

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Ders Notu:
Hayri ACAR
İstanbul Teknik Üniveristesi

Tel: 285 31 46 / 116

E-mail: acarh@itu.edu.tr

Web: <http://atlas.cc.itu.edu.tr/~acarh>

5. Yayılı Kuvvetler: Sentroid ve Ağırlık Merkezi

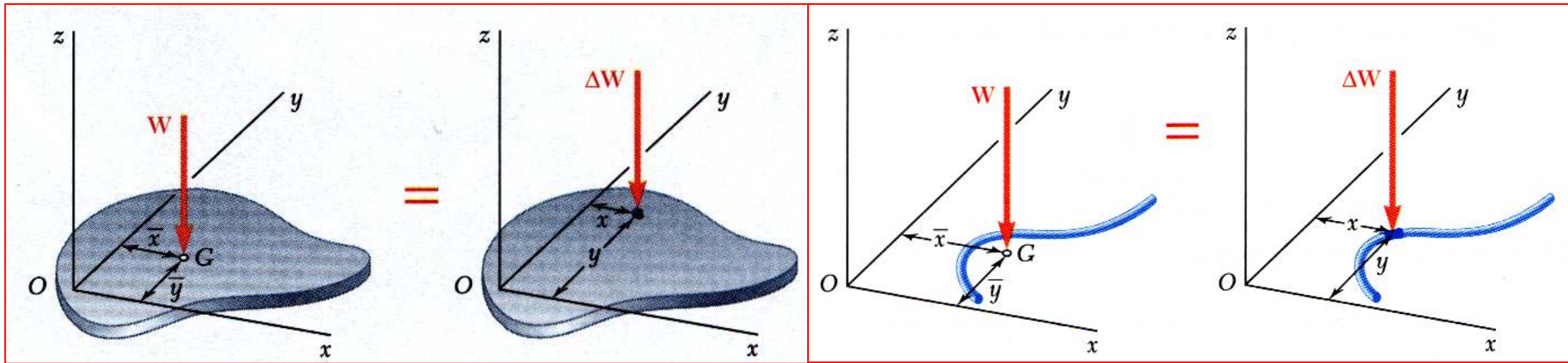
- Giriş
- 2 Boyutlu Cisimin Ağırlık Merkezi
- Alan ve Eğrilerin Sentroidi ve Birinci Momentleri
- Belirli Şekil Alanlarının Sentroidi
- Belirli Şekil Eğrilerinin Sentroidi
- Bileşik Levhalar ve Alanları
- İntegral ile Sentroidin Belirlenmesi
- Pappus-Guldinus Teoremleri
- Kirişlerde Yayılı Yükler
- Üç Boyutlu Cisimlerin Ağırlık Merkezi: Hacimin Sentroidi
- Belirli Şekillerin Sentroidi
- Üç Boyutlu Bileşik Cisimler

Giriş

- Dünya, cisimi oluşturan her parçacığa yerçekimi kuvveti uygular. Bu kuvvetler tek bir bileşke kuvvete dönüştürülebilir. Bu kuvvet cisimin ağırlığıdır ve cisimin ağırlık merkezine etkir.
- Bir alanın sentroidi bir cisimin ağırlık merkezinin benzeridir. Sentroidin yeri alanın birinci momenti kavramı ile belirlenir.
- Üç boyutlu dönel simetrik cisimlerin yüzey alanlarının ve hacimlerinin hesaplanmasında *Pappus-Guldinus* teoremi kullanılır.

İki Boyutlu Cisimlerin Ağırlık Merkezi

- Bir levhanın ağırlık merkezi
- Bir telin ağırlık merkezi



y eksenine göre moment

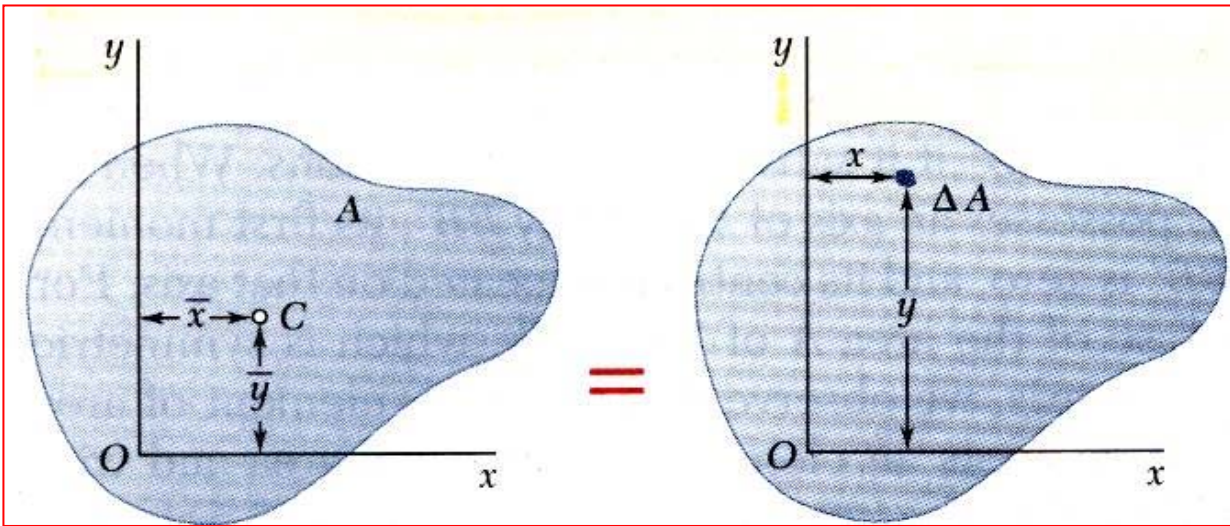
$$\bullet \sum M_y; \quad \bar{x}W = \sum x \Delta W \\ = \int x dW$$

x eksenine göre moment

$$\bullet \sum M_x; \quad \bar{y}W = \sum y \Delta W \\ = \int y dW$$

Alanların ve Eğrilerin Sentroidi ve Birinci Momentleri

- Bir alanın sentroidi



Yandan görünüş



$$W = \gamma(\underbrace{At}_{\text{hacim}})$$

yoğunluk

$$dW = \gamma(tdA)$$

$$\bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{x}(\gamma At) = \int x(\gamma t) dA$$

$$\bar{x}A = \int x dA = Q_y$$

= y eksenine göre birinci moment

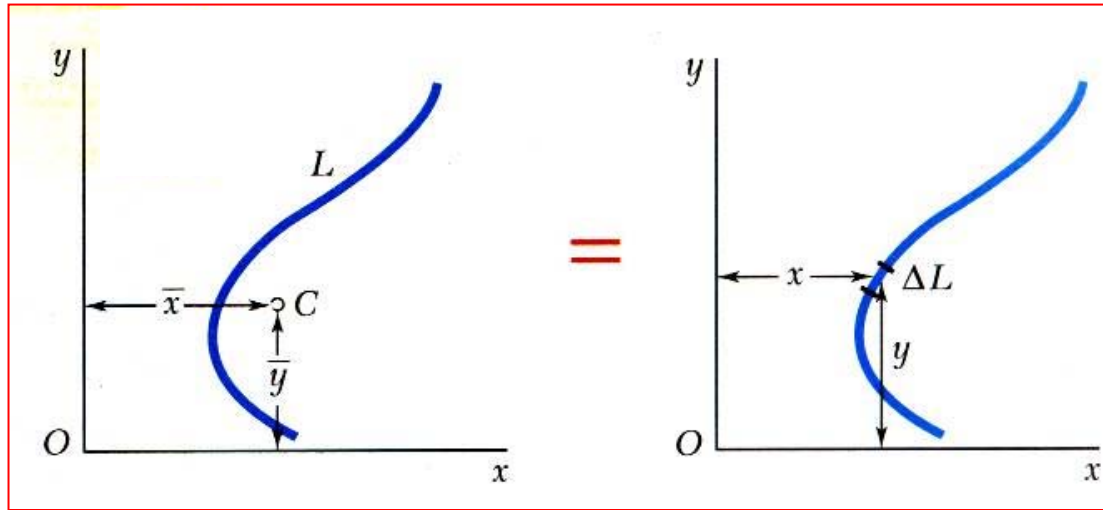
$$\bar{y}W = \int y dW$$

$$\bar{y}(\gamma At) = \int y(\gamma t) dA$$

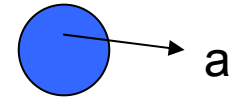
$$\bar{y}A = \int y dA = Q_x$$

= x eksenine göre birinci moment

- Bir eğrinin sentroidi



Telin kesit alanı



$$W = \gamma(La)$$

yoğunluk hacim

$$dW = \gamma(adL)$$

$$\bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{x}(\gamma La) = \int x(\gamma a)dL$$

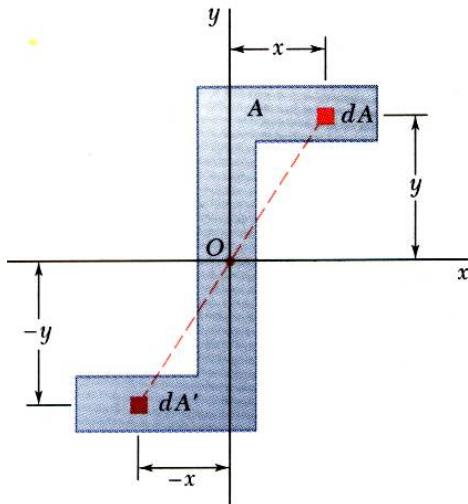
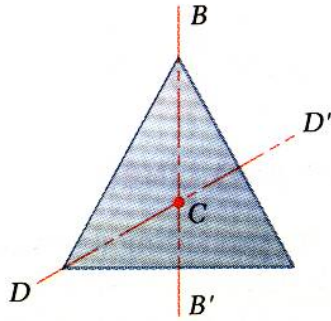
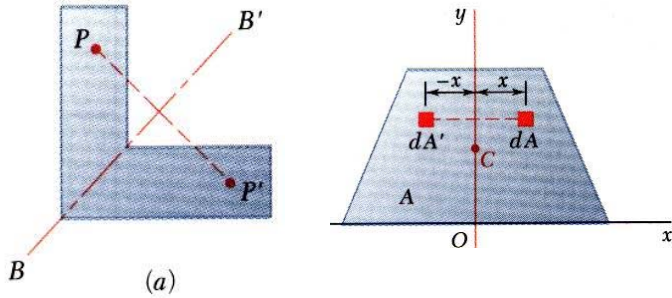
$$\bar{x}L = \int x dL$$

$$\bar{y}W = \int y dW$$

$$\bar{y}(\gamma La) = \int y(\gamma a)dL$$

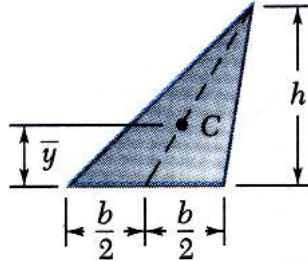
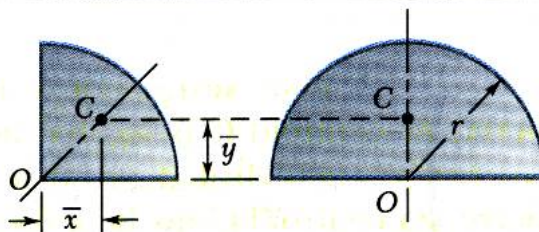
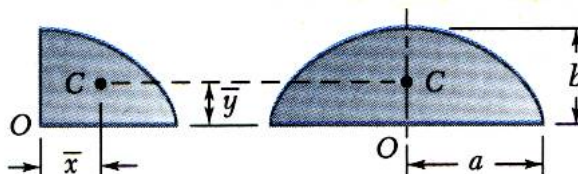
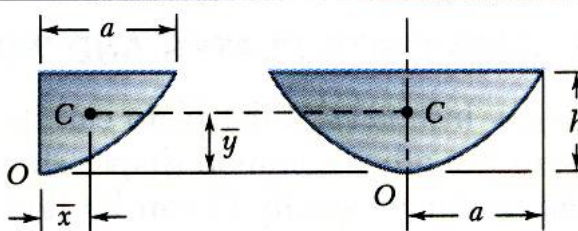
$$\bar{y}L = \int y dL$$

