

Seventh Edition

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

Ders Notu:

Hayri ACAR

İstanbul Teknik Üniveristesi

Tel: 285 31 46 / 116

E-mail: acarh@itu.edu.tr

Web: <http://atlas.cc.itu.edu.tr/~acarh>

4. Rijit Cisimlerin Dengesi



- Rijit cisimler statik olarak dengede ise, dış kuvvetler ve momentler dengededir ve cisime herhangi bir öteleme ve dönme hareketi vermezler.
- Statik denge halindeki cisimler için gerekli olan denklem:

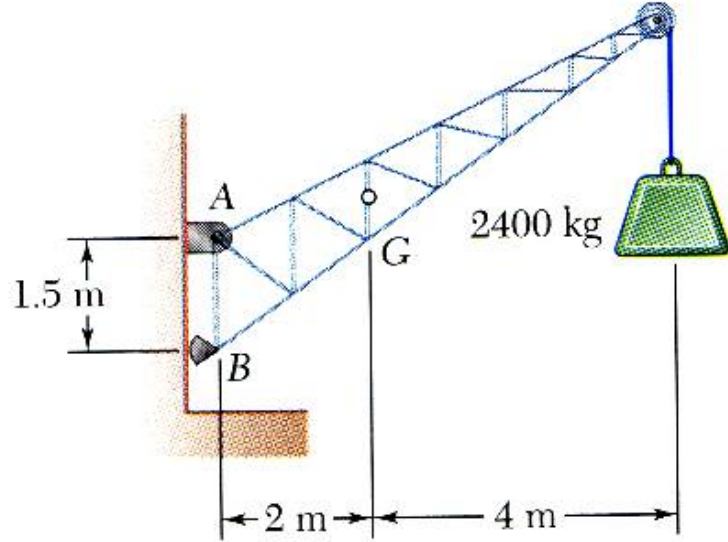
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

- Her kuvvet ve moment dik bileşenlerine ayrılırsa 6 skaler denklem oluşur:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

Serbest Cisim Diyagramı

Statik denge analizinde ilk işlem cisime etki eden tüm kuvvetlerin *Serbest Cisim Diyagramı* ile belirlenmesidir.

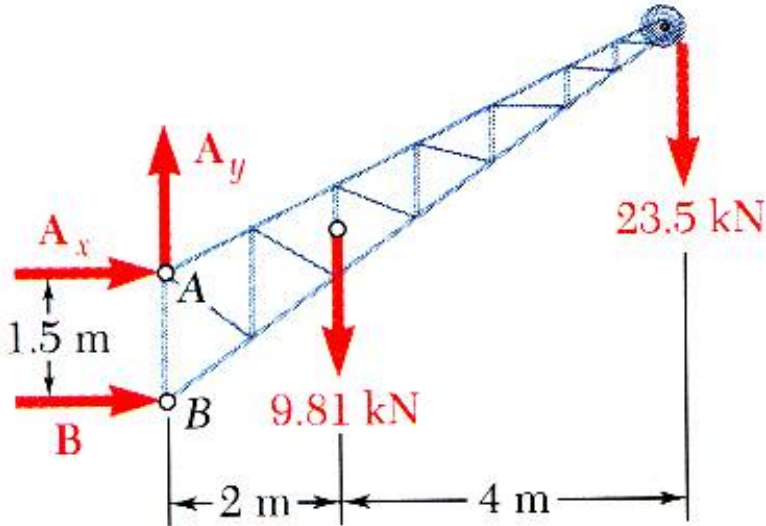


- İncelenecek eleman seçilir ve tüm elemanlardan izole edilir.

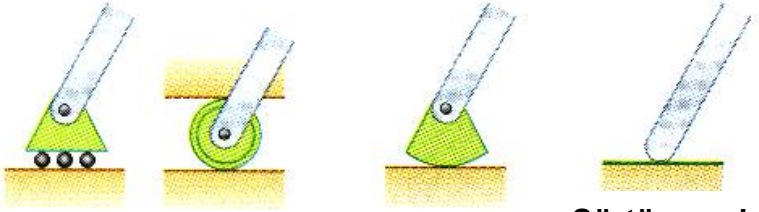
- Cisimin ağırlığı da dahil olmak üzere tüm dış kuvvetlerin şiddeti, yönü ve uygulama noktası belirlenir.

- Bilinmeyen kuvvetlerin uygulama noktası belirlenir yönü tahmin edilir. Bu kuvvetler genelde, cisimin hareketini engelleyen, bağlantı noktalarından gelen tepki kuvvetleridir.

- Kuvvetlerin momentini hesaplamak için kullanılacak gerekli boyutlandırma yapılır.



İki Boyutlu Yapılarda Bağlantı ve Destek Noktalarındaki Tepki Kuvvetleri



Kayıcı mafsal

Sürtünmesiz yüzey



Tesir çizgisi bilinen tek kuvvet

- Bilinen doğrultudaki tepki kuvvetleri

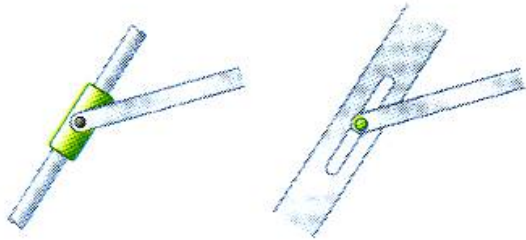


Kısa kablo

Pandül ayak

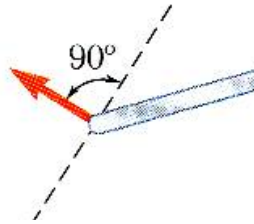


Tesir çizgisi bilinen tek kuvvet



Sürtünmesiz çubukta yüzük

Yarıktaki sürtünmesiz pim



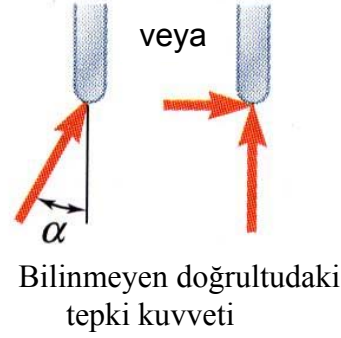
Tesir çizgisi bilinen tek kuvvet



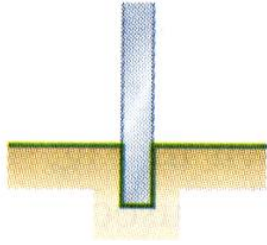
Mafsal



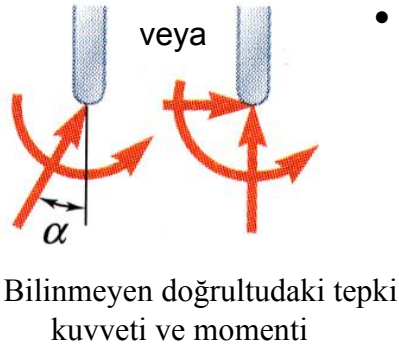
Pürüzlü yüzey



- Bilinmeyen doğrultudaki tepki kuvvetleri

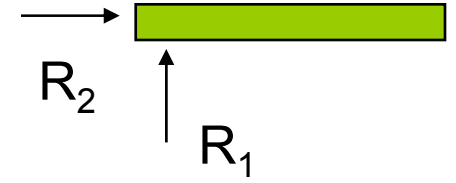
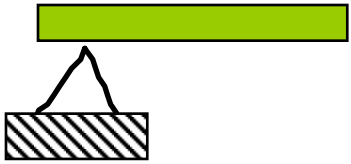


Ankastre mesnet

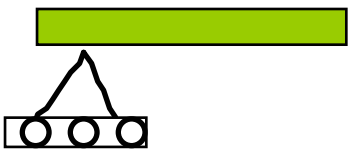


- Bilinmeyen doğrultudaki tepki kuvvetleri ve momenti

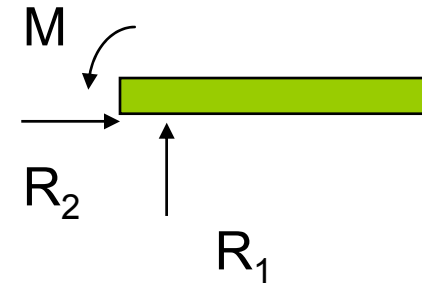
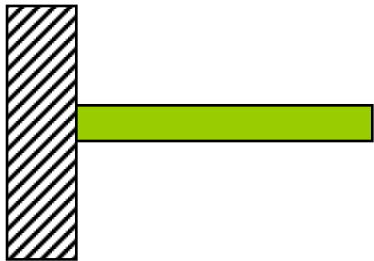
Mafsal



Kayıcı mafsal



Ankastre mesnet



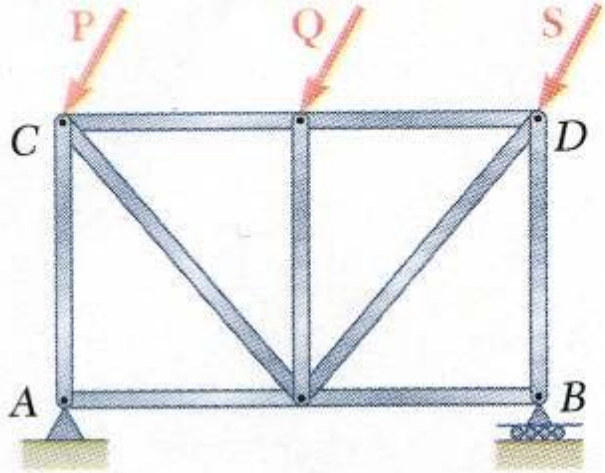
STATİK YÜKLER



DİNAMİK YÜKLER



İki Boyutlu Halde Rijit Cisim Dengesi



(a)

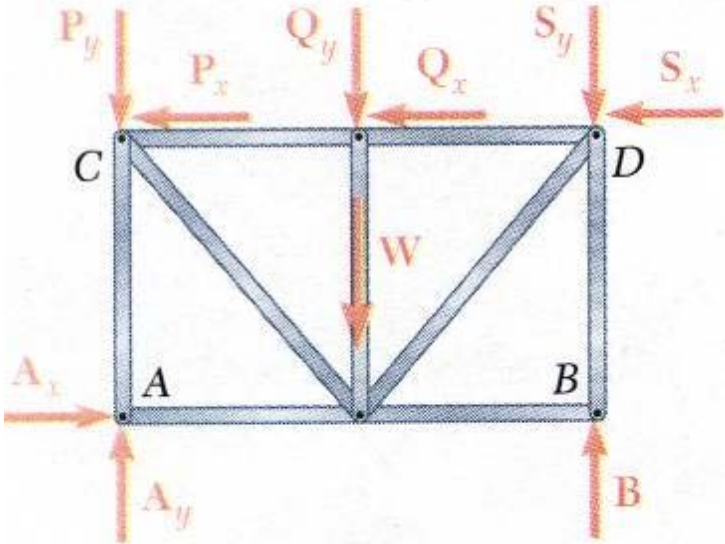
- İki boyutlu yapıya etkiyen tüm kuvvetler ve momentler için:

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

- Denge denklemi:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

A noktası yapının düzlemindeki her hangi bir noktadır.

