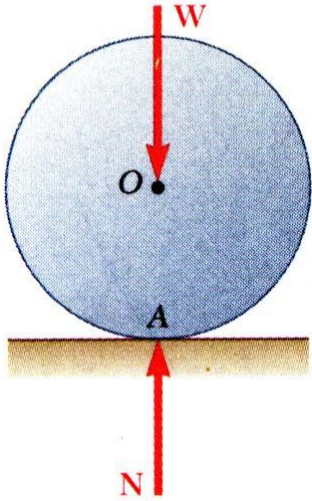
$$\begin{aligned}M &= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{2}{3} \mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}\end{aligned}$$

R yarıçaplı dolu bir mil için:

$$M = \frac{2}{3} \mu_k PR$$

Tekerlek Sürtünmesi: Yuvarlanma Direnci

Ağır yüklerin bağıl olarak küçük kuvvetlerle hareket ettirmek için kullanılır.



- Herhangi bir anda, tekerleğin yere değmekte olan noktasının yere göre bağıl hareketi olmadığı için, dolaysız değme sırasında olacak büyük sürtünme kuvvetlerini engellemektedir.
- Kuvvetler: W , N
- W O 'dan geçtiği için

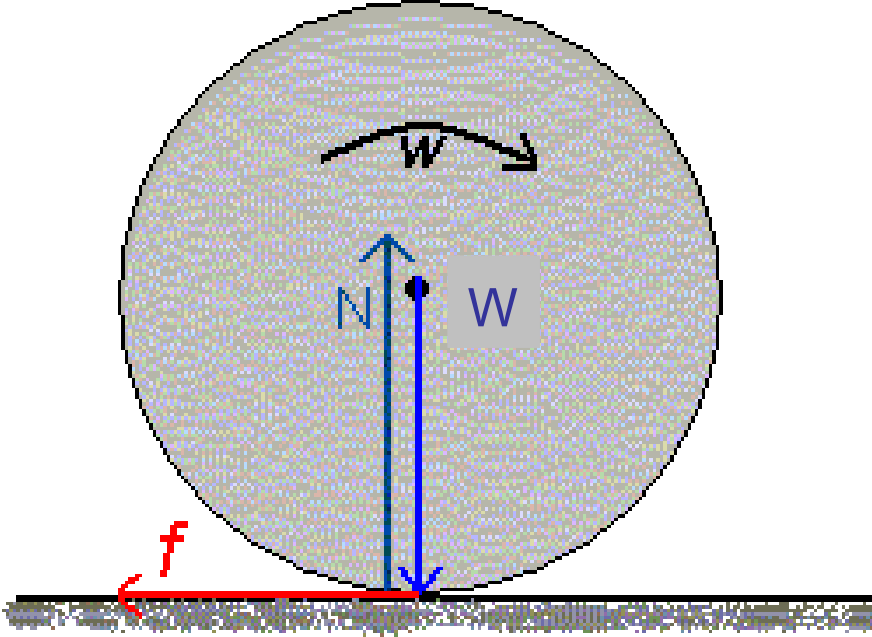
sürtünme direnci bulunur.

- Sürtünme kuvveti nedeniyle oluşan momenti, M , nedeniyle eş şiddetli fakat ters yönlü P ve F kuvvetlerinin oluşturduğu kuvvet çifti gerektirir.
- Kenarda sürtünme olmaksızın kayacaktır.

- tekerleğin veya yerin deformasyona uğraması, yer tepkisinin B noktasından uygulanmasına neden olur. P kuvveti W ağırlığının B noktasına göre momentini dengelemelidir:
- $Pr = Wb$
- b = yuvarlanma direnci katsayısı.