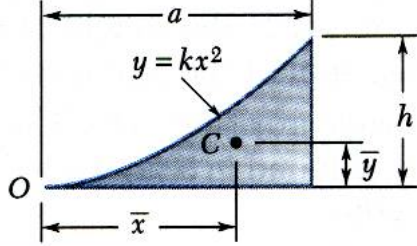
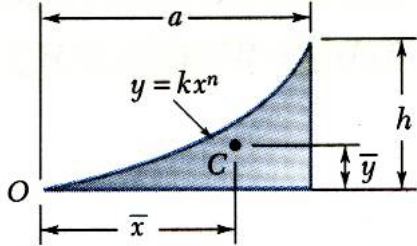
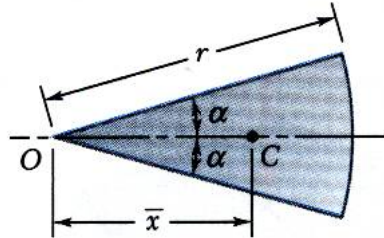
Alanların ve Eğrilerin Birinci Momenti



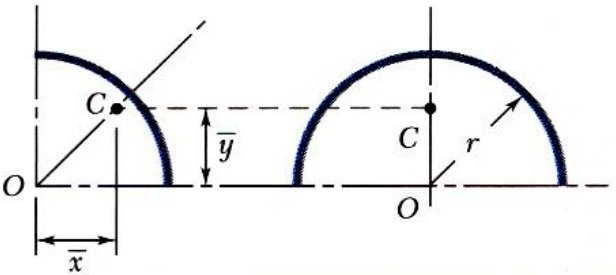
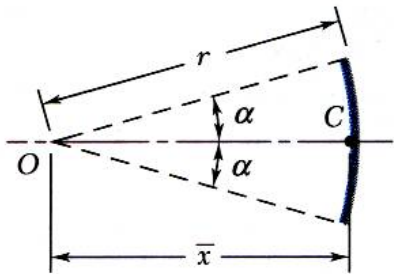
- Bir alan düşünelim ve bu alan için BB' eksenini çizilsin. Eğer her P noktası için bir P' noktası varsa ve BB' eksenini PP' doğrusunu dik olarak kesip iki eşit parçaya ayırıyorsa bu alan BB' eksenine göre simetriktir denir
- Alanın bu simetri eksenine göre birinci momenti sıfırdır.
- Eğer bir alan simetri çizgisi içeriyorsa, alanın sentroidi bu eksen üzerindedir.
- Eğer bir alan iki simetri çizgisi içeriyorsa, alanın sentroidi bu çizgilerin kesişme noktasındadır.
- Alan içinde seçilen (x,y) koordinatındaki dA elemanı için $(-x,-y)$ koordinatında eş alanlı dA' elemanı varsa bu alan eksen merkezine göre simetriktir denir.
- Bir alanın sentroidi ile simetri merkezi aynıdır.

Belirli Şekil Alanlarının Sentroidi

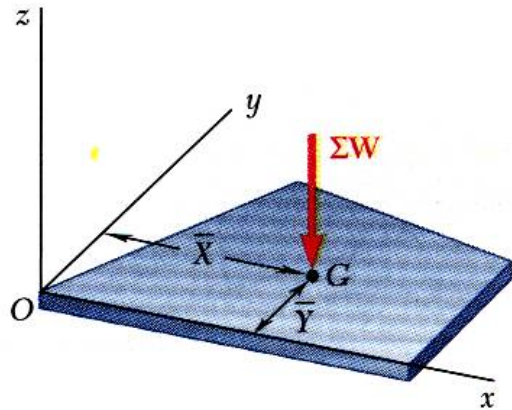
Şekil		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Alan
Üçgen alanı			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Çeyrek daire alanı		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Yarım daire alanı		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Çeyrek elips alanı		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Yarım elips alanı		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Yarım parabol alanı		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabol alanı		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

Parabol parçası		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Parabol parçası (genel)		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Daire dilimi		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

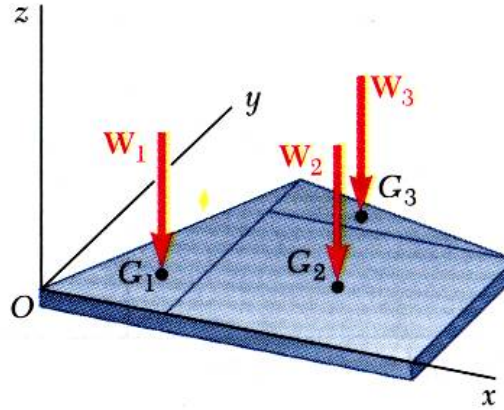
Belirli Şekil Eğrilerinin Sentroidi

Şekil		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Uzunluk
Çeyrek daire yayı		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Yarım daire yayı		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Daire yayı		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Bileşik Plakalar ve Alanlar



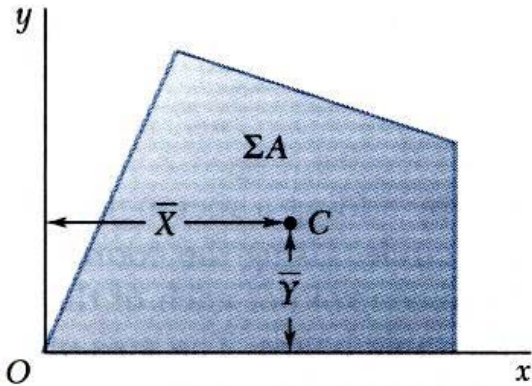
=



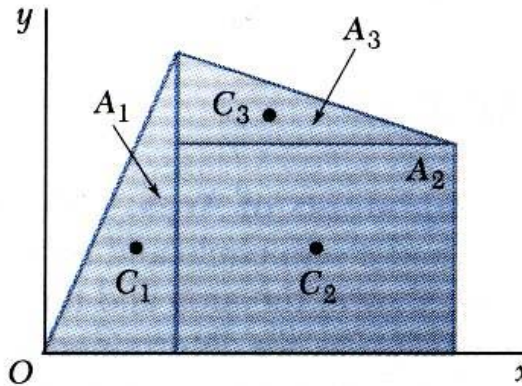
- Bileşik plakalar

$$\bar{X} \sum W = \sum \bar{x} W$$

$$\bar{Y} \sum W = \sum \bar{y} W$$



=

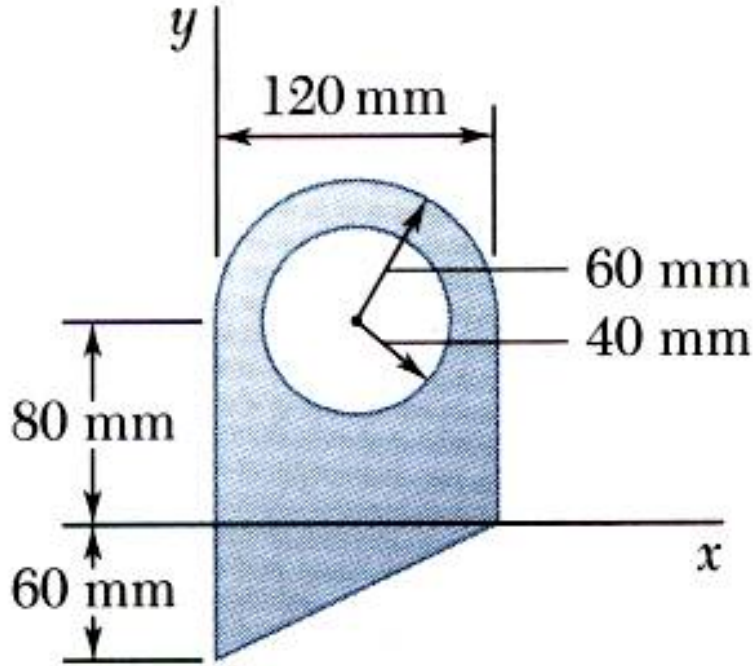


- Bileşik alanlar

$$\bar{X} \sum A = \sum \bar{x} A$$

$$\bar{Y} \sum A = \sum \bar{y} A$$

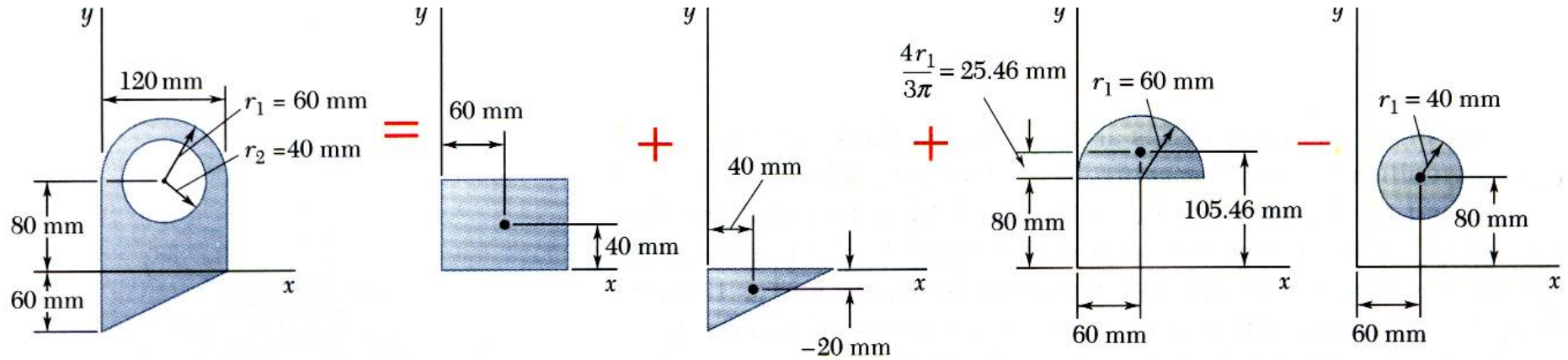
Örnek 5.1



Şekilde gösterilen düzlemsel alanın x ve y eksenlerine göre birinci momentlerini hesaplayınız. Sentroidinin yerini bulunuz.

Çözüm:

- Alanı üçgen, dikdörtgen, yarım daire ve dairesel boşluk olmak üzere parçalara ayırın.
- Belirlenen eksenlere göre alanların birinci momentlerini hesaplayın.
- Toplam alanı ve üçgen, dikdörtgen ve yarım daire elemanların birinci momentlerini bulun. Dairesel boşluğun alanını toplam alandan ve momentini toplam momentten çıkarın.
- Birinci momentleri toplam alana bölerek sentroidin koordinatlarını hesaplayınız.



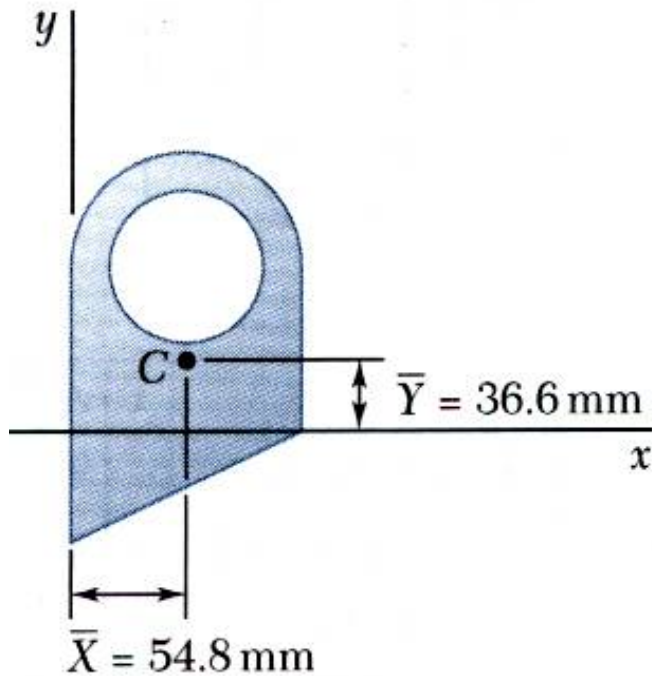
Eleman	A, mm ²	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm ³	$\bar{y}A$, mm ³
Dikdörtgen	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Üçgen	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Yarım daire	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Daire	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

- Toplam alanı ve üçgen, dikdörtgen ve yarım daire elemanların birinci momentlerini bulun. Dairesel boşluğun alanını toplam alandan ve momentini toplam momentten çıkarın.

$$Q_x = +506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q_y = +757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

- Birinci momentleri toplam alana bölerek sentroidin koordinatlarını hesaplayınız.