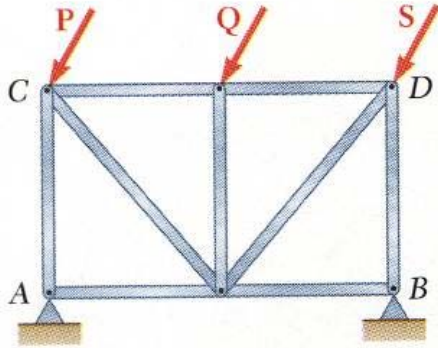


(b)

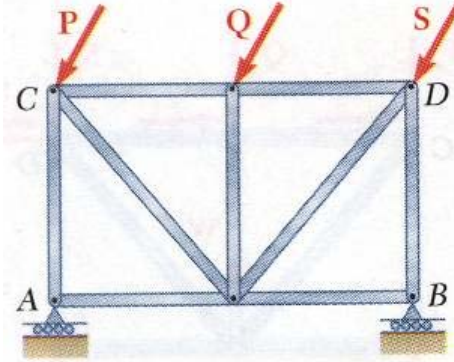
- Bu denklemler 3 bilinmeyen için kullanılabilir.
- Bu 3 denkleme ilave yapılamaz ama denklemler değiştirilebilir.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$

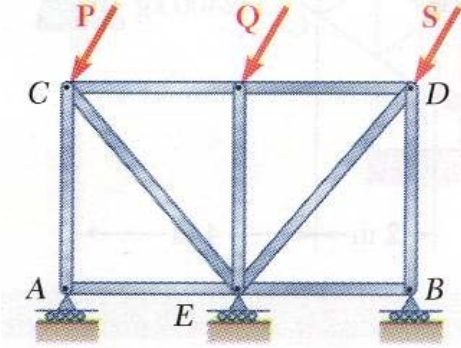
Statikçe Belirsizlik



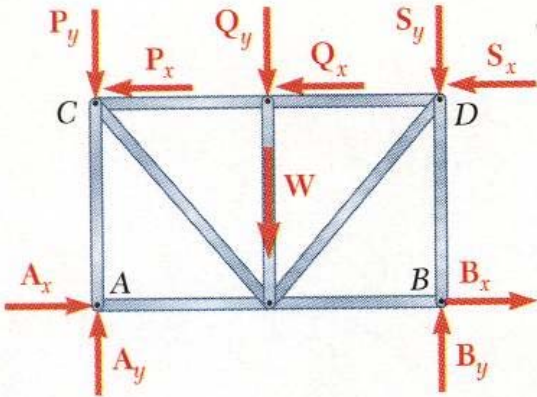
(a)



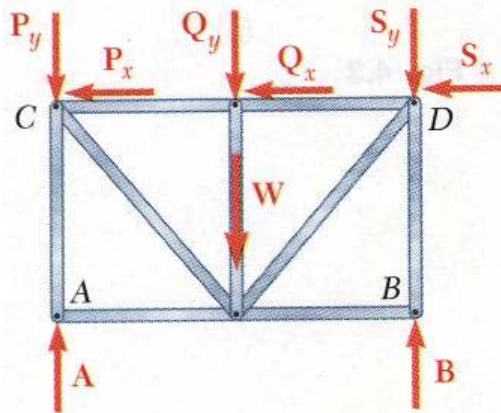
(a)



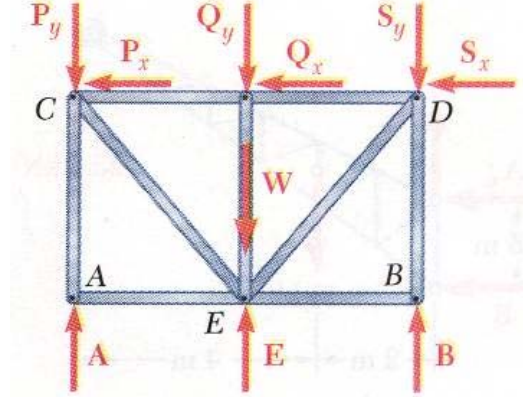
(a)



(b)



(b)



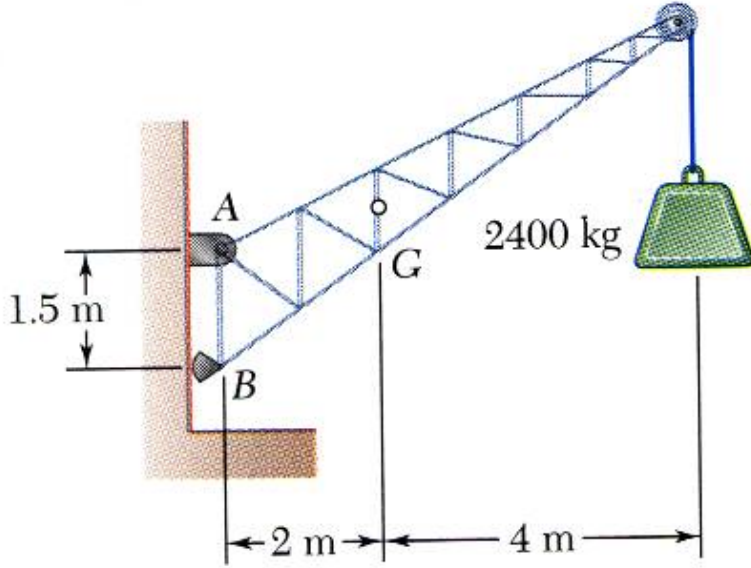
(b)

- Denklem sayısından fazla bilinmeyen varsa.

- Denklem sayısından az bilinmeyen varsa.

- Denklem sayısıyla eşit bilinmeyen var fakat yetersiz bağlantı varsa.

Örnek Problem 4.1

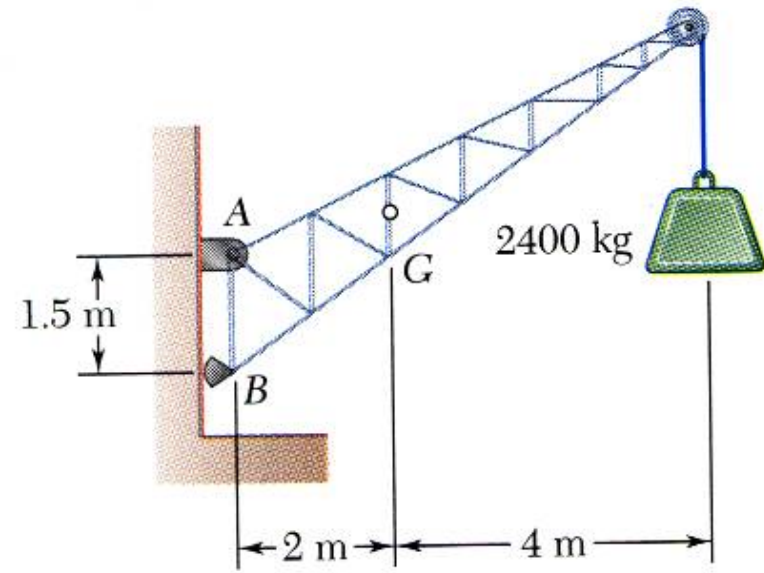


Sabit bir vinç 1000 kg kütleye sahiptir ve 2400 kg kütleli sandığı kaldırmakta kullanılmaktadır. Vinç duvara A noktasından mafsal ile ve B noktasından kayıcı mafsal ile sabitlenmiştir. Vincin ağırlık merkezi G noktasıdır.

A ve B noktasındaki tepki kuvvetlerini bulunuz.

Çözüm:

- Vincin Serbest Cisim Diyagramını çizilir.
- A noktasına göre moment denge denklemi kullanılarak B bağlantı noktasındaki tepki hesaplanır.
- Yatay ve düşey kuvvet dengesi denklemleri kullanılarak A bağlantı noktasındaki kuvvetler hesaplanır.
- B noktasına göre moment denge denklemi kullanılarak yukarıda bulunan sonuçların sağlaması yapılır.

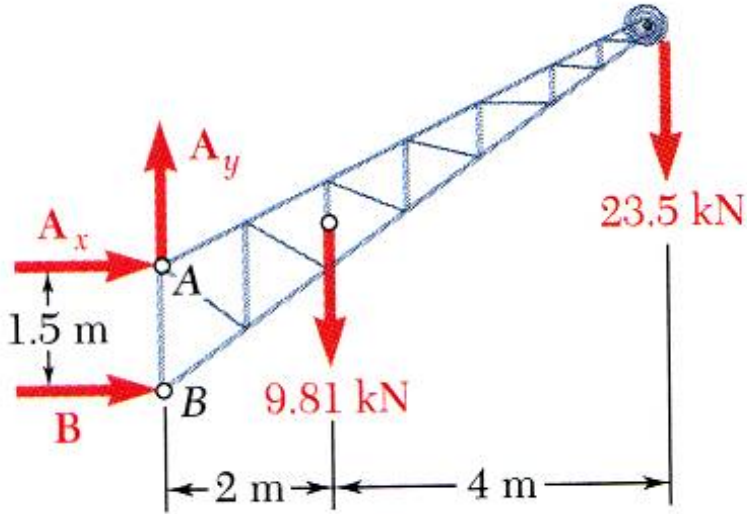


- A noktasına göre moment denge denklemi kullanılarak B bağlantı noktasındaki tepki hesaplanır.

$$\sum M_A = 0: \quad + B(1.5\text{m}) - 9.81\text{ kN}(2\text{m}) - 23.5\text{ kN}(6\text{m}) = 0$$

$$B = +107.1\text{ kN}$$

- Yatay ve düşey kuvvet dengesi denklemleri kullanılarak A bağlantı noktasındaki kuvvetler hesaplanır.