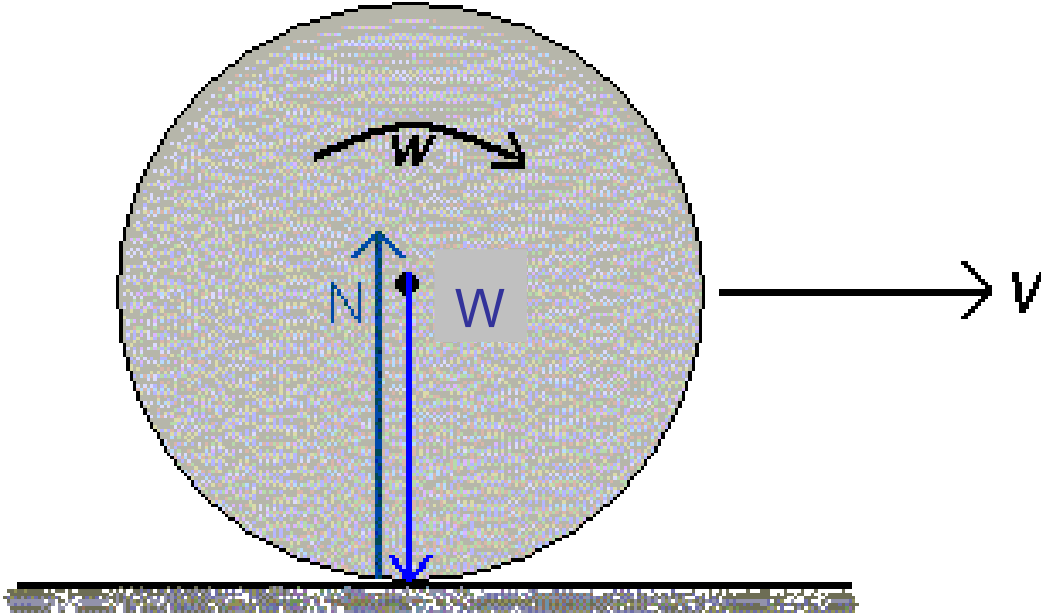
TEKERLEK SÜRTÜNMESİ, BİR YÜZEYİN BİR BAŞKA YÜZEY ÜZERİNDE YUVARLANMASI İLE OLUŞUR

BAŞLANGIÇTA SADECE DÖNME HAREKETİ DÜŞÜNÜLÜRSE:



HAREKETE BAŞLAMADAN ÖNCE,
HAREKETİ ENGELLEMeye ÇALIŞAN
SÜRTÜNME KUVVETİ OLUŞUR.

SABİT HIZ İLE İLERİ DOĞRU SERBEST YUVARLANMA HAREKETİ :