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x} A}{\sum A} = \frac{+757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

$$\boxed{\bar{X} = 54.8 \text{ mm}}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A} = \frac{+506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

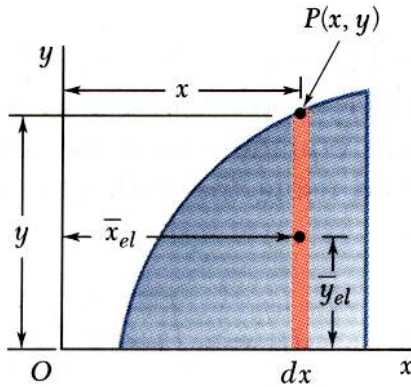
$$\boxed{\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}}$$

İntegral ile Sentroidin Belirlenmesi

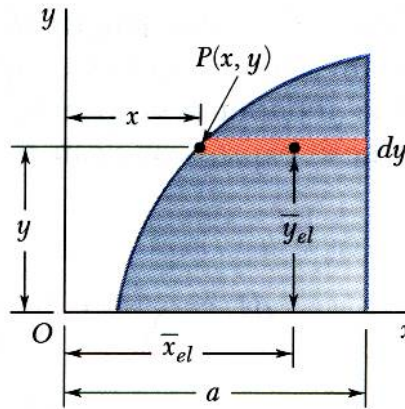
$$\bar{x}A = \int x dA = \iint x dx dy = \int \bar{x}_{el} dA$$

$$\bar{y}A = \int y dA = \iint y dx dy = \int \bar{y}_{el} dA$$

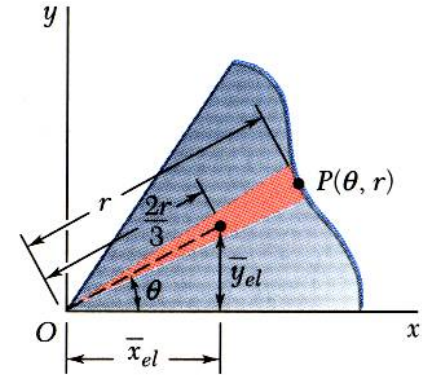
- dA elemanı ince bir dikdörtgen veya şerit olarak kabul edilirse tek integral ile çözüm yapılabilir.



$$\begin{aligned}\bar{x}A &= \int \bar{x}_{el} dA \\ &= \int x (y dx) \\ \bar{y}A &= \int \bar{y}_{el} dA \\ &= \int \frac{y}{2} (y dx)\end{aligned}$$

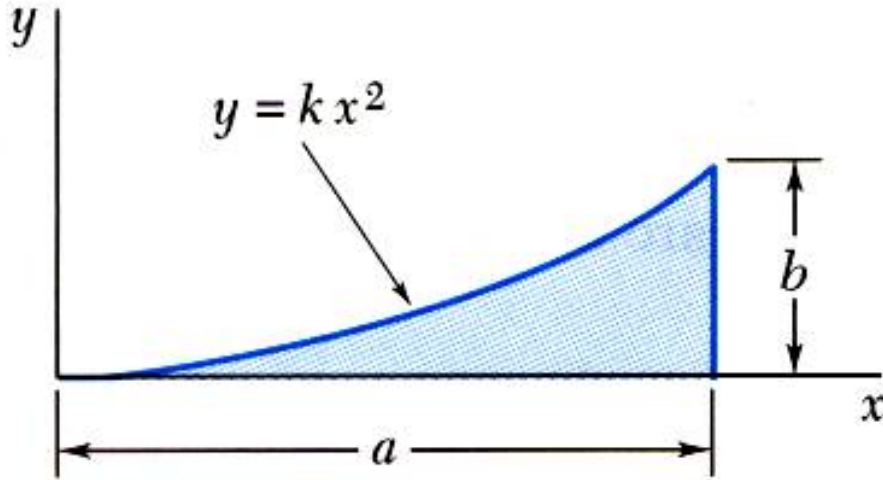


$$\begin{aligned}\bar{x}A &= \int \bar{x}_{el} dA \\ &= \int \frac{a+x}{2} [(a-x) dx] \\ \bar{y}A &= \int \bar{y}_{el} dA \\ &= \int y [(a-x) dx]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{x}A &= \int \bar{x}_{el} dA \\ &= \int \frac{2r}{3} \cos \theta \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta \right) \\ \bar{y}A &= \int \bar{y}_{el} dA \\ &= \int \frac{2r}{3} \sin \theta \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta \right)\end{aligned}$$

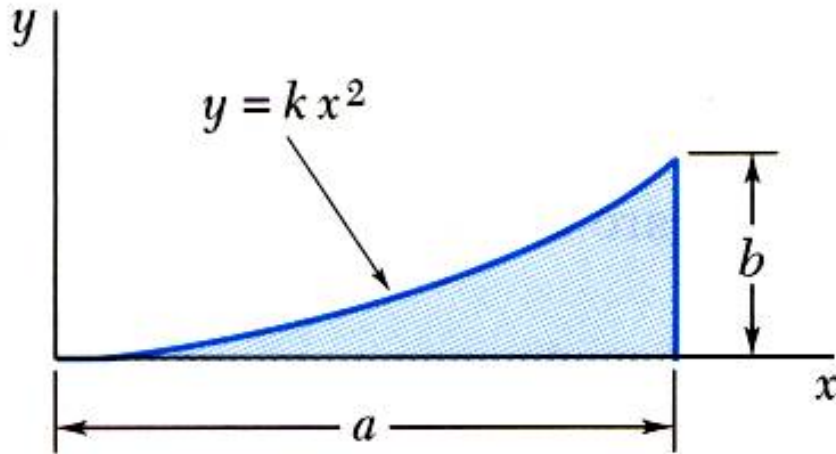
Örnek 5.4



Şekildeki parabolic sentroidini
direk integral ile hesaplayınız.

Çözüm:

- k sabitini belirleyiniz.
- Toplam alanı bulunuz.
- Düşey ve yatay şeritleri kullanarak tek integral ile birinci momentleri bulunuz.
- Sentroidin koordinatlarını hesaplayınız.

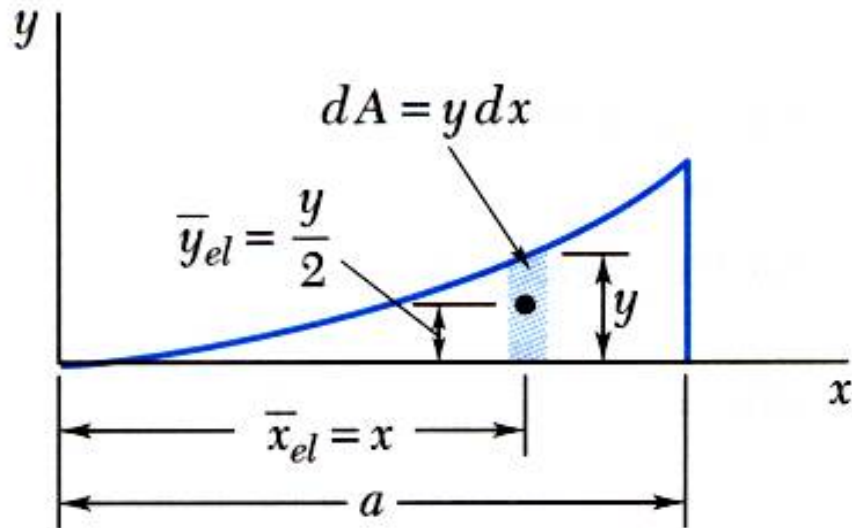


- k katsayısının belirlenmesi:

$$y = kx^2$$

$$b = ka^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \quad \text{or} \quad x = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$



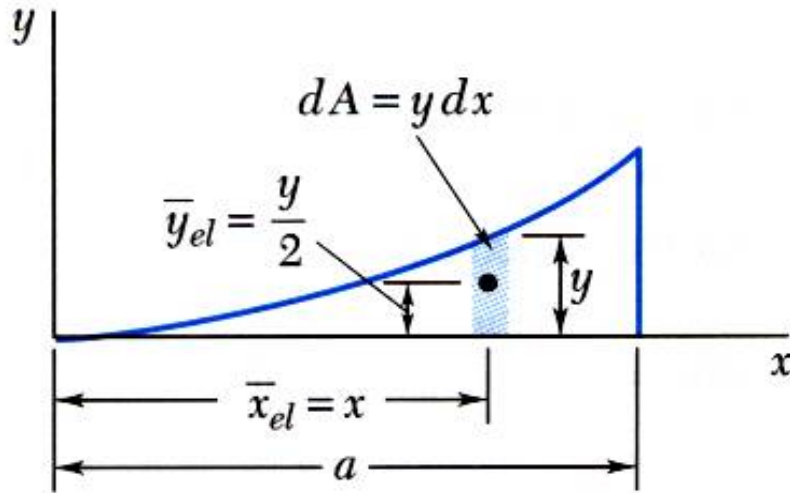
- Toplam alanın bulunması:

$$A = \int dA$$

$$= \int y dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= \frac{ab}{3}$$

- Düşey şerit kullanarak tek integral ile birinci momentlerinin bulunması:



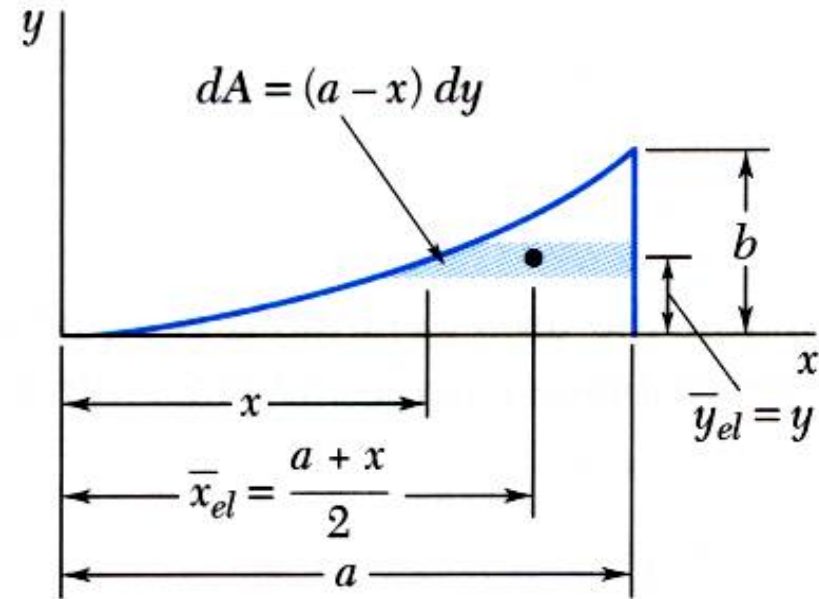
$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int xy dx = \int_0^a x \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{b^2}{2a^4} \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

- Yatay şerit kullanarak tek integral ile birinci momentlerinin bulunması:

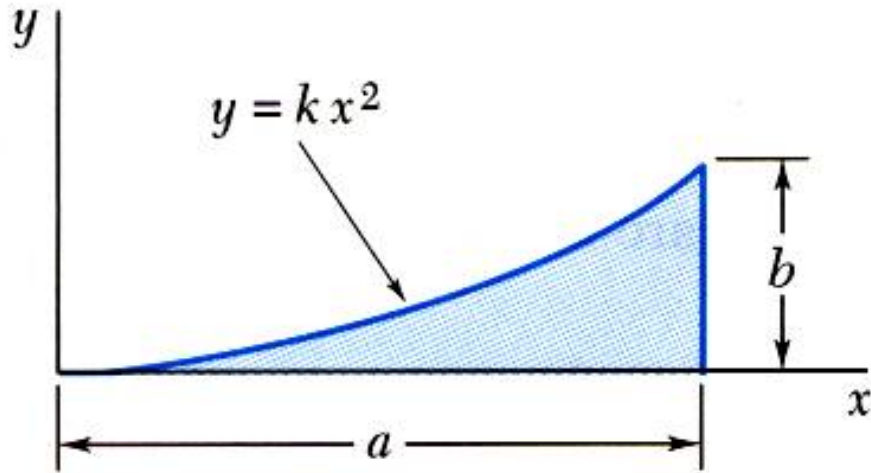


$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{a+x}{2} (a-x) dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b} y \right) dy = \frac{a^2 b}{4}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int y(a-x) dy = \int y \left(a - \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} \right) dy$$

$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}} y^{3/2} \right) dy = \frac{ab^2}{10}$$



- Sentroid koordinatların belirlenmesi:

$$\bar{x}A = Q_y$$

$$\bar{x} \frac{ab}{3} = \frac{a^2b}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{4}a$$