$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

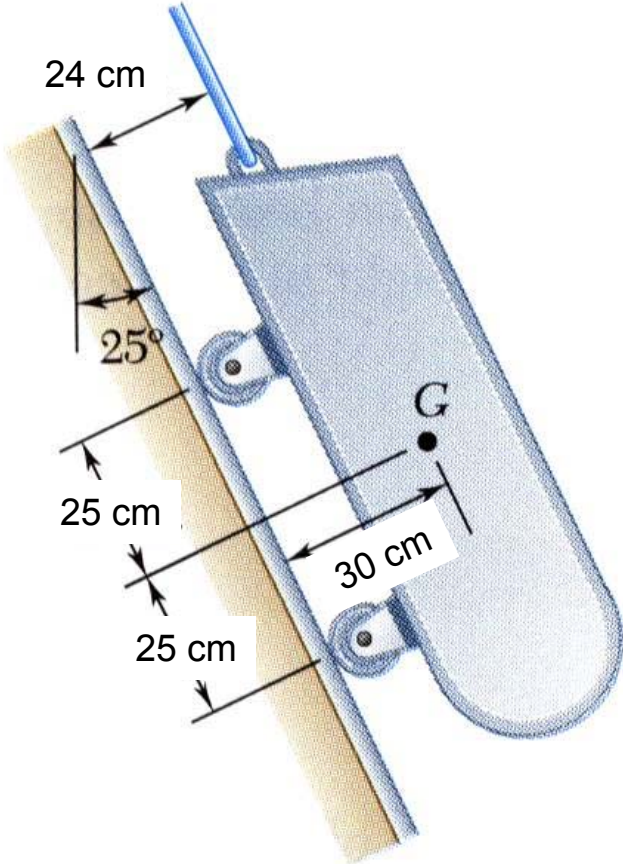
$$A_x = -107.1\text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 9.81\text{ kN} - 23.5\text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33.3\text{ kN}$$

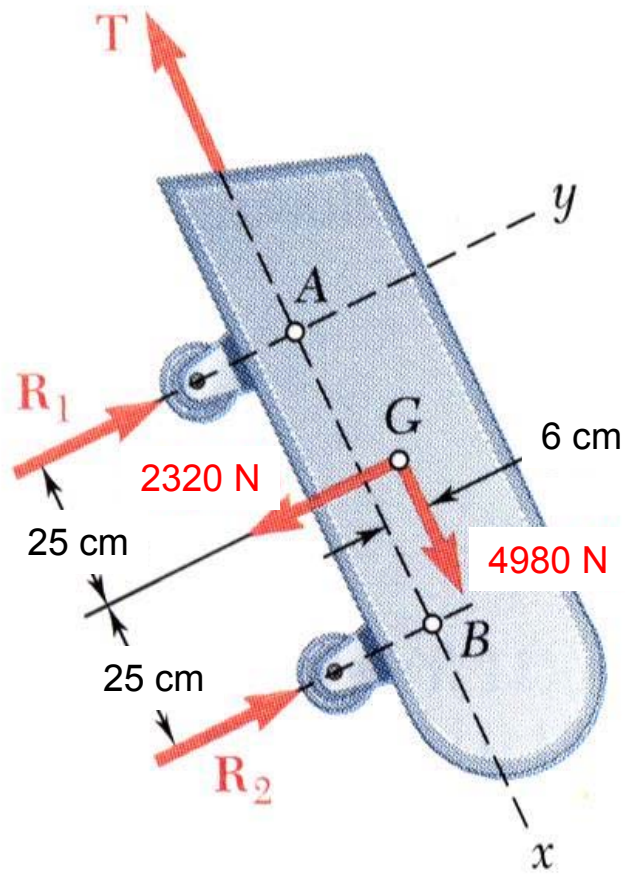
- Serbest Cisim Diyagramı

Örnek Problem 4.3



Bir yükleme vagonu ray üzerinde, bir halat yardımı ile, dengededir. Vagonun ağırlığı yüküyle birlikte 5500 N dur ve G noktasına uygulanmaktadır.

Halattaki kuvveti ve her tekerlekteki tepki kuvvetini bulunuz.



- Tekerleklerdeki tepki kuvvetleri:

$$\sum M_A = 0: \quad -(2320 \text{ N})25\text{cm} - (4980 \text{ N})6\text{cm} + R_2(50\text{cm}) = 0$$

$$R_2 = 1758 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 0: \quad +(2320\text{N})25\text{cm} - (4980\text{N})6\text{cm} - R_1(50\text{cm}) = 0$$

$$R_1 = 562 \text{ N}$$

$$W_x = +(5500 \text{ N})\cos 25^\circ$$

$$= +4980 \text{ N}$$

$$W_y = -(5500 \text{ N})\sin 25^\circ$$

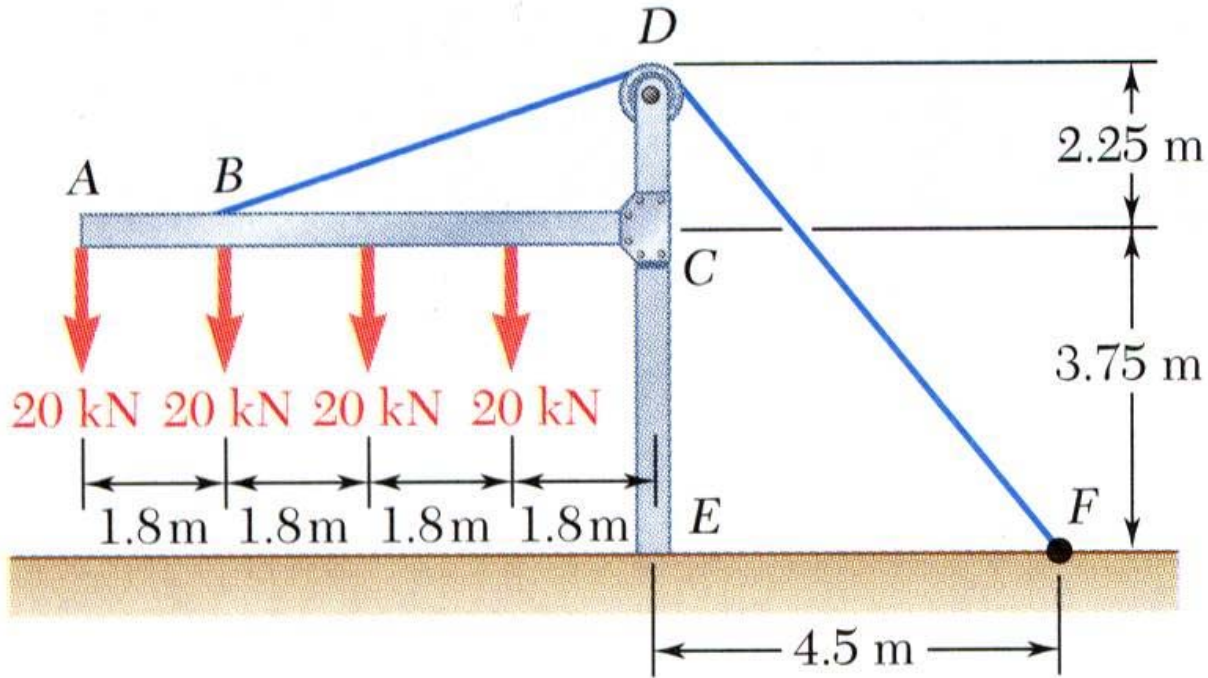
$$= -2320 \text{ N}$$

- Halattaki kuvvet:

$$\sum F_x = 0: \quad +4980 \text{ N} - T = 0$$

$$T = +4980 \text{ N}$$

Örnek Problem 4.4



Şekildeki yükleme elemanındaki kablodaki kuvvet 150 kN dur.

E noktasındaki tepki kuvvetini bulunuz.

- 3 denge denklemleri kullanılarak tepki kuvvetleri bulunabilir.

$$\sum F_x = 0: E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

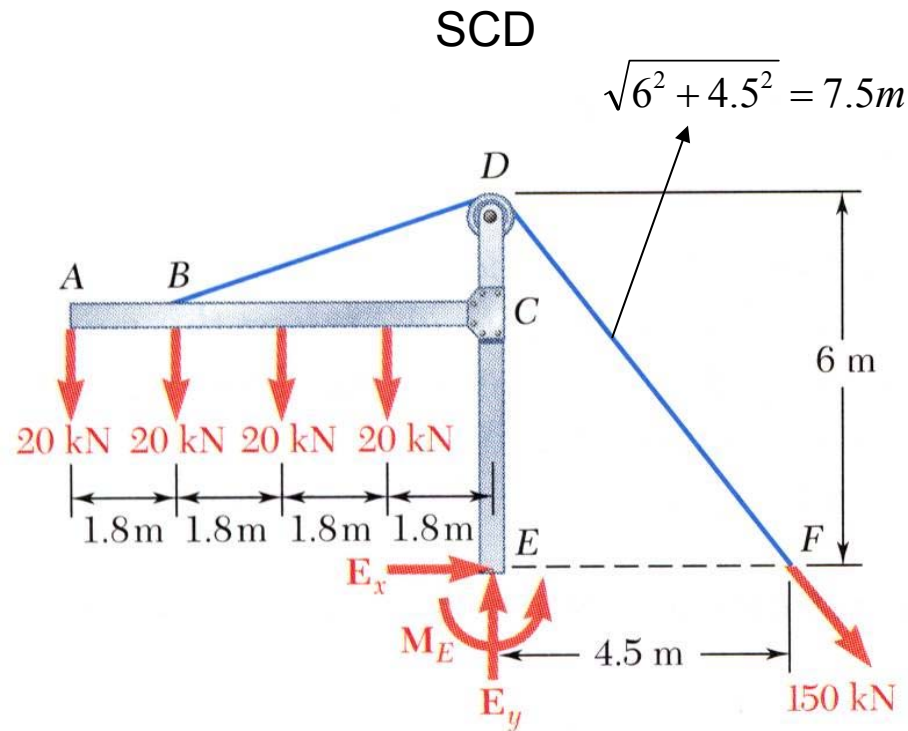
$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