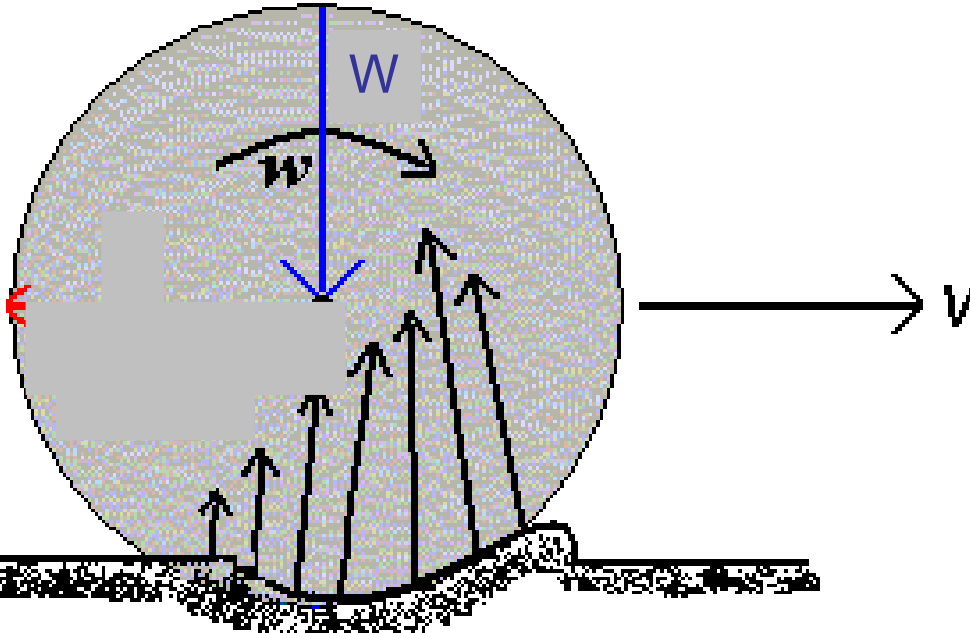


**TEMAS NOKTASININ YERE GÖRE BAĞIL HAREKETİ
OLMADIĞI İÇİN SÜRTÜNME KUVVETİ YOKTUR.**

GERÇEK DURUM

W YÜKÜ ALTINDA TEKERLEK VE ZEMİN
BİRAZ ŞEKİL DEĞİŞTİRİR.

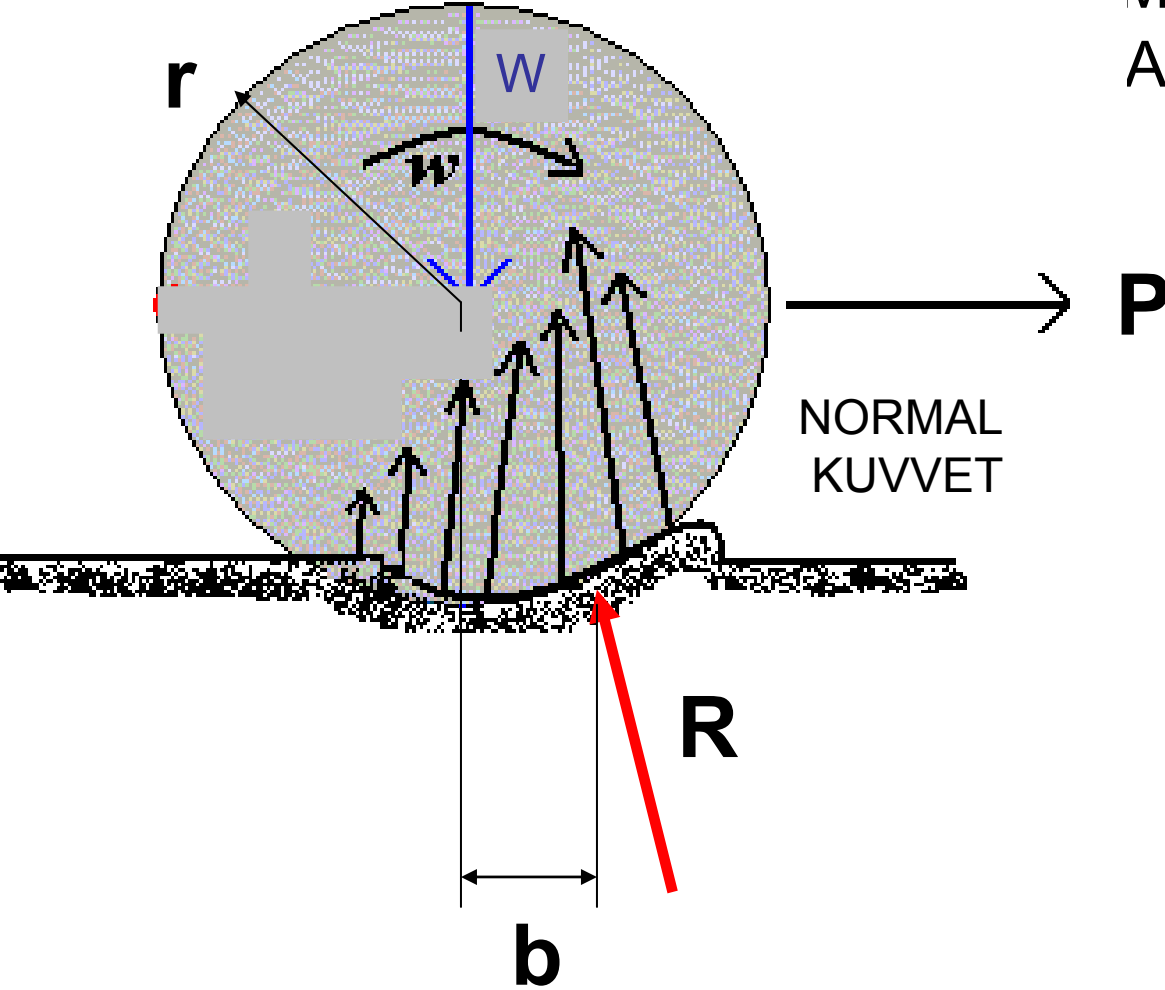
TEKERLEK İLE ZEMİN ARASINDAKİ
DEĞMENİN BELİRLİ BİR ALANDA OLUR.