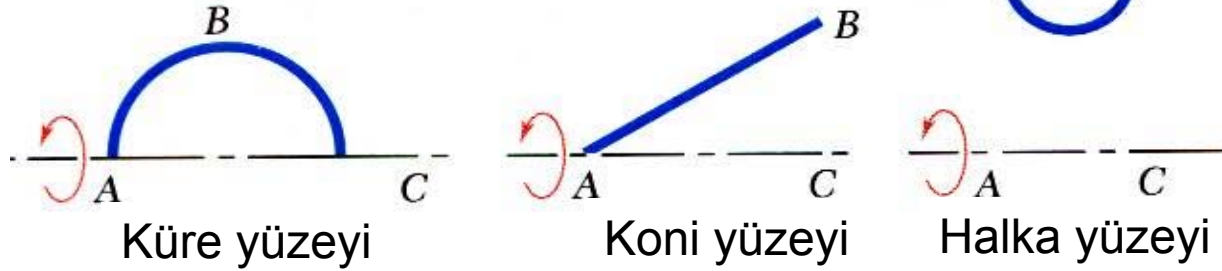
$$\bar{y}A = Q_x$$

$$\bar{y} \frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10}$$

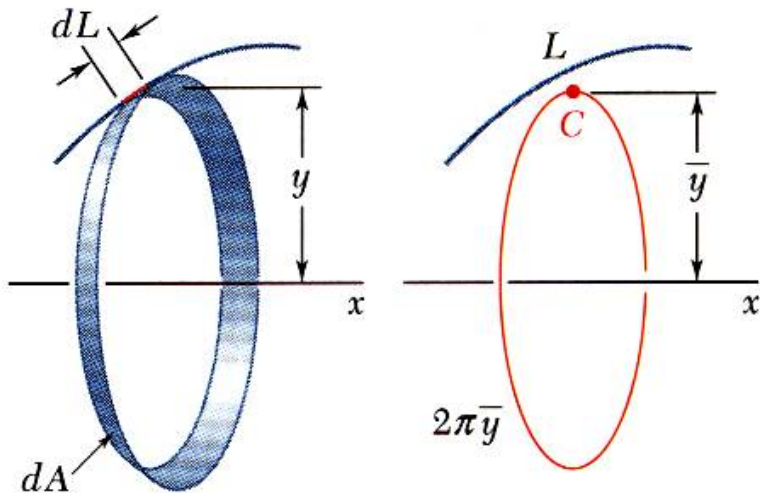
$$\bar{y} = \frac{3}{10}b$$

Pappus-Guldinus Teoremleri

(I)



- Düzlemsel bir eğrinin sabit bir eksen etrafında döndürülmesi ile dönel yüzey elde edilir.



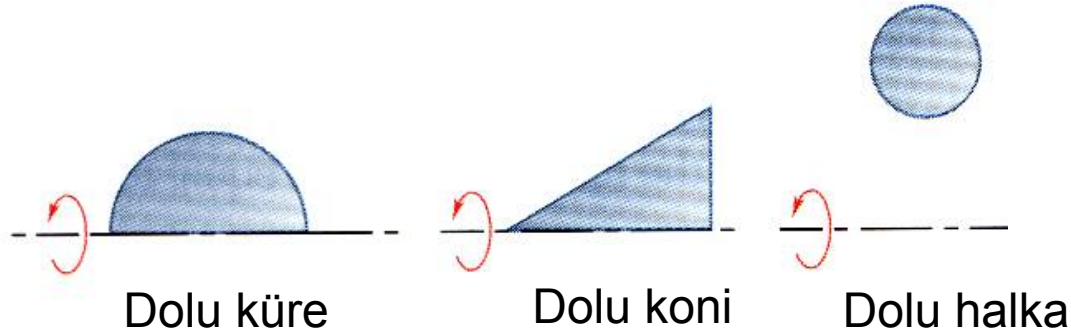
$$dA = 2\pi y dL$$

$$\Rightarrow A = \int 2\pi y dL = 2\pi \int y dL$$

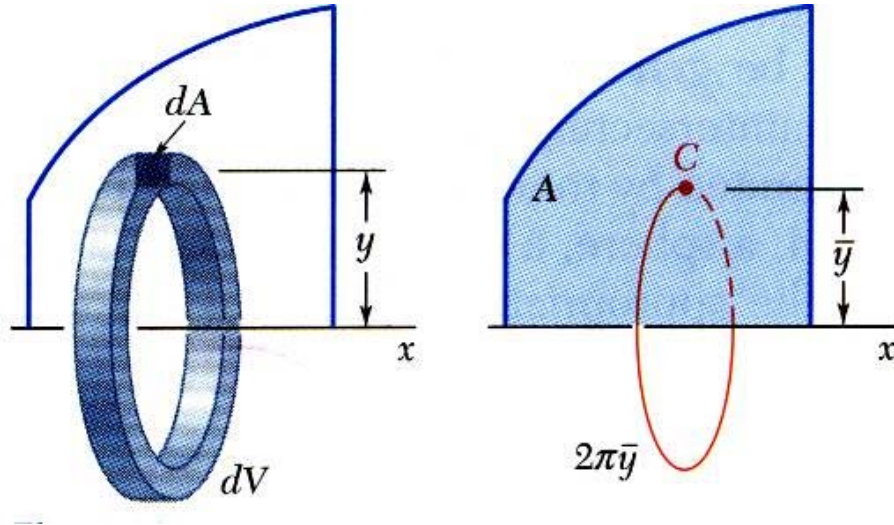
$$\Rightarrow A = 2\pi \bar{y} L$$

- Dönel yüzeyin alanı, eğrinin uzunluğu ile döndürülme sırasında eğrinin sentroidinin katettiği mesafenin çarpımına eşittir.

(II)



- Düzlemsel bir alanın sabit bir eksen etrafında döndürülmesi ile dönel hacim elde edilir.



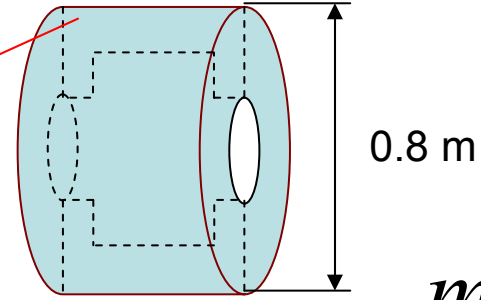
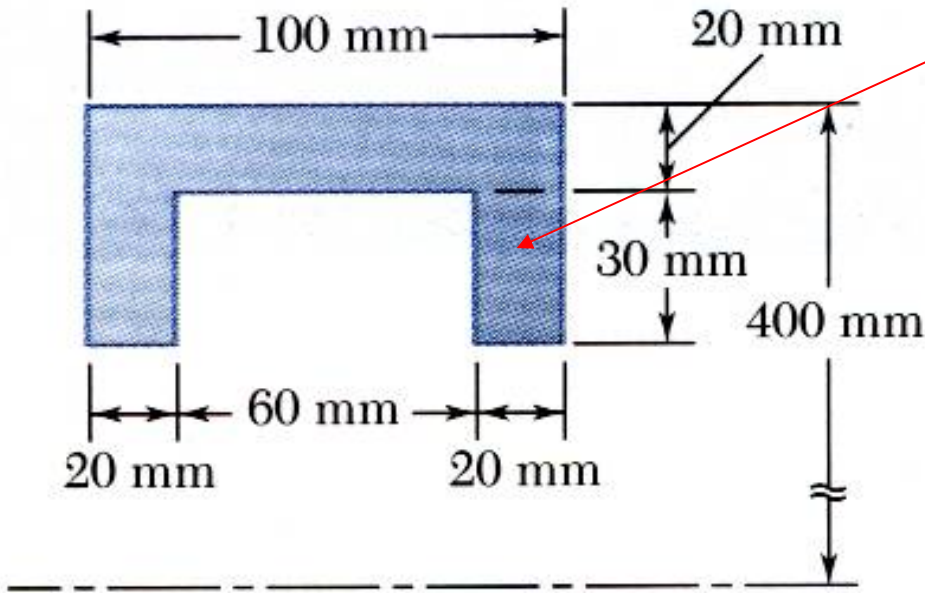
$$dV = 2\pi y dA$$

$$\Rightarrow V = \int 2\pi y dA$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \bar{y} A$$

- Dönel yüzeyin hacmi, düzlemsel alan ile döndürülme sırasında alanın sentroidinin katettiği mesafenin çarpımına eşittir.

Örnek 5.7



$$m = \rho V$$

$$W = mg$$

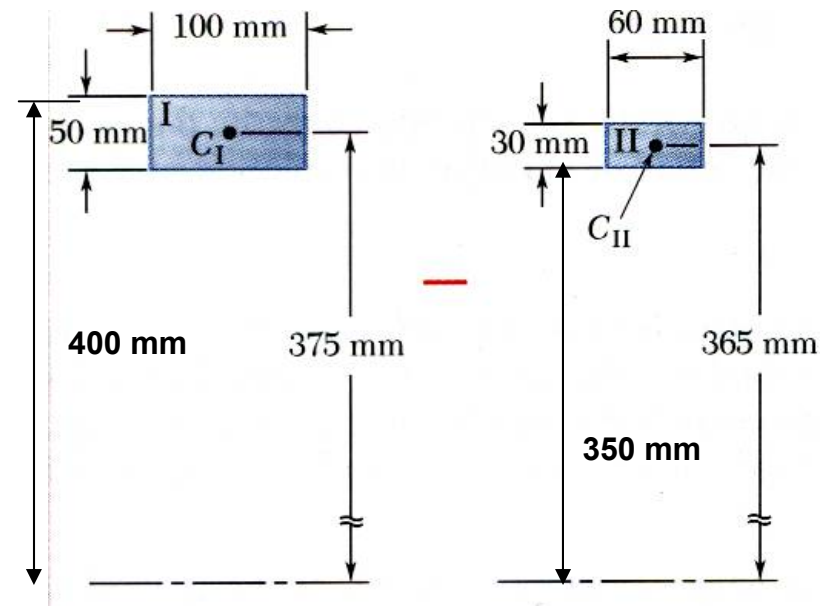
Kasmağın dış çapı 0.8 m dir ve kesit alanı şekildeki gibidir. Kasmağ çelikten yapılmıştır. Kasmağın kütlesini ve ağırlığını bulunuz.

$$\rho_{\text{çelik}} = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Çözüm:

- Pappus-Guldinus teoremini uygulayarak kesit alanından hacim bulunur.
- Yoğunluk ve yerçekimi ivmesi ile çarparak kütle ve ağırlık bulunur.

- Pappus-Guldinus teoremini uygulayarak kesit alanından hacim bulunur.
- Yoğunluk ve yerçekimi ivmesi ile çarparak kütle ve ağırlık bulunur.