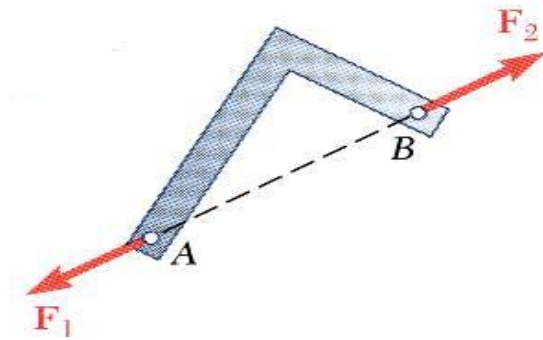
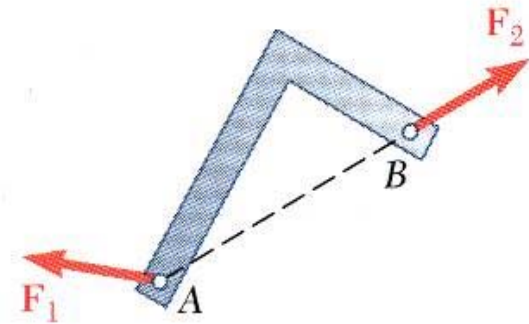
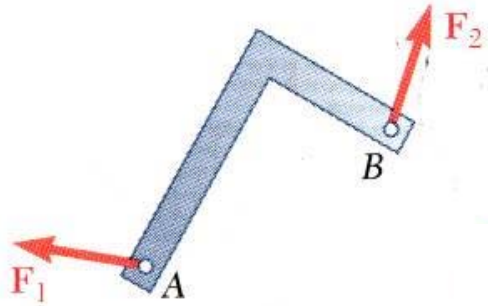
$$E_y = +200 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0: & +20 \text{ kN}(7.2 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(5.4 \text{ m}) \\ & + 20 \text{ kN}(3.6 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(1.8 \text{ m}) \\ & - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})4.5 \text{ m} + M_E = 0 \end{aligned}$$

$$M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

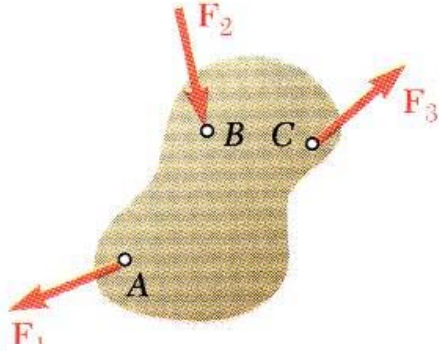


İki Kuvvet Etkisi Altında Statik Denge

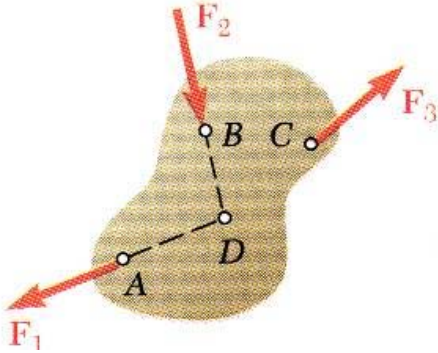


- F_1 ve F_2 gibi iki kuvvet etkisi altında bir plaka düşünelim.
- Statik denge için, A noktasına göre toplam momentin sıfır olması gerekir. F_2 kuvvetinin momenti sıfır olmalıdır. Bunun için F_2 kuvvetinin tesir çizgisi A noktasından geçmelidir.
- Benzer olarak F_1 kuvvetinin tesir çizgisi B noktasından geçmelidir.
- Kuvvet denge denklemi kullanılırsa, F_1 ve F_2 nin eşit şiddetli ve zıt yönlü olması gerektiği bulunur.

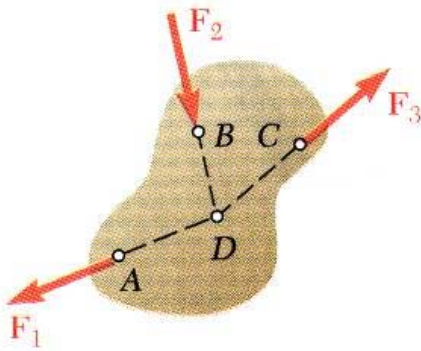
Üç Kuvvet Etkisi Altında Statik Denge



- Rijit cisime 3 kuvvet etki ettiğini düşünelim

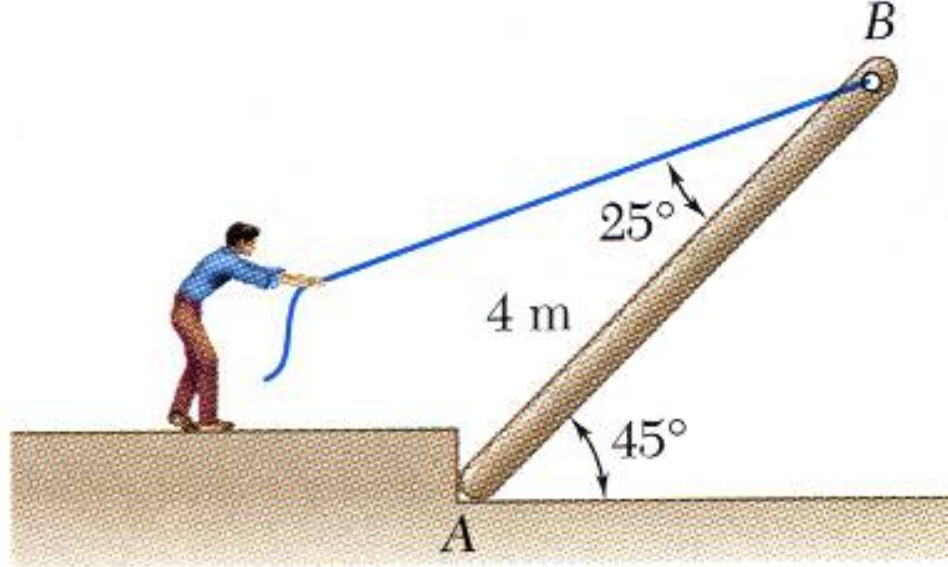


- İki kuvvetin, F_1 ve F_2 , kesiştiği nokta D olsun.



- Rijit cisim denge denklemi nedeniyle D noktasına göre toplam momentin sıfır olması gerekir. Bunun için F_3 kuvvetinin tesir çizgisinin D noktasından geçmesi gerekir.

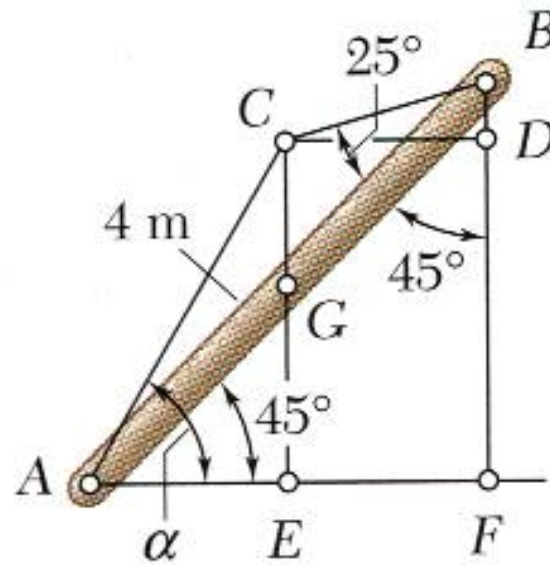
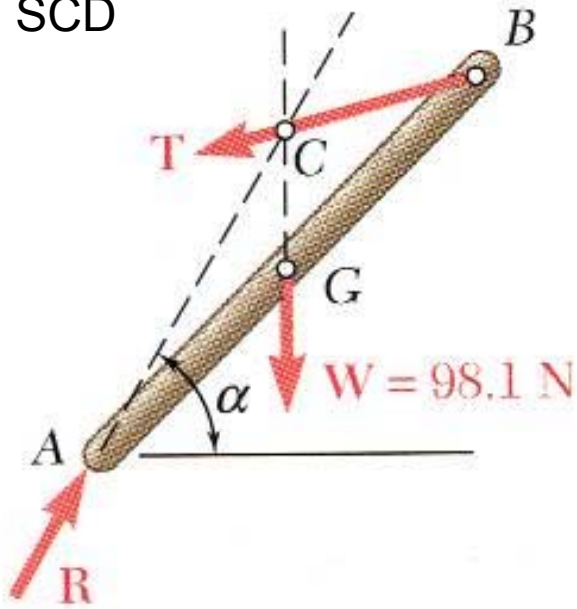
Örnek Problem 4.6



Bir adam 10 kg'lık 4 m uzunluğundaki kirişi bir halat ile kaldırmaktadır.

Halattaki kuvveti ve A noktasındaki tepki kuvvetini bulunuz.

SCD



$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE}$$

- A noktasındaki tepki kuvveti R nin yönü:

$$AF = AB \cos 45 = (4 \text{ m}) \cos 45 = 2.828 \text{ m} = BF$$

$$CD = AE = \frac{1}{2} AF = 1.414 \text{ m}$$

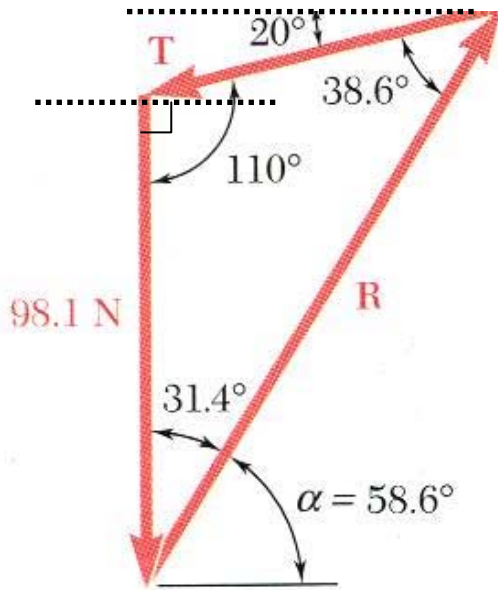
$$BD = CD \tan(90 - (45 + 20)) = (1.414 \text{ m}) \tan 20 = 0.515 \text{ m}$$

$$CE = BF - BD = (2.828 - 0.515) \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313}{1.414} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ$$

- A noktasındaki tepki kuvveti R nin şiddeti:



$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$T = 81.9 \text{ N}$$

$$R = 147.8 \text{ N}$$

Üç Boyutlu Halde Rijit Cisim Dengesi

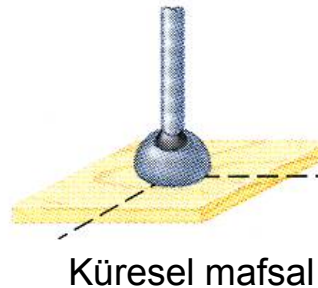
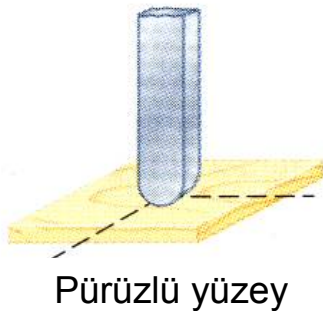
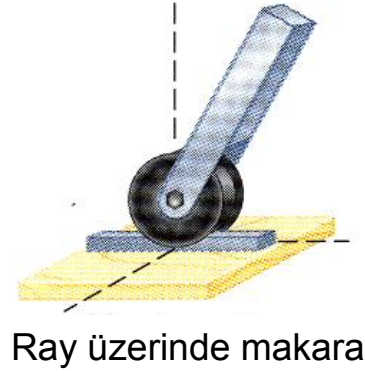
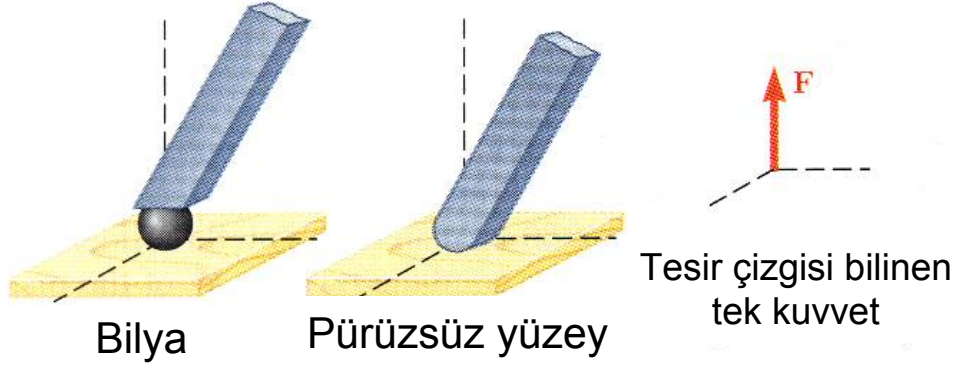
- Üç boyutlu halde 6 skaler denge denklemi:

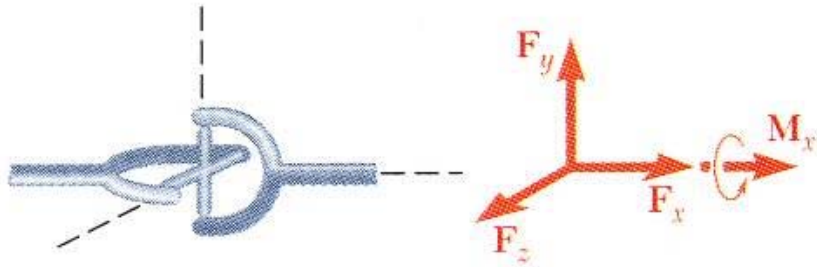
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

- Bu denklemler 6 bilinmeyen kuvvet ve moment için kullanılabilir.
- Vektörel haldeki denge denklemleri:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

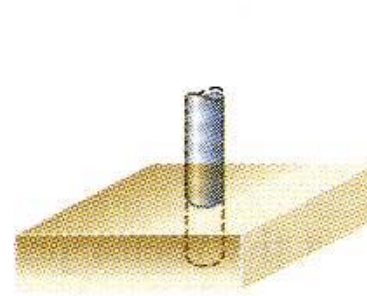
Üç Boyutlu Yapılarda Bağlantı ve Destek Noktalarındaki Tepki Kuvvetleri



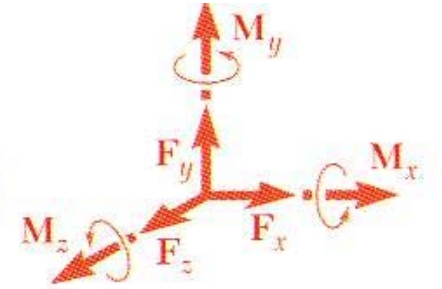


Üniversal mafs

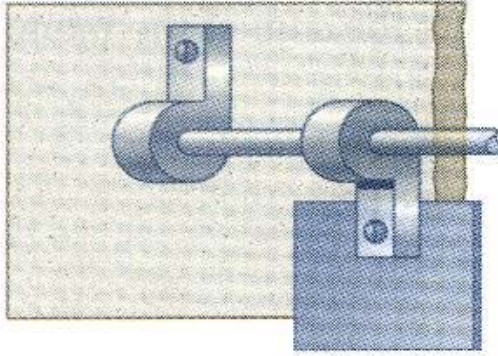
Üç kuvvet bileşeni ve bir kuvvet çifti



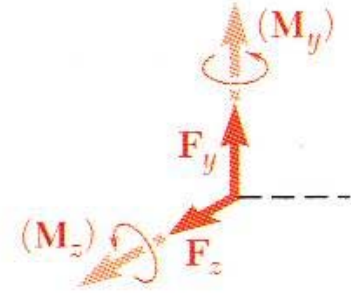
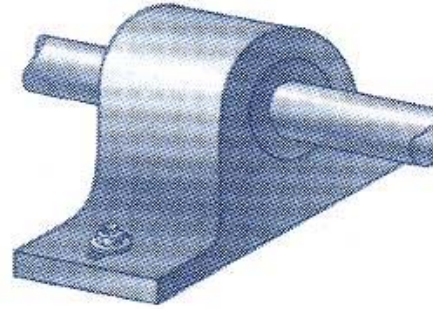
Ankaster mesnet



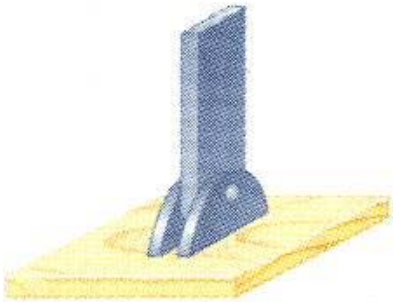
Üç kuvvet bileşeni ve üç kuvvet çifti



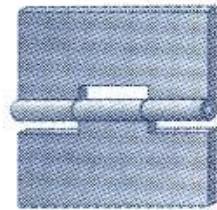
Yalnız radyal yükleri aktarabilen mafs ve yatak



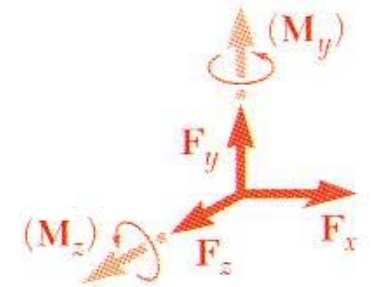
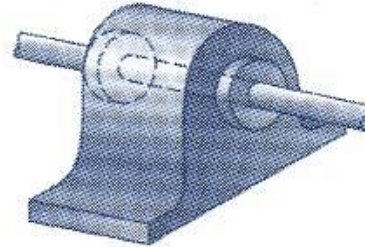
İki kuvvet bileşeni (ve iki kuvvet çifti)



Pim ve konsol

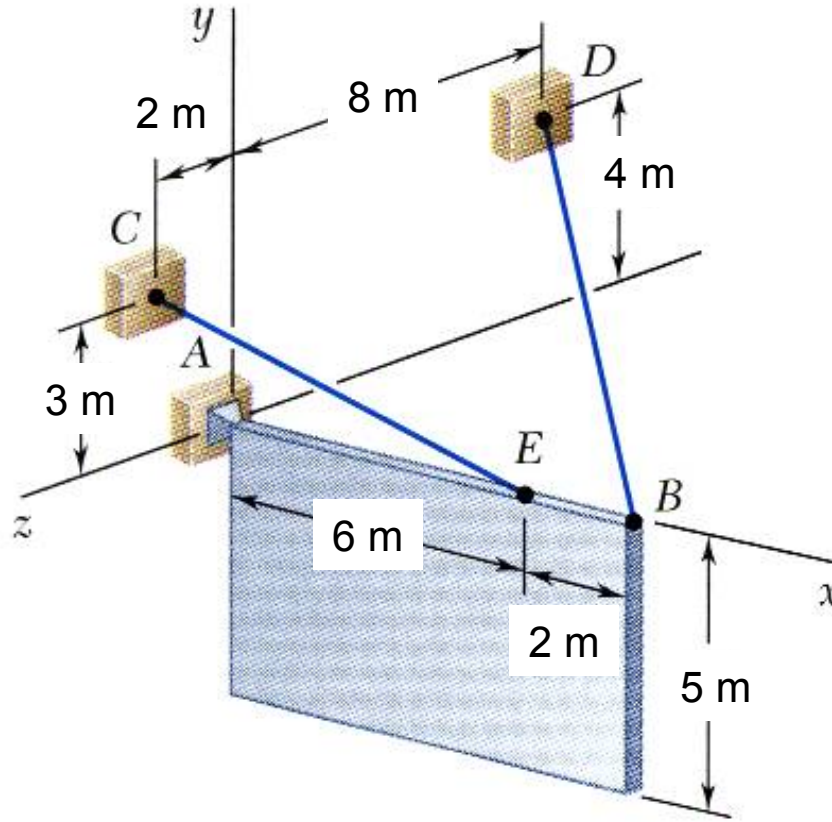


Eksenel ve radyal yükleri aktarabilen mafs ve yatak



Üç kuvvet bileşeni (ve iki kuvvet çifti)

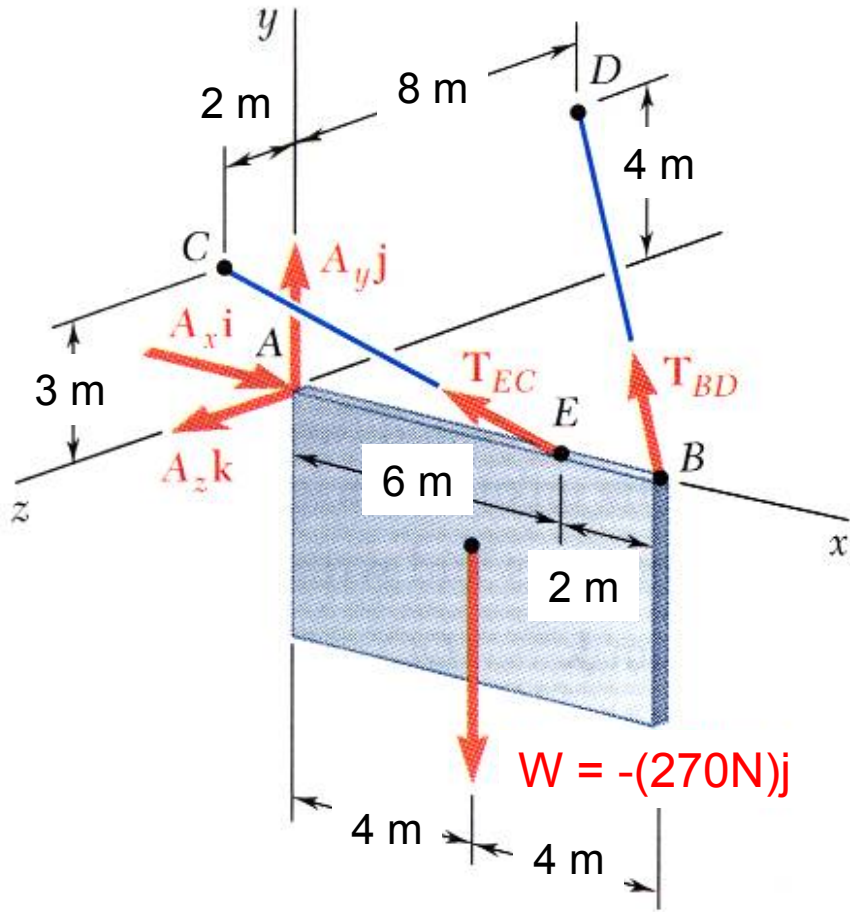
Örnek Problem 4.8



Üniform yoğunluğa sahip plaka 270 N ağırlığındadır ve A noktasından küresel mafsallarla duvara bağlanmıştır. Ayrıca duvara C ve D noktasından bağlanmış halatlarla desteklenmektedir.