NORMAL KUVVET

↓
SÜRTÜNME KUVVETİ OLUŞUR

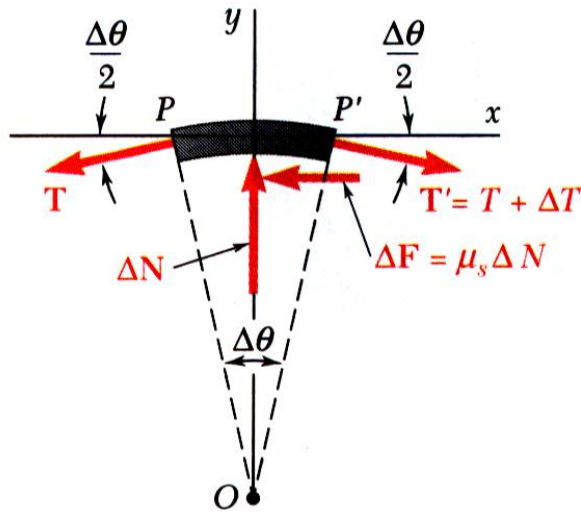
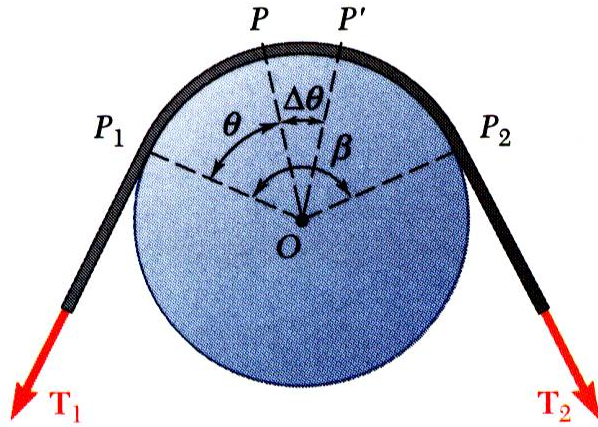
TEKERLEĞİN YUVARLANMASINI
MAK İÇİN **P** KUVVETİNİN
ANMASI GEREKİR:



$$Pr = Wb$$

YUVARLANMA DİRENCİ KATSAYISI

Kayış Sürtünmesi



- T_1 ve T_2 , kayış sağı doğru döndüğü duruma karşılık gelsin.

- Kayış elemanı için SCD:

$$\sum F_x = 0: (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta \theta}{2} - T \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0$$

$$\sum F_y = 0: \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \theta}{2} - T \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 0$$

- ΔN yi elemek için her iki taraf $\Delta \theta$ 'ya bölünür.

$$\frac{\Delta T}{\Delta \theta} \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s \left(T + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\sin(\Delta \theta/2)}{\Delta \theta/2}$$