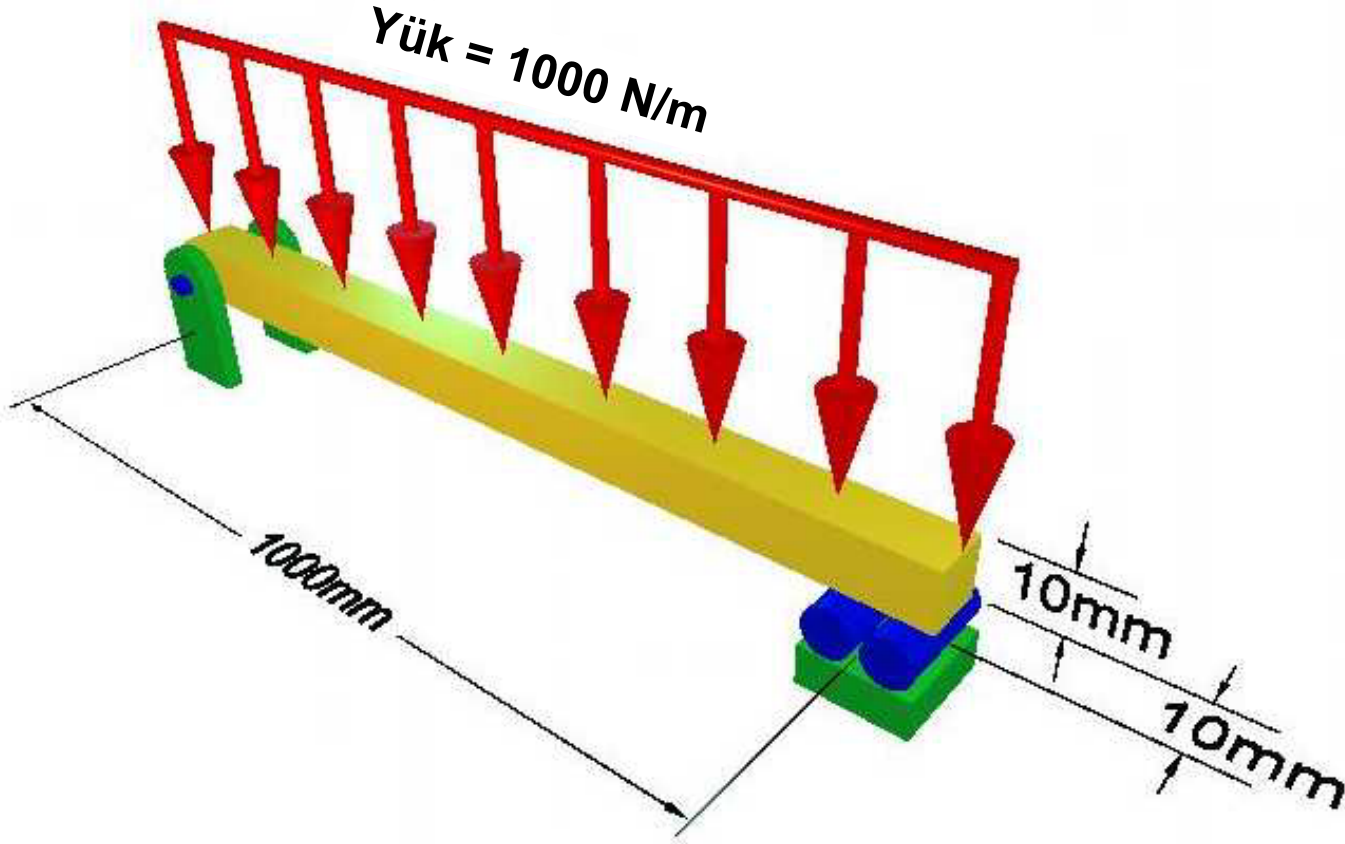


	Alan, mm ²	$\bar{y}$, mm	Sentroidin katettiği mesafe, mm	Hacim, mm ³
I	+5000	375	$2\pi(375) = 2356$	$(5000)(2356) = 11.78 \times 10^6$
II	-1800	365	$2\pi(365) = 2293$	$(-1800)(2293) = -4.13 \times 10^6$
				Kasnak hacmi, mm ³ = 7.65×10^6

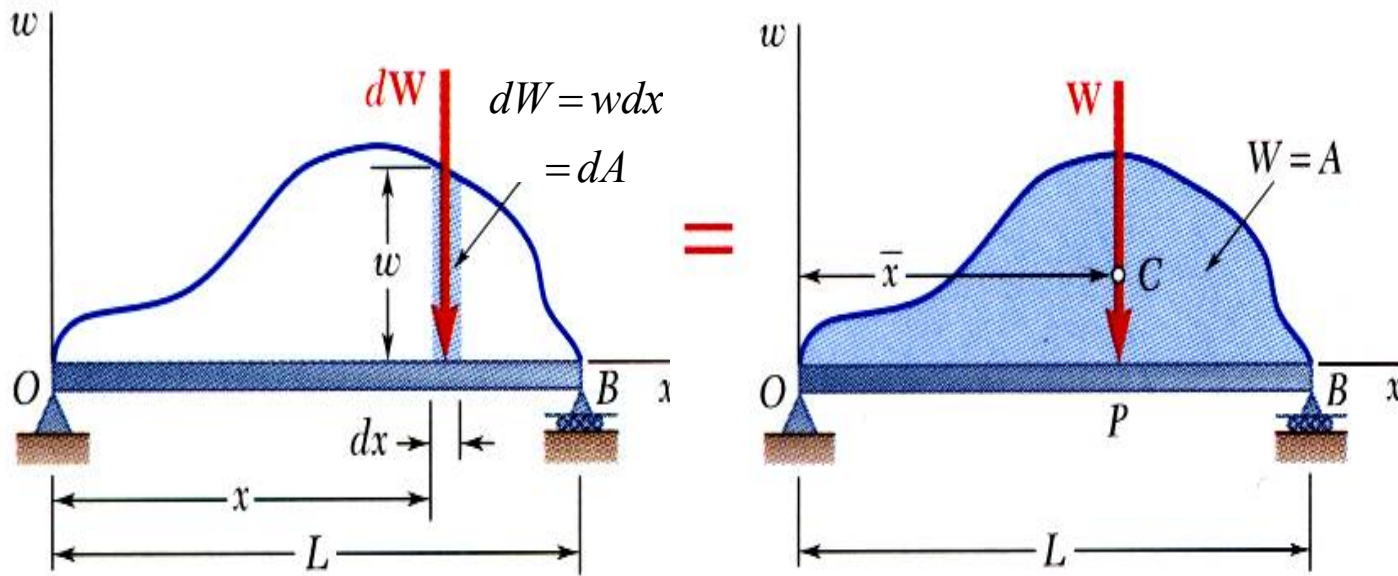
$$m = \rho V = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (7.65 \times 10^6 \text{ mm}^3) (10^{-9} \text{ m}^3/\text{mm}^3) \quad m = 60.0 \text{ kg}$$

$$W = mg = (60.0 \text{ kg}) (9.81 \text{ m/s}^2) \quad W = 589 \text{ N}$$

Kirişlerde Yayılı Y¼kler



- Yayılı y¼k birim uzunluk başına d¼řen y¼k¼n çizimi ile g¼sterilir, $w \text{ (N/m)}$.



$$W = \int_0^L w dx = \int dA = A$$

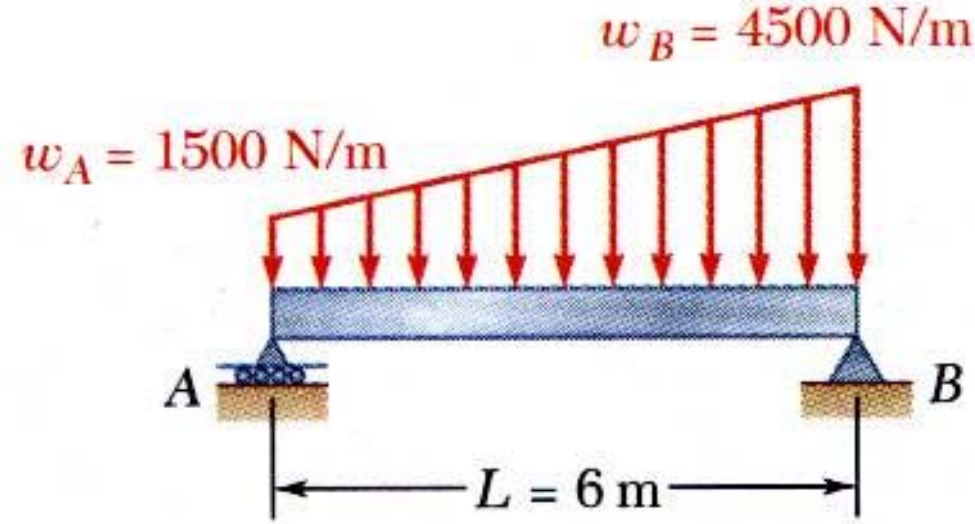
- Toplam yük, yük eğrisinin altında kalan alana eşittir.

$$(OP)W = \int x dW$$

$$(OP)A = \int_0^L x dA = \bar{x}A$$

- Yayılı yük, şiddeti yükleme eğrisi altında kalan alana eşit ve alanın sentroidine etkiyen bileşke kuvvet ile gösterilebilir.

Örnek 5.9



Bir kiriş şekildeki gibi bir yayılı yükün etkisi altındadır. Eşdeğer bileşke kuvveti ve mesnet noktalarındaki tepki kuvvetlerini bulunuz.

Çözüm:

- Bileşke kuvvetin şiddeti, yük eğrisinin altında kalan alana eşittir.
- Bileşke kuvvetin tesir çizgisi yük eğrisi altında kalan alanın sentroidinden geçer.
- Tepki kuvvetleri kenarlara göre moment dengesinde hesaplanır.

- Bileşke kuvvetin şiddeti, yük eğrisinin altında kalan alana eşittir.

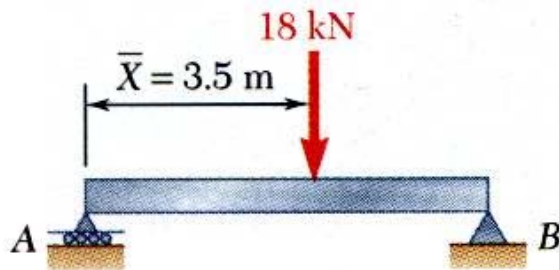
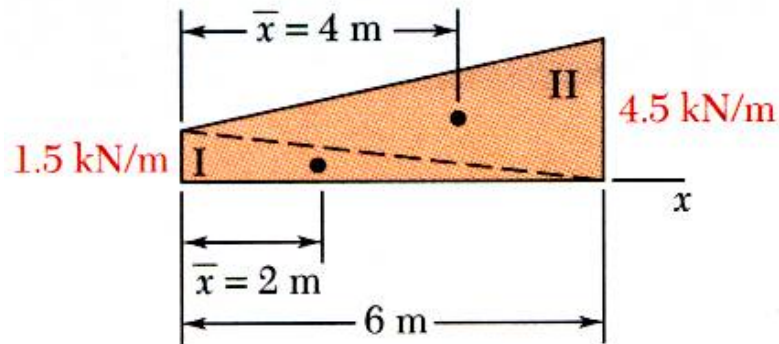
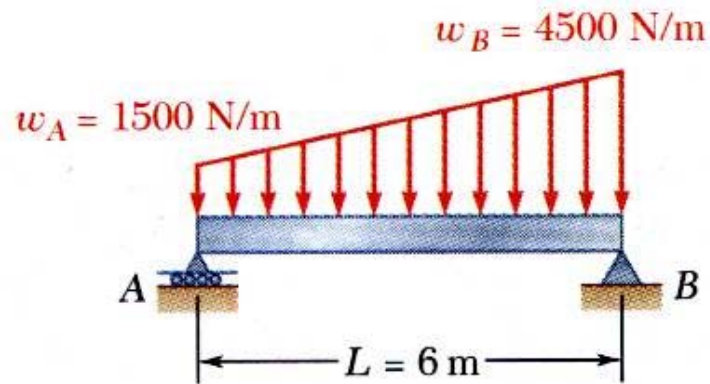
$$F = \sum A \quad \bar{X} \sum A = \sum \bar{x} A$$

Eleman	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Üçgen I	4.5	2	9
Üçgen II	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$

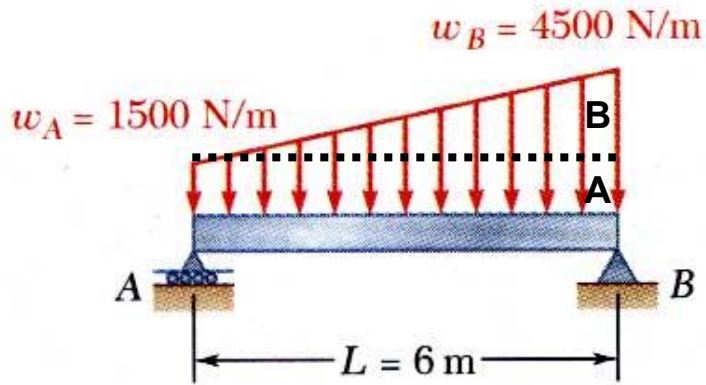
$$F = 18.0 \text{ kN}$$

- Bileşke kuvvetin tesir çizgisi yük eğrisi altında kalan alanın sentroidinden geçer.

$$\bar{X} = \frac{63 \text{ kN} \cdot \text{m}}{18 \text{ kN}} \Rightarrow \bar{X} = 3.5 \text{ m}$$