Her kablodaki kuvvetleri bulunuz.

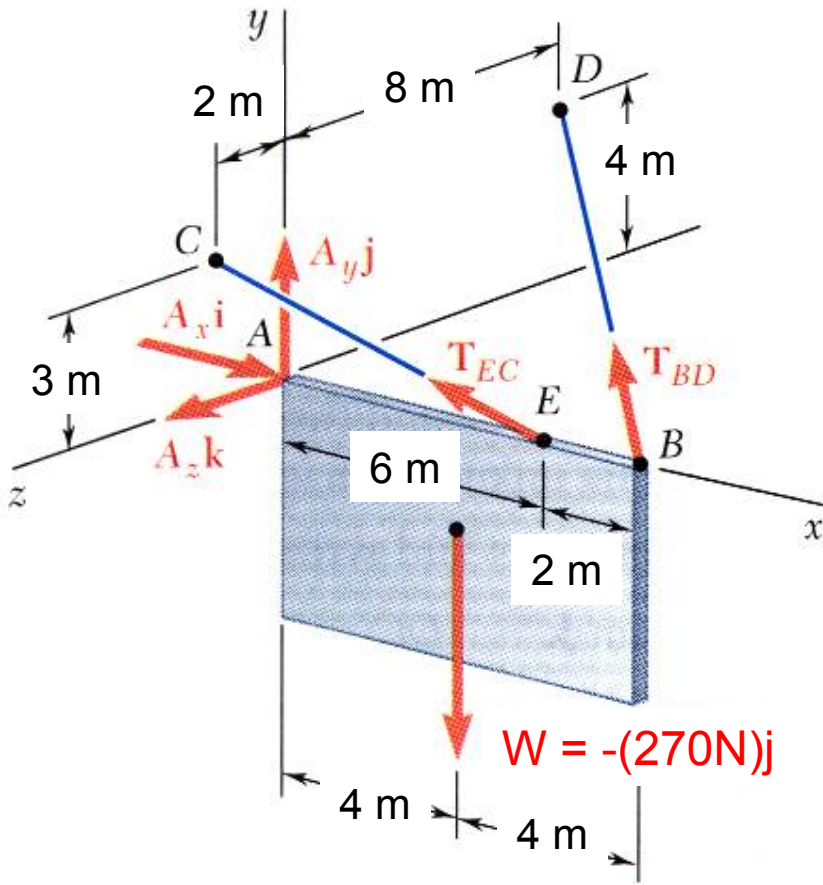
SCD



$$\begin{aligned}\vec{T}_{BD} &= T_{BD} \frac{\vec{r}_D - \vec{r}_B}{|\vec{r}_D - \vec{r}_B|} \\ &= T_{BD} \frac{-8\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}}{12} \\ &= T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{T}_{EC} &= T_{EC} \frac{\vec{r}_C - \vec{r}_E}{|\vec{r}_C - \vec{r}_E|} \\ &= T_{EC} \frac{-6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}}{7} \\ &= T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)\end{aligned}$$

- A noktasındaki bağlantı şekli nedeniyle 3 bilinmeyenli tepki kuvveti vardır. Plaka x ekseninde dönmektedir.



$$\sum \vec{F} = \vec{A} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{EC} - (270 \text{ N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{i} : A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC} = 0$$

$$\vec{j} : A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ N} = 0$$

$$\vec{k} : A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC} = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{r}_B \times \vec{T}_{BD} + \vec{r}_E \times \vec{T}_{EC}$$

$$+ (4 \text{ m})\vec{i} \times (-270 \text{ N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{j} : 5.333T_{BD} - 1.714T_{EC} = 0$$

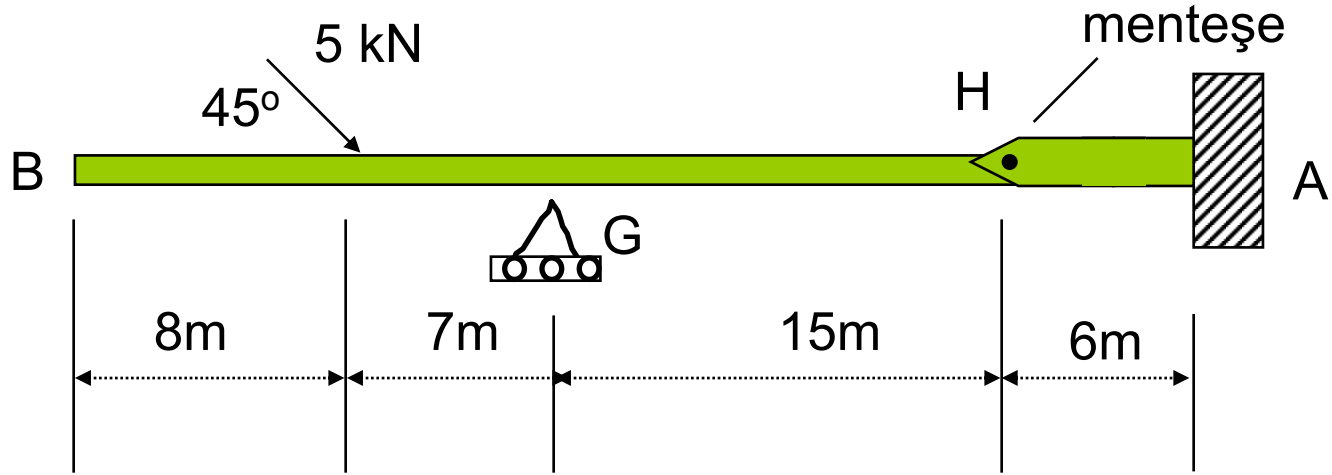
$$\vec{k} : 2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080 \text{ N} = 0$$

5 denklem 5 bilinmeyen var:

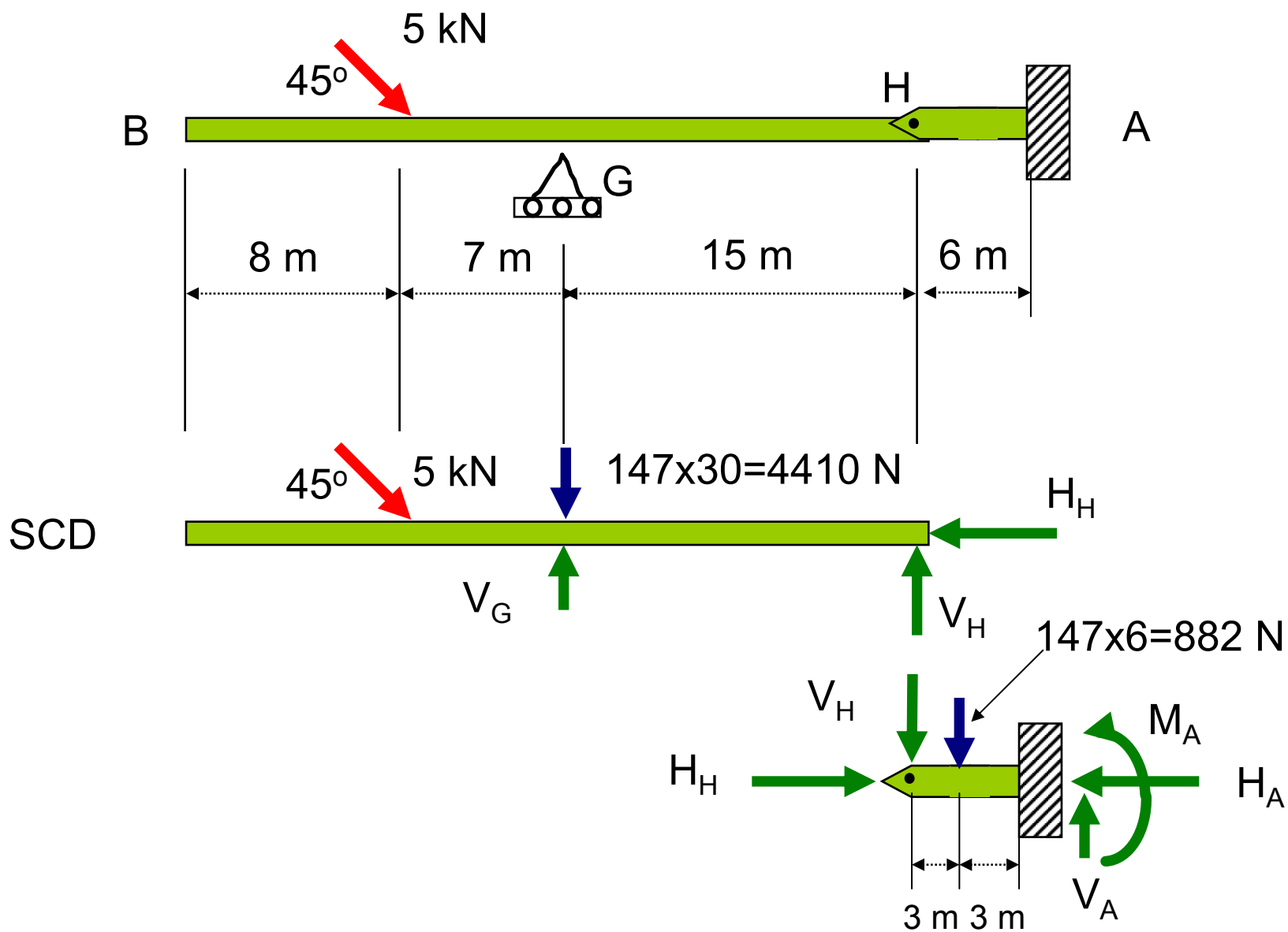
$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \quad T_{EC} = 315 \text{ lb}$$