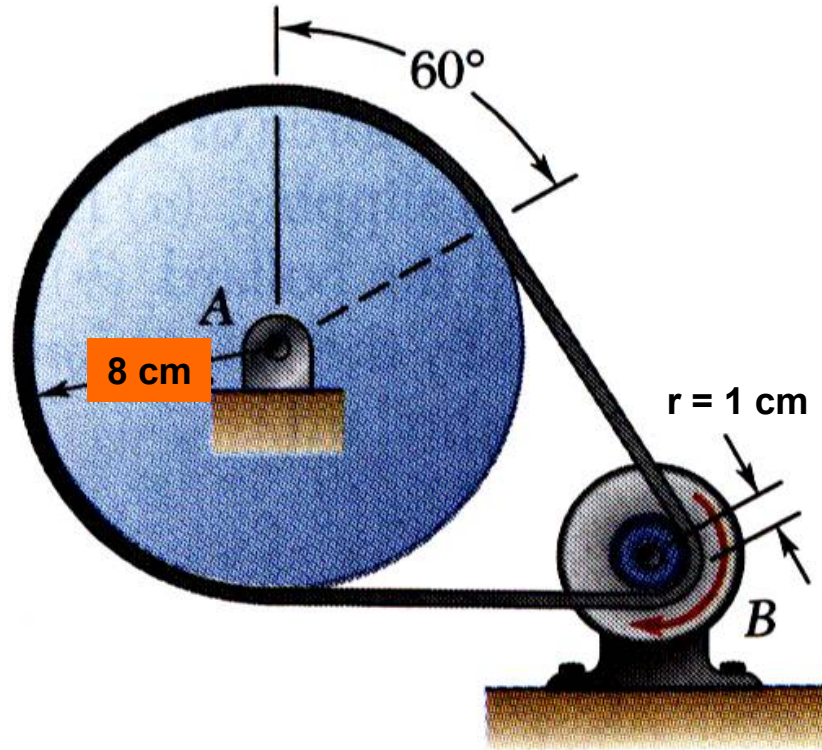
- $\Delta \theta$ a sıfıra doğru yaklaşırsa fark oranları türev olarak yazılabilir,

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0$$

- Değişkenler ayrılıp integral alınırsa: $\theta = 0$ & $\theta = \beta$

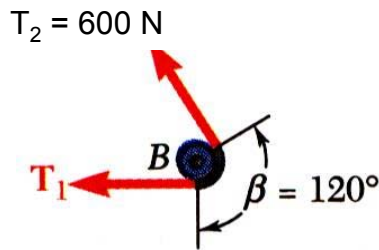
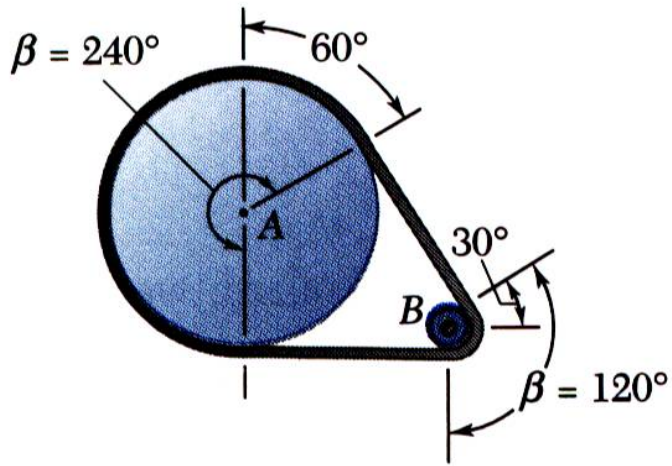
$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad \& \quad \frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$

Örnek 8.8



Şekildeki kayış A ve B kasnaklarını bağlamaktadır. Kasnaklar ile kayış arasındaki sürtünme katsayıları $\mu_s = 0.25$ ve $\mu_k = 0.20$ dir.

Kayışlardaki maksimum izin verilen gerilme 600 N ise, kayış tarafından kasnağa aktarılabilecek en büyük torku hesaplayınız.



- Temas açısı küçük olduğu için, kayma başlangıçta B kasnağında olur. B kasağındaki kayış gerilmeleri hesaplanır:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad \frac{600 \text{ N}}{T_1} = e^{0.25(2\pi/3)} = 1.688$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{600 \text{ N}}{1.688} = 355.4 \text{ N}$$

- Akasnağı için SCD çizilirse, torkun hesaplanması için kasnak merkezine göre moment hesaplanır:

$$\sum M_A = 0: \quad M_A + (8 \text{ cm})(355.4 \text{ N} - 600 \text{ N}) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 163.1 \text{ Ncm}$$