Alternatif çözüm:



$$w_A = 1500 \text{ N/m}$$

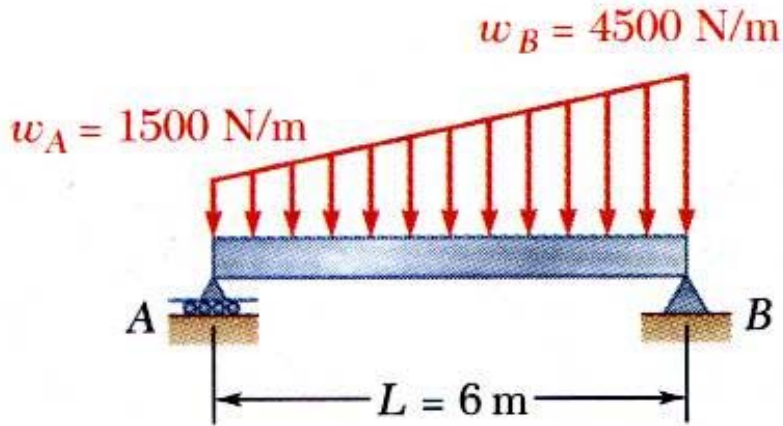
$$w_B = 4500 \text{ N/m} - 1500 \text{ N/m} = 3000 \text{ N/m}$$

$$x_A = 3 \text{ m}$$

$$x_B = \frac{2}{3}(6 \text{ m}) = 4 \text{ m}$$

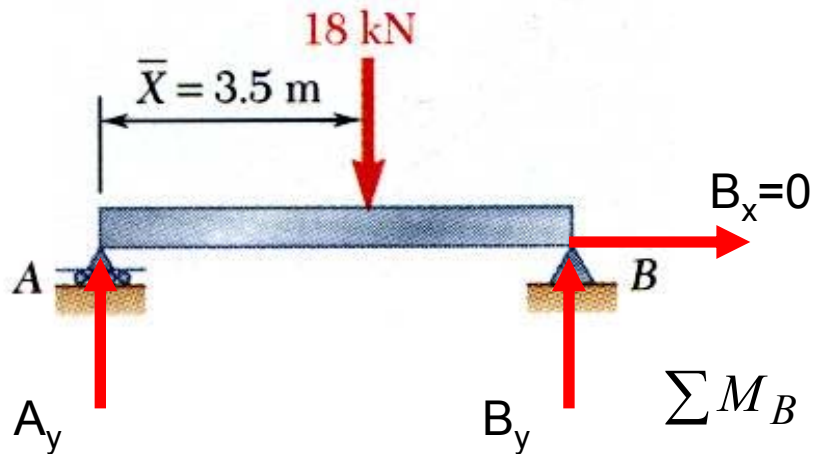
Eleman	Alan(kN)	x (m)	x*Alan (kN-m)
Dikdörtgen	9	3	27
Üçgen	9	4	36
Toplam	18.00		63.00
sentroid (x)	3.50 m		

- Tepki kuvvetleri kenarlara göre moment dengesinden hesaplanır.



$$\sum M_A = 0: B_y(6 \text{ m}) - (18 \text{ kN})(3.5 \text{ m}) = 0$$

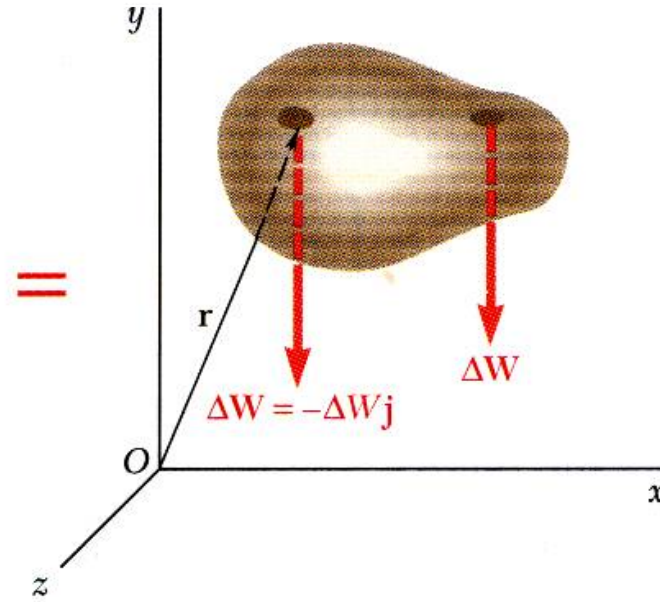
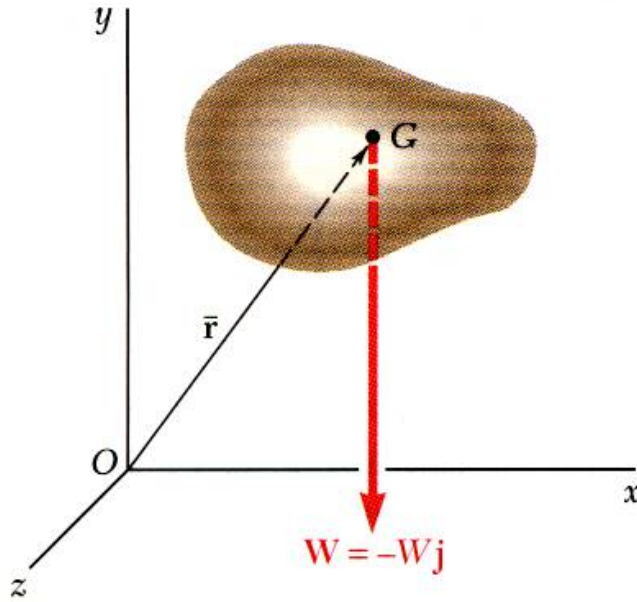
$$B_y = 10.5 \text{ kN}$$



$$\sum M_B = 0: -A_y(6 \text{ m}) + (18 \text{ kN})(6 \text{ m} - 3.5 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = 7.5 \text{ kN}$$

Üç Boyutlu Cisimlerin Ağırlık Merkezi: Hacimin Sentroidi



- Ağırlık merkezi: G

$$-W\vec{j} = \sum(-\Delta W\vec{j})$$

$$W = \int dW$$

$$\vec{r}_G \times (-W\vec{j}) = \sum[\vec{r} \times (-\Delta W\vec{j})]$$

$$\vec{r}_G W \times (-\vec{j}) = \left(\sum \vec{r} \Delta W\right) \times (-\vec{j})$$

$$\vec{r}_G W = \int \vec{r} dW$$

- Kartezyen eksenlere göre momentler:

$$\bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{y}W = \int y dW$$

$$\bar{z}W = \int z dW$$

- Homojen cisimler için:

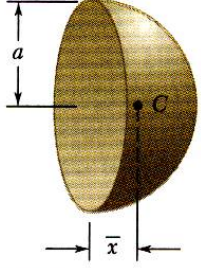
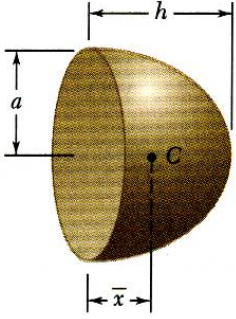
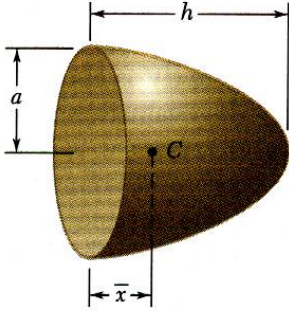
$$W = \gamma V \quad \text{ve} \quad dW = \gamma dV$$

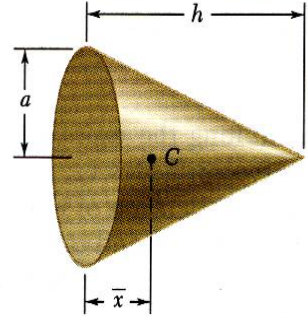
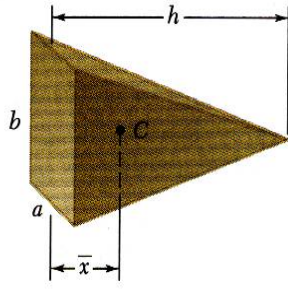
$$\bar{x}V = \int x dV$$

$$\bar{y}V = \int y dV$$

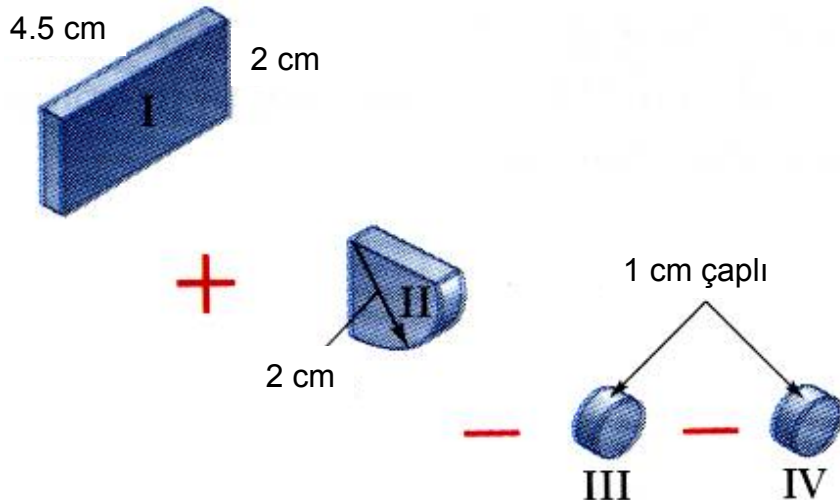
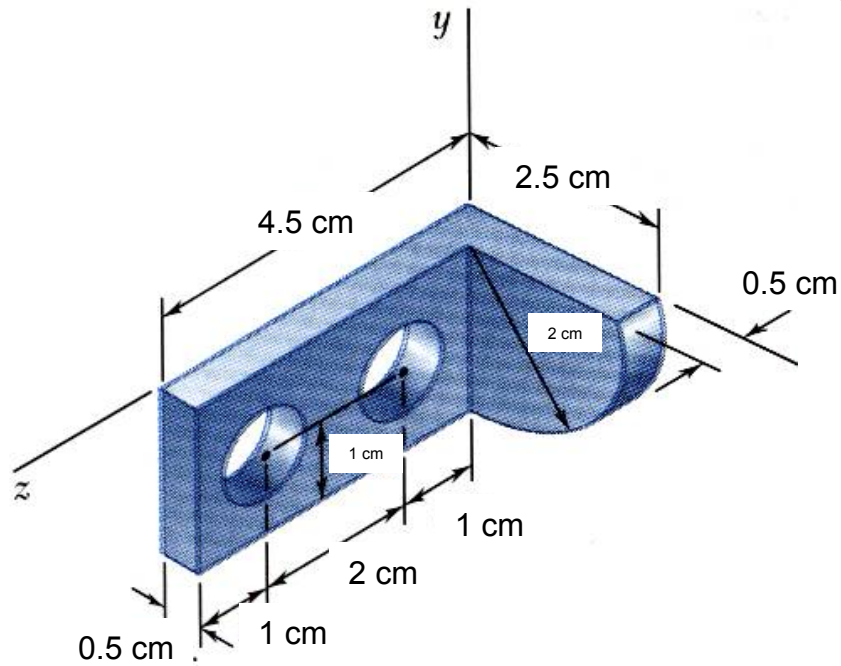
$$\bar{z}V = \int z dV$$

Belirli Üç Boyutlu Şekillerin Sentroidi

Şekil		$\bar{x}$	Hacim
Yarım küre		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Dönel yarım elipsoid		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Dönel paraboloid		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$

Koni		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Piramit		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

Üç Boyutlu Bileşik Cisimler



- Ağırlık merkezine etkiyen bileşke ağırlık kuvvetinin eksenlere göre momenti, her elemanın ağırlığının eksenlere göre momentlerinin toplamına eşittir.