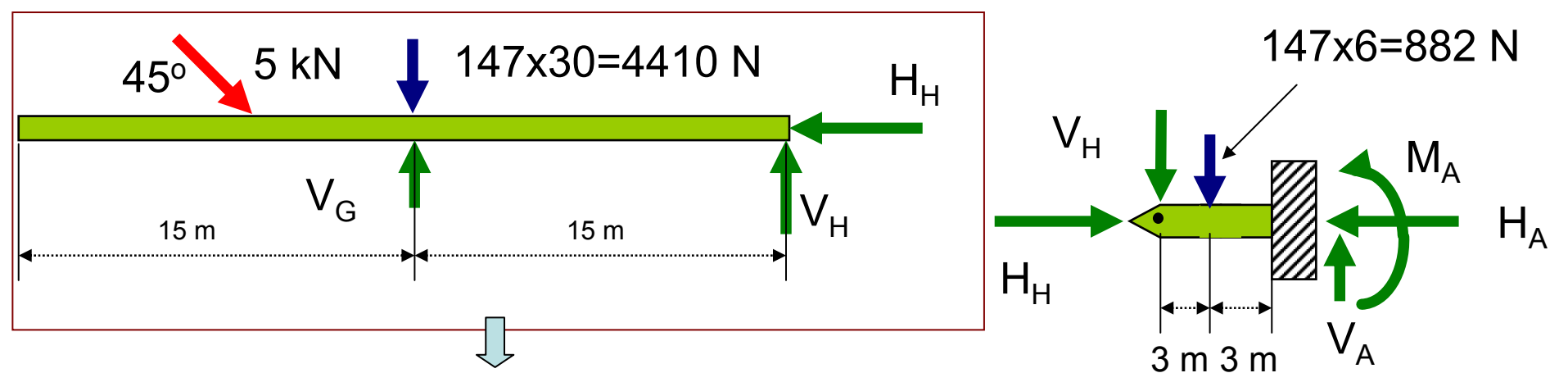
$$\vec{A} = (338 \text{ lb})\vec{i} + (101.2 \text{ lb})\vec{j} - (22.5 \text{ lb})\vec{k}$$

Örnek Problem



Şekildeki yükleme elemanındaki mesnet tepkilerini hesaplayınız.
Üniform ağırlığa sahip kirişin 1 m'si 147 N ağırlığındadır.





$$\rightarrow \Sigma F_X = 0 = (5 \text{ kN} \cos 45) - H_H$$

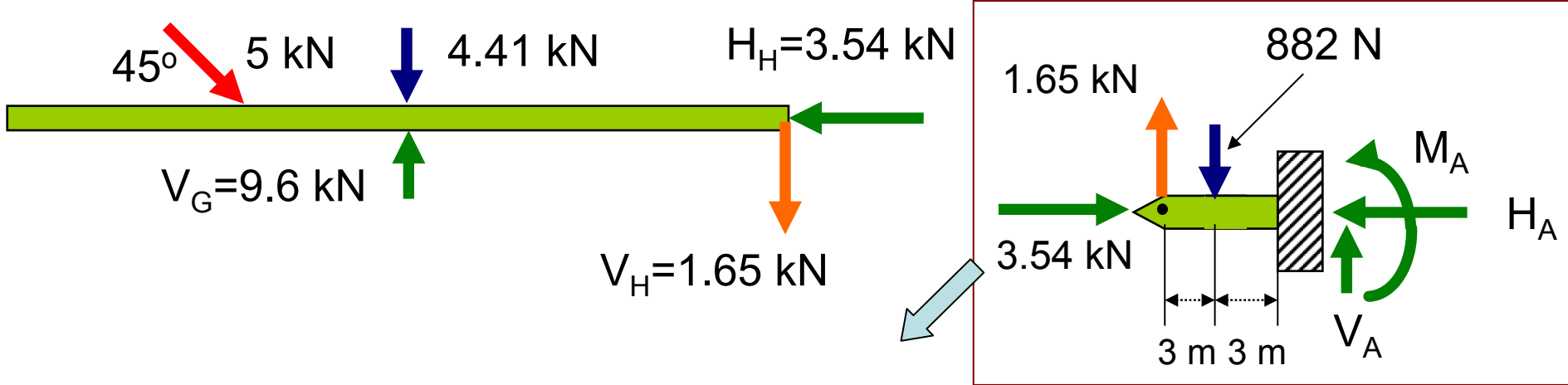
$$H_H = 3.54 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\uparrow \Sigma F_Y = 0 = V_H + V_G - (5 \text{ kN} \cos 45) - 4.41 \text{ kN}$$

$$V_H + V_G = 7.95 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M_H = 0 &= +(5 \text{ kN} \cos 45) * 22 \text{ m} \\ &\quad -(V_G * 15 \text{ m}) \\ &\quad +(4.41 \text{ kN} * 15 \text{ m}) \end{aligned}$$

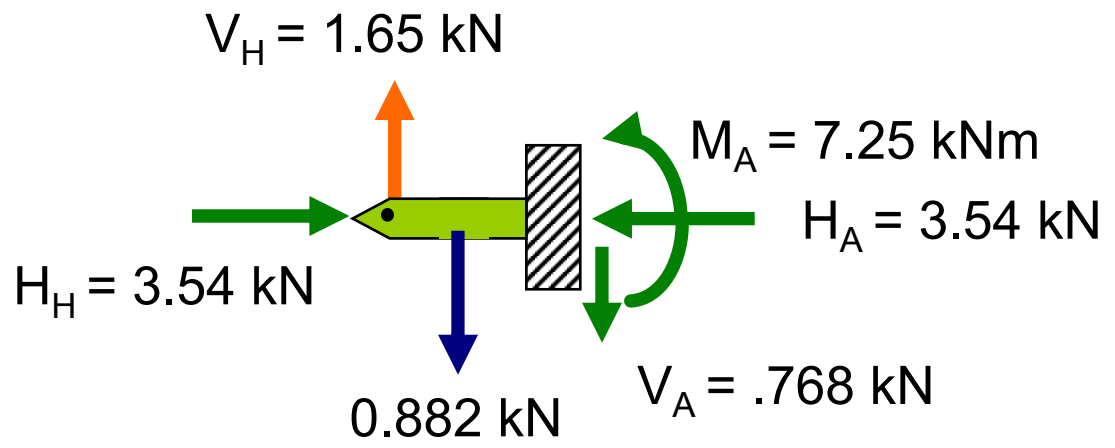
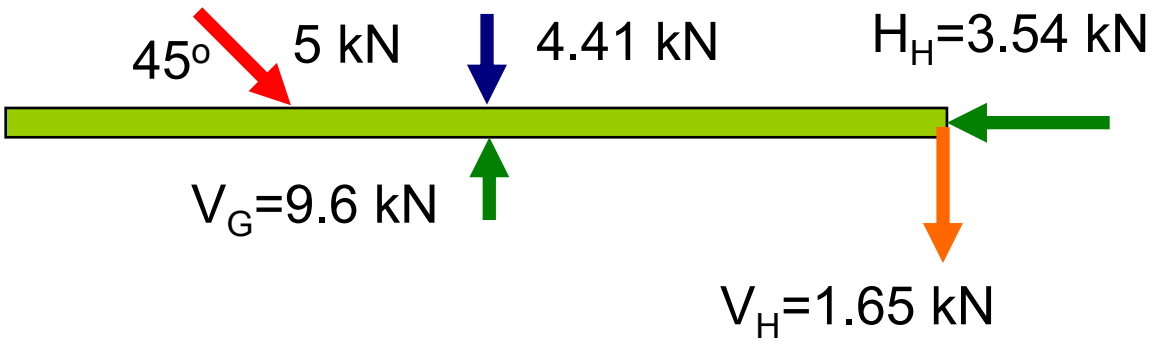
$$V_G = 9.60 \text{ kN} \uparrow, \quad V_H = -1.65 \text{ kN} = 1.65 \text{ kN} \downarrow$$



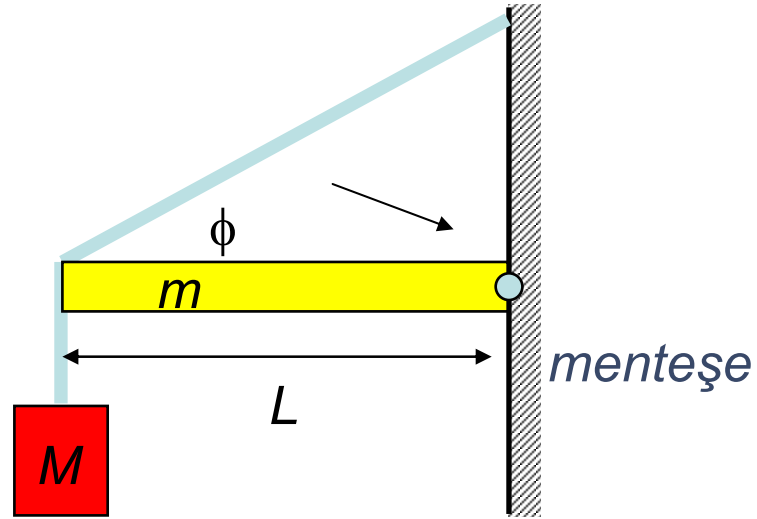
$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_X &= 0 &= 3.54 - H_A \\ H_A &= 3.54 \text{ kN} \quad \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \Sigma F_Y &= 0 &= 1.65 \text{ kN} + V_A - 0.882 \\ V_A &= -0.768 \text{ kN} = 0.768 \text{ kN} \downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \Sigma M_A &= 0 &= -(1.65 \text{ kN} * 6 \text{ m}) + (0.882 * 3 \text{ m}) + M_A \\ M_A &= 7.25 \text{ kNm} = 7.25 \text{ kNm} \end{aligned}$$

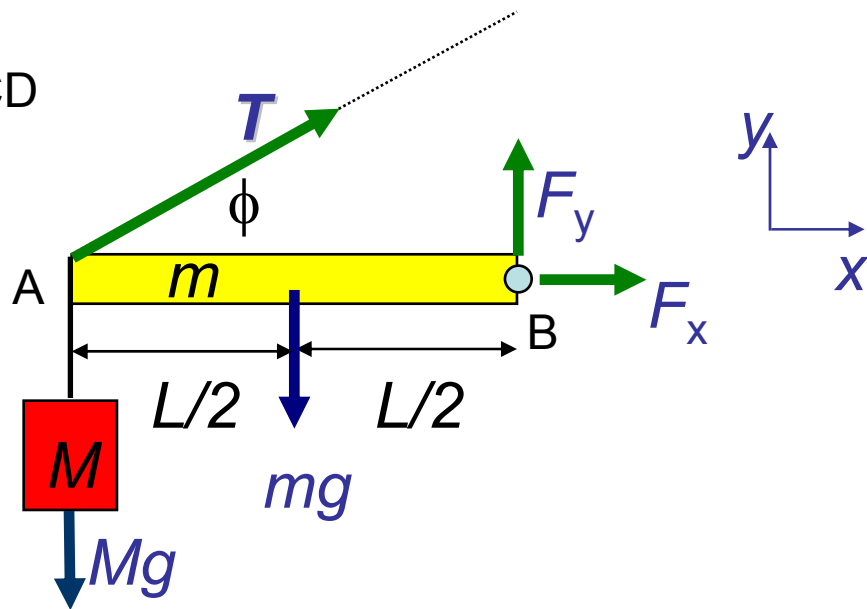


Örnek Problem



- M kütleli lamba m kütleli ve L uzunluğunda kirişin ucuna asılmıştır. Kiriş duvara menteşe ile bağlanmıştır ve diğer ucundan ağırlıksız kablo ile desteklenmektedir.
 - Kablodaki kuvveti bulunuz.
 - Mesnet tepkisini bulunuz.

SCD



$$\curvearrowright \sum M_B = 0:$$

$$LMg + \frac{L}{2}mg - LT\sin\phi = 0$$

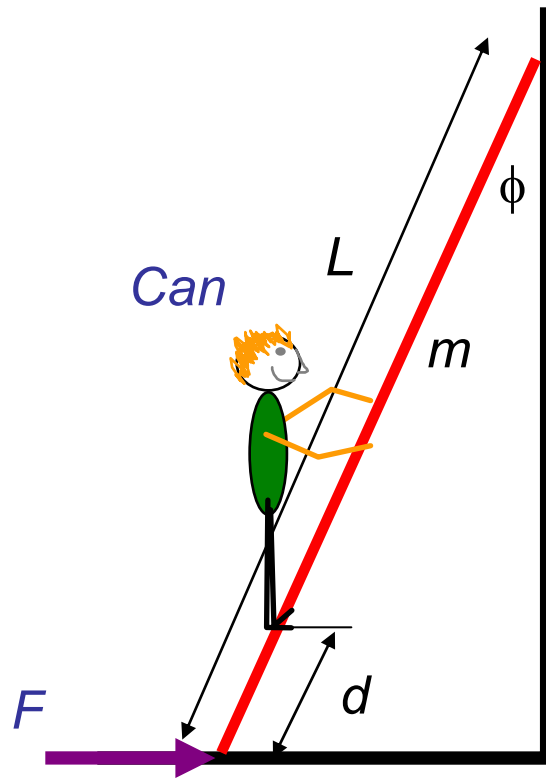
$$T = \frac{\left(M + \frac{m}{2}\right)g}{\sin\phi}$$

$$\sum F = 0$$

$$x: \quad T \cos\phi + F_x = 0 \quad \longrightarrow \quad F_x = \frac{-\left(M + \frac{m}{2}\right)g}{\tan\phi}$$

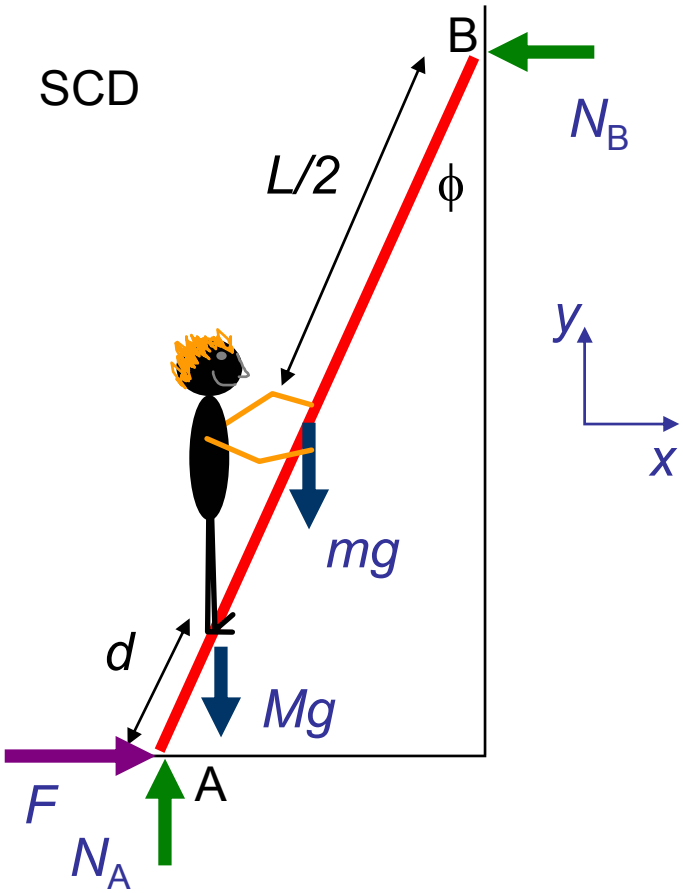
$$y: \quad T \sin\phi + F_y - Mg - mg = 0 \quad \longrightarrow \quad F_y = \frac{1}{2}mg$$

Örnek Problem



- Can (kütlesi: M) duvara ϕ açısı ile dayanmış olan merdivene tırmanmaktadır (uzunluğu: L , kütlesi: m). Duvarlar sürtünmesiz yüzeye sahip ise Can'ın düşmesini engellemek için gerekli olan F kuvvetini bulunuz.

SCD



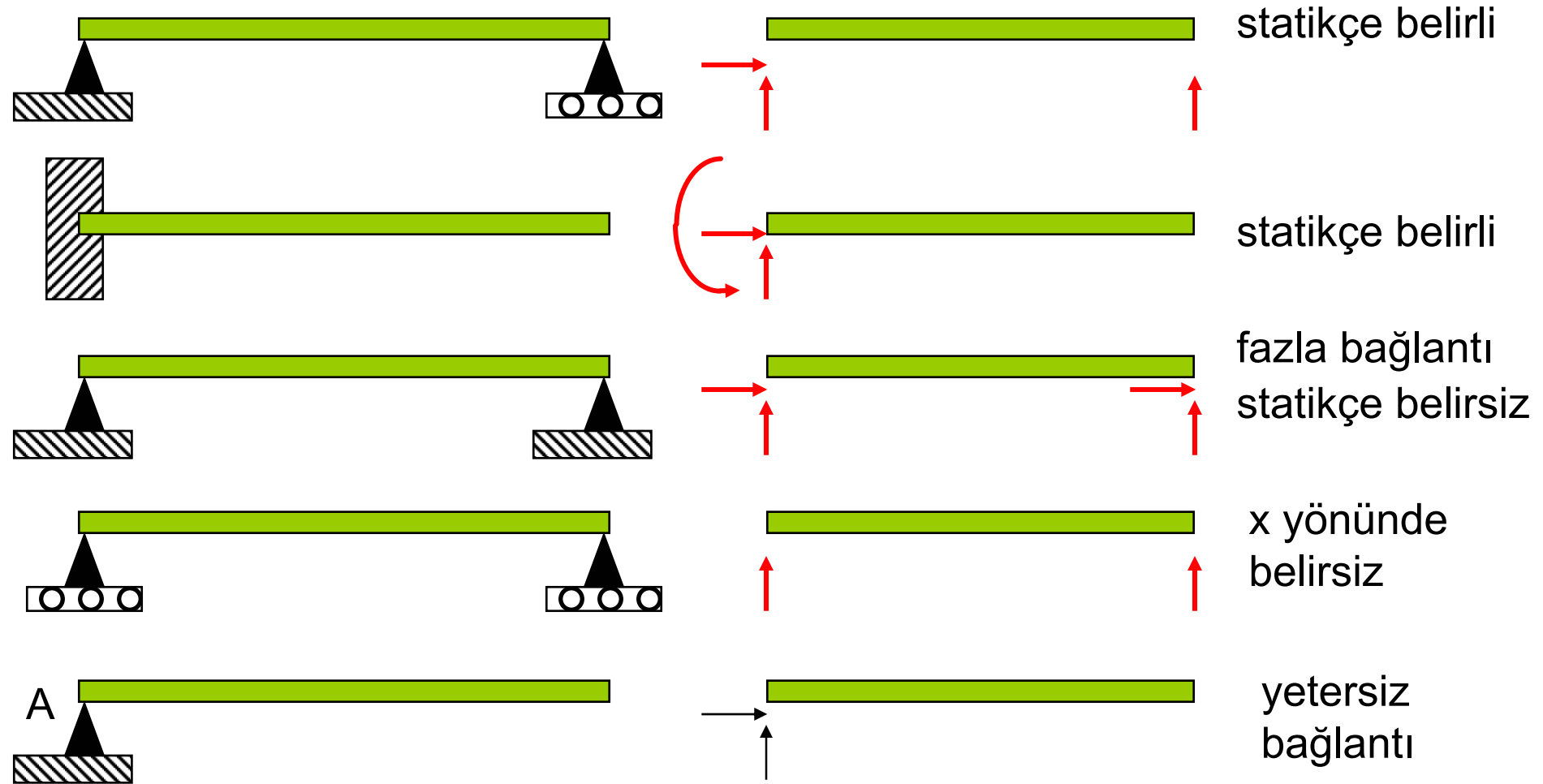
$$\sum F = 0 \quad \begin{array}{l} x: \quad -N_B + F = 0 \\ y: \quad N_A - Mg - mg = 0 \end{array}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_B = 0$$

$$\frac{L}{2} \sin \phi \, mg + (L - d) \sin \phi \cdot Mg + L \cos \phi \, F - L \sin \phi \cdot N_A = 0$$

$$F = Mg \tan \phi \left(\frac{d}{L} + \frac{m}{2M} \right)$$

Hangisi statik olarak belirlidir?



A noktası etrafında dönme meydana gelir