$$\bar{X} \sum W = \sum \bar{x} W$$

$$\bar{Y} \sum W = \sum \bar{y} W$$

$$\bar{Z} \sum W = \sum \bar{z} W$$

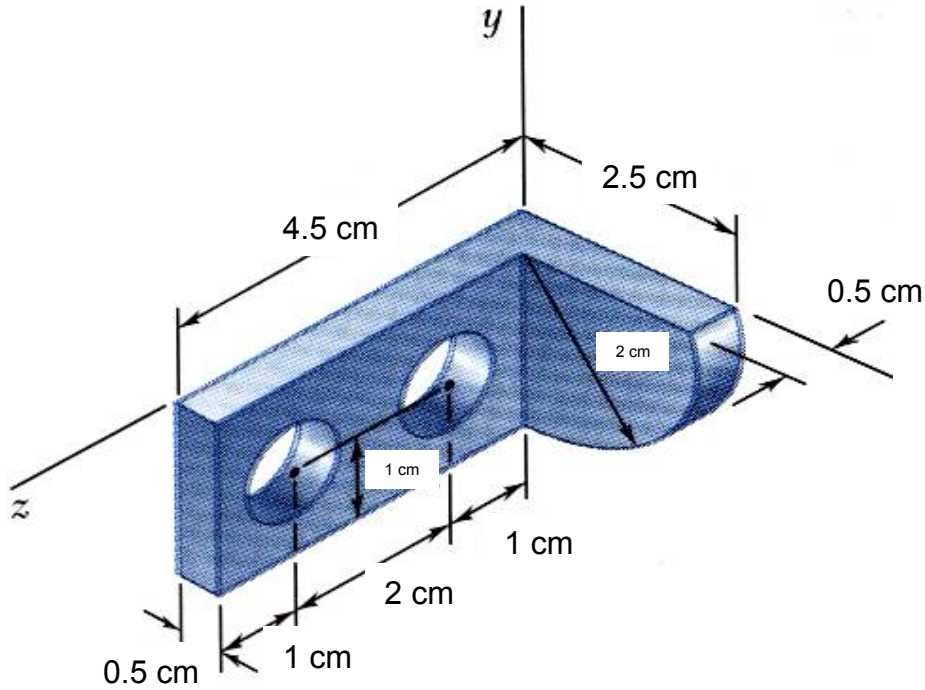
- Homojen cisimler için, $W = \gamma V$ ve $dW = \gamma dV$

$$\bar{X} \sum V = \sum \bar{x} V$$

$$\bar{Y} \sum V = \sum \bar{y} V$$

$$\bar{Z} \sum V = \sum \bar{z} V$$

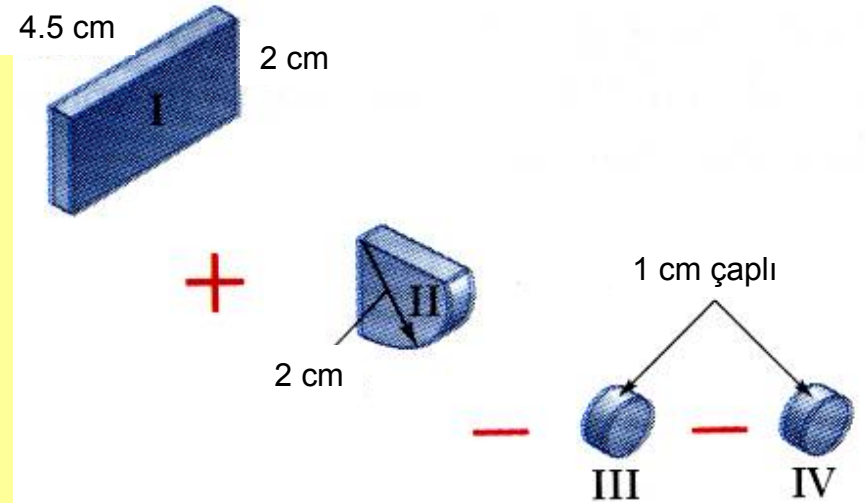
Örnek 5.12



Çelik makine elemanının ağırlık merkezini belirleyiniz. Her deliğin çapı 1 cm dir.

Çözüm:

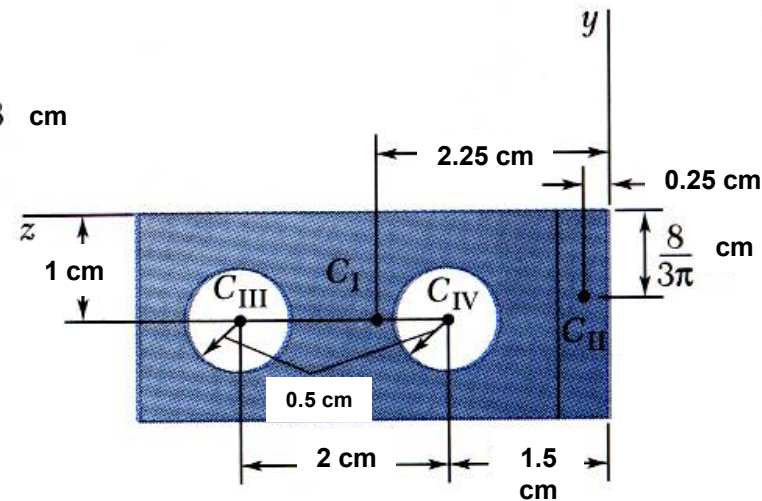
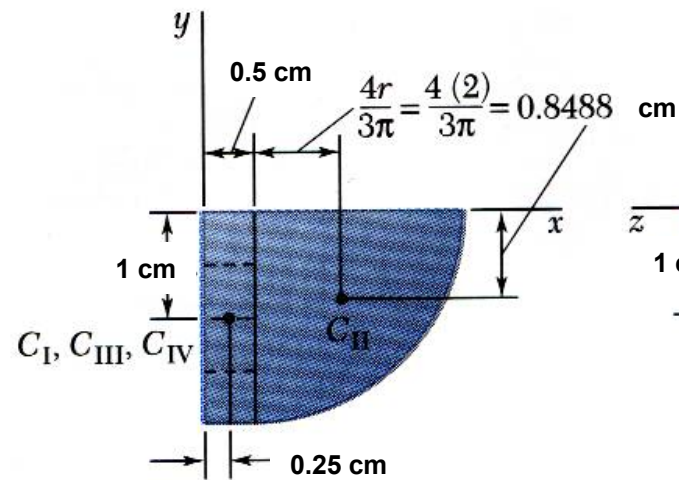
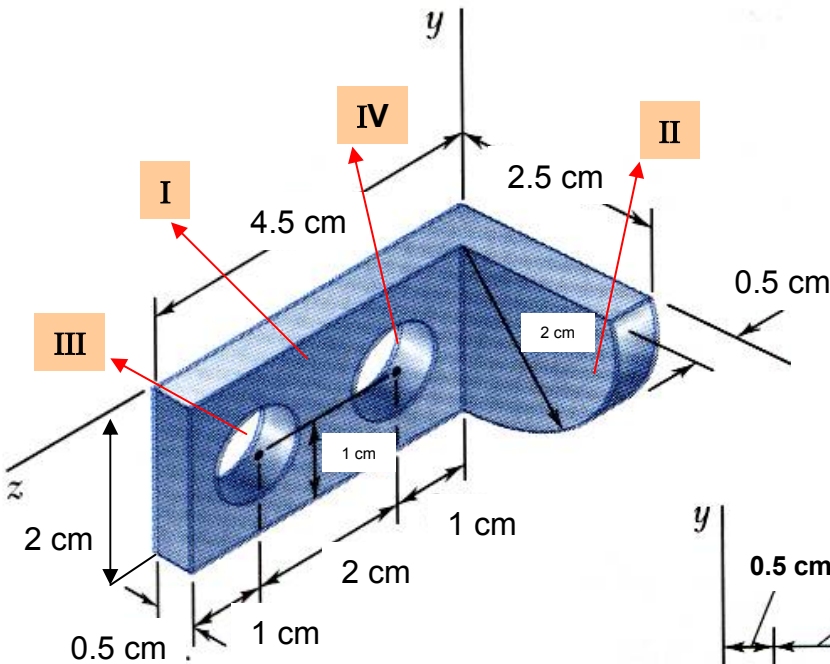
- Makine elemanını, bir dikdörtgen, bir çeyrek daire ve 1 cm çaplı iki delik olarak oluşturabiliriz.



$$\bar{X} \sum V = \sum \bar{x} V$$

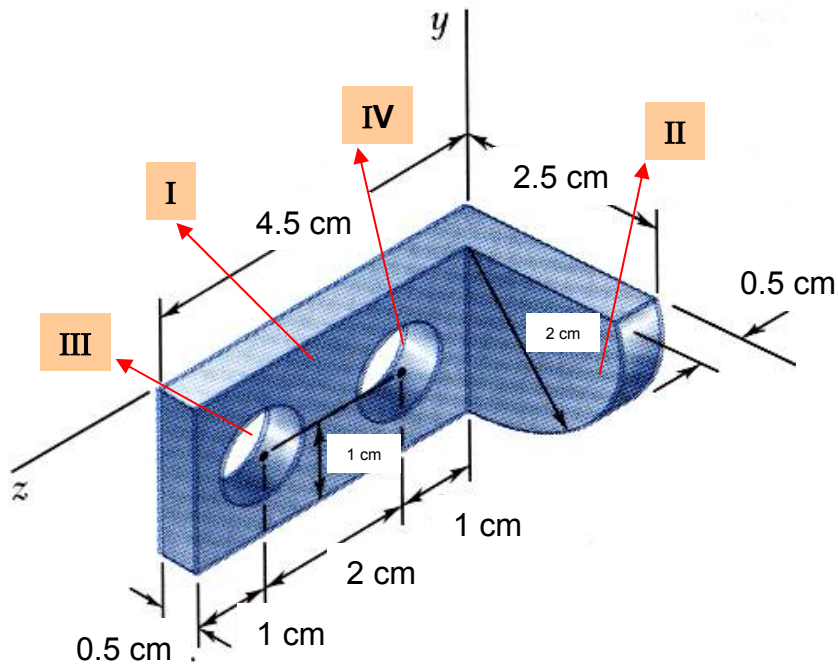
$$\bar{Y} \sum V = \sum \bar{y} V$$

$$\bar{Z} \sum V = \sum \bar{z} V$$



	$V, \text{ cm}^3$	$\bar{x}, \text{ cm}$	$\bar{y}, \text{ cm}$	$\bar{z}, \text{ cm}$	$\bar{x}V, \text{ cm}^4$	$\bar{y}V, \text{ cm}^4$	$\bar{z}V, \text{ cm}^4$
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma \bar{x}V = 3.048$	$\Sigma \bar{y}V = -5.047$	$\Sigma \bar{z}V = 8.555$

	$V, \text{ cm}^3$	$\bar{x}, \text{ cm}$	$\bar{y}, \text{ cm}$	$\bar{z}, \text{ cm}$	$\bar{x}V, \text{ cm}^4$	$\bar{y}V, \text{ cm}^4$	$\bar{z}V, \text{ cm}^4$
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma \bar{x}V = 3.048$	$\Sigma \bar{y}V = -5.047$	$\Sigma \bar{z}V = 8.555$



$$\bar{X} = \sum \bar{x}V / \sum V = (3.08 \text{ cm}^4) / (5.286 \text{ cm}^3)$$

$$\bar{X} = 0.577 \text{ cm.}$$

$$\bar{Y} = \sum \bar{y}V / \sum V = (-5.047 \text{ cm}^4) / (5.286 \text{ cm}^3)$$

$$\bar{Y} = 0.577 \text{ cm.}$$

$$\bar{Z} = \sum \bar{z}V / \sum V = (1.618 \text{ cm}^4) / (5.286 \text{ cm}^3)$$

$$\bar{Z} = 0.577 \text{ cm.}$$

Sıvı Altındaki Yüzeylere Gelen Kuvvetler

Durağan bir sıvı içinde yer alan bir cisim üzerinde sıvının ağırlığı nedeniyle basınç oluşur. Bu basınç hidrostatik basınç olarak tanımlanır.

$$P_A = P_0 + (\gamma \cdot h) \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

P_A : mutlak basınç

P_0 : referans basınç

γ : sıvının özgül ağırlığı

h : sıvı içindeki derinlik

Basınç derinliğin bir fonksiyonudur ve derinlikle lineer olarak değişir.

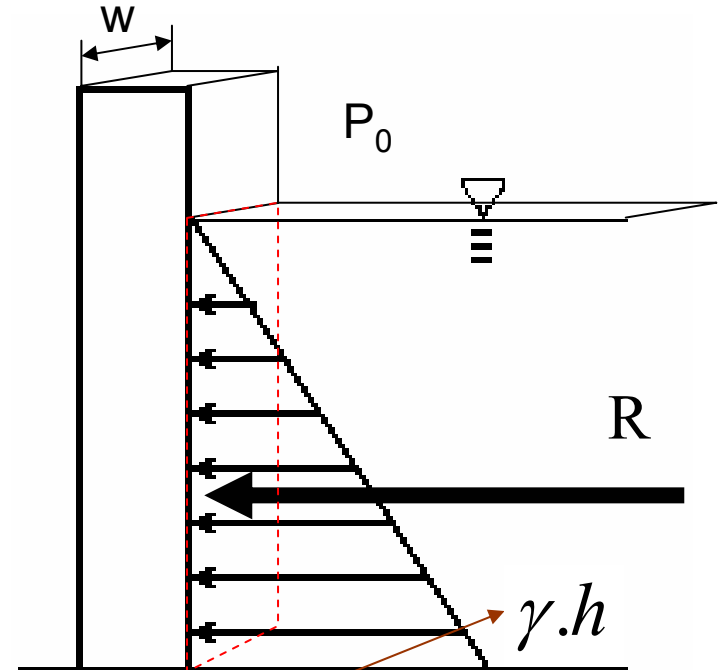
Kuvvet hesaplanırken dikdörtgen alan için düşünülür.

$$F(y) = P \cdot A \quad [N]$$

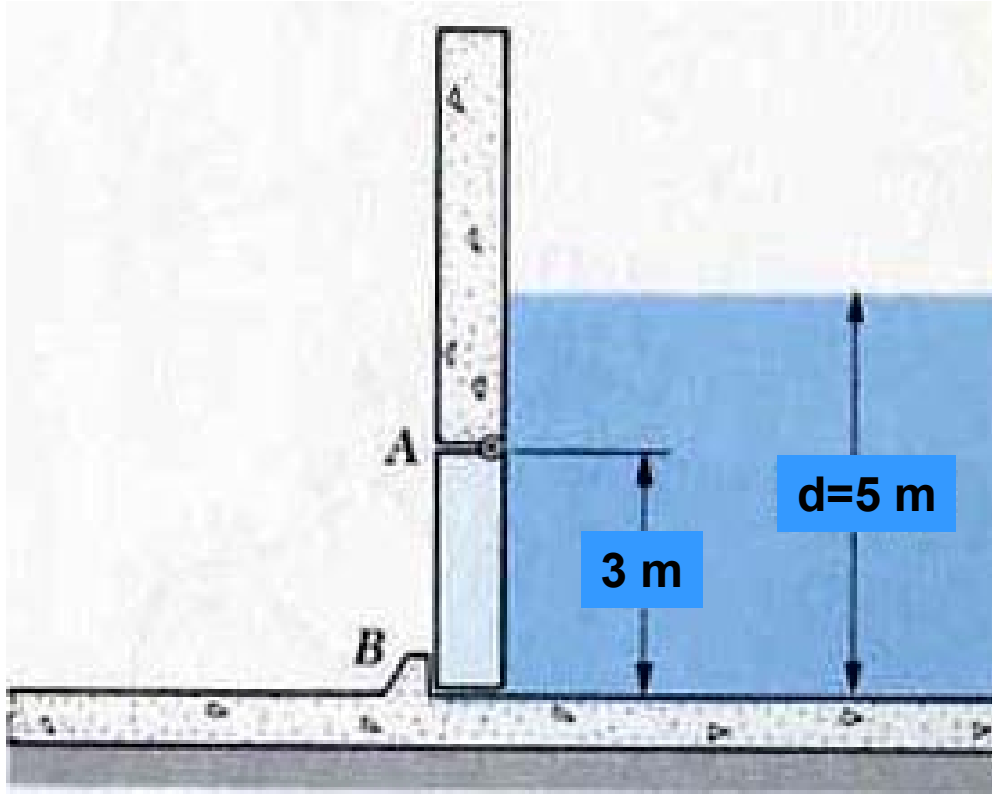
Bileşke kuvvet:

$$R = \frac{1}{2} [(\gamma \cdot h) \cdot w] \cdot h$$

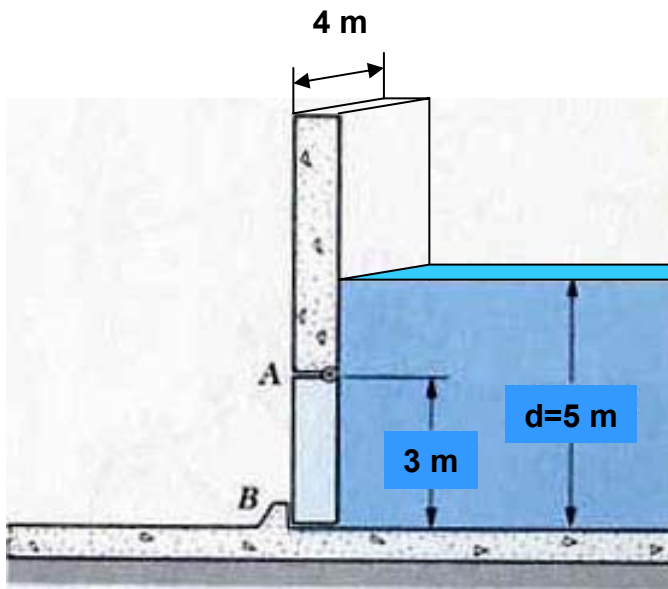
Genişlik için kuvvet



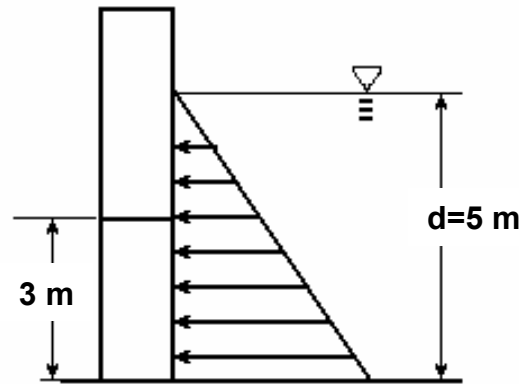
Örnek



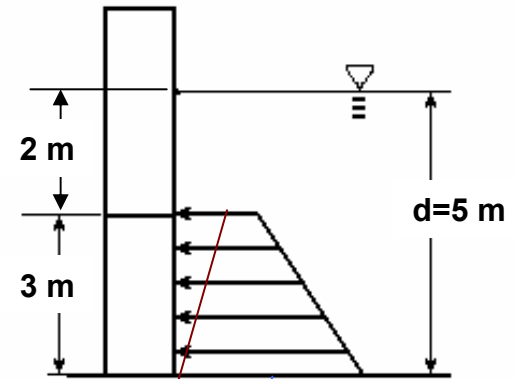
3mx4m en ve boyundaki kapak şekildeki gibi su duvarının altına yerleştirilmiştir. Su tarafından kapağa uygulanan kuvvetin şiddetini ve uygulama noktasını bulunuz. ($\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$)



Su tarafından duvara
uygulanan kuvvet



Su tarafından kapağa
uygulanan kuvvet



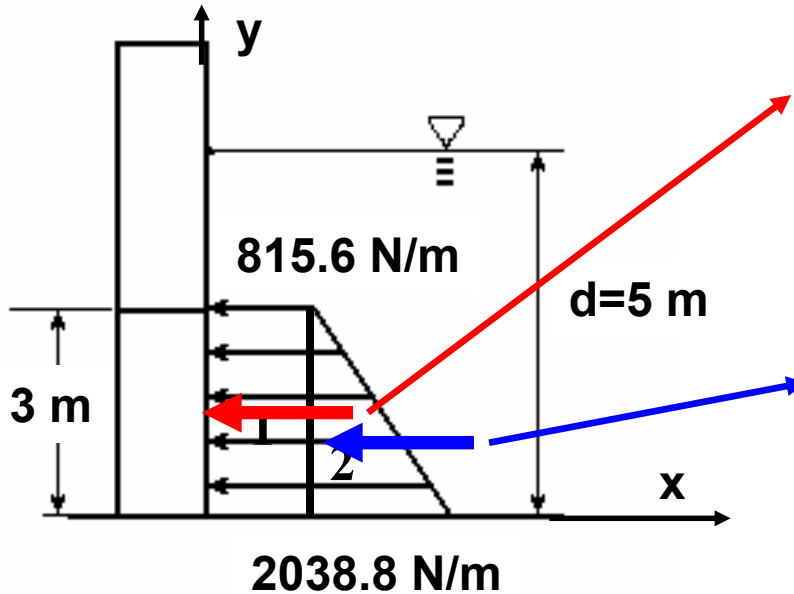
$$P_{2m} = \gamma d = (1000 \text{ kg} / \text{m}^3)(2 \text{ m}) = 2000 \text{ kg} / \text{m}^2 = 203.9 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$F_{2m} = P_w = (203.9 \text{ N} / \text{m}^2)(4 \text{ m}) = 815.6 \text{ N} / \text{m}$$

$$P_{5m} = \gamma d = (1000 \text{ kg} / \text{m}^3)(5 \text{ m}) = 509.7 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$F_{5m} = P_w = (509.7 \text{ N} / \text{m}^2)(4 \text{ m}) = 2038.8 \text{ N} / \text{m}$$

Bileşke kuvvet



$$F_1 = (815.6 \text{ N/m})(3 \text{ m}) = 2446.8 \text{ N}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(3 \text{ m}) = 1.5 \text{ m}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}([2038.8 - 815.6] \text{ N/m})(3 \text{ m}) = 1834.8 \text{ N}$$

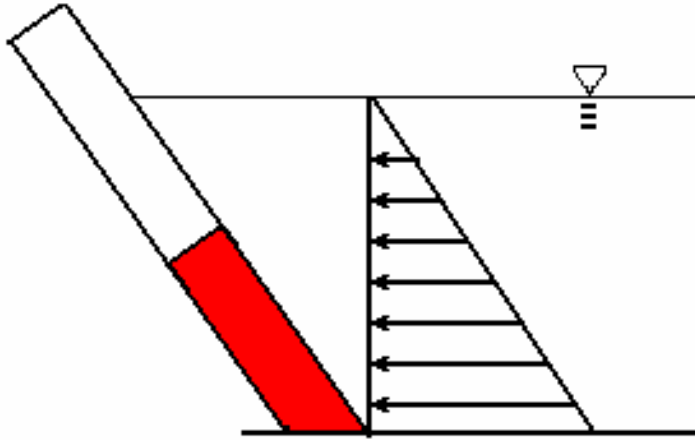
$$y_2 = \frac{1}{3}(3 \text{ m}) = 1 \text{ m}$$

$$\bar{X} \sum F = \sum \bar{x} F$$

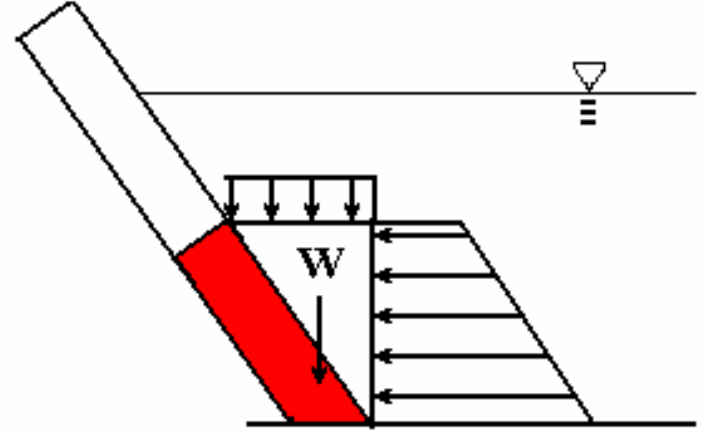
ALAN	KUVVET	x	x.KUVVET
Dikdörtgen	2446.8	1.5	3670.2
Üçgen	1834.8	1	1834.8
Toplam	4281.60		5505.00
sentroid (x)	1.29 m		

Toplam kuvvet 4281.6 N 'dur ve tabandan 1.29 m yukarıdadır.

Yüzey belirli bir açığa sahipse kuvvetin bulunması:

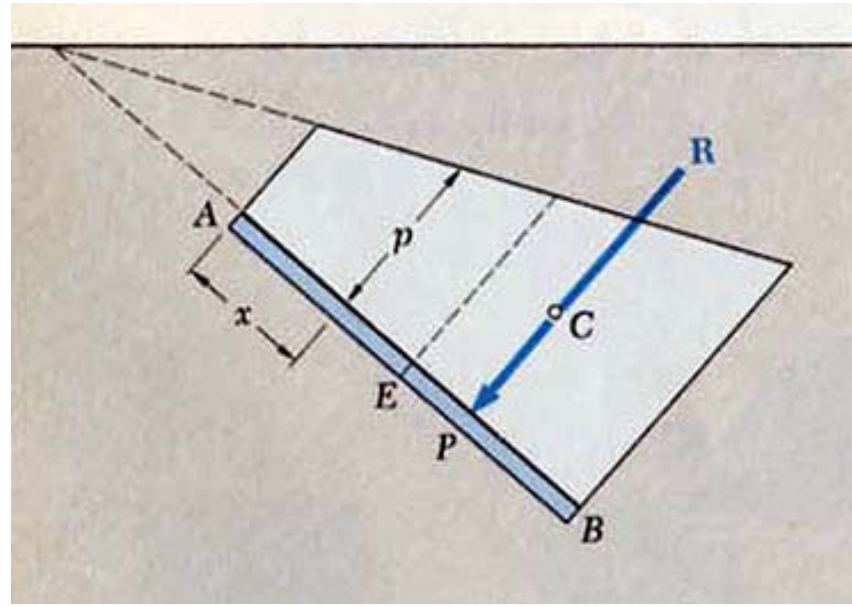


S_{CD}



Basıncın oluşturduğu kuvvete ilave olarak üstte kalan sıvı ağırlığı da düşünölmelidir.

Sıvı ağırlığı dışındaki kuvvet dağılımı şu şekildedir:



**Su kütlesi için
SCD**

Kullanılan yüzey lineer olmayan bir yüzeyse:

