

Seventh Edition

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Ders Notu:
Hayri ACAR
İstanbul Teknik Üniveristesi

Tel: 285 31 46 / 116
E-mail: acarh@itu.edu.tr
Web: <http://atlas.cc.itu.edu.tr/~acarh>

3. Rijit Cisimler: Eşdeğer Kuvvet Sistemleri

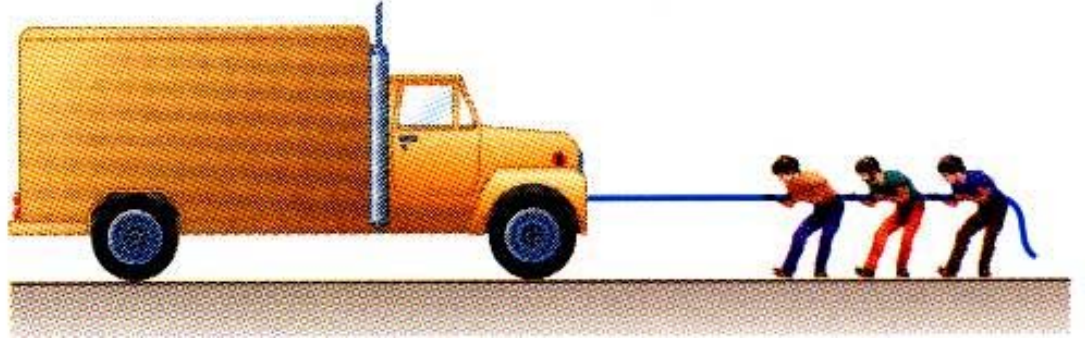


© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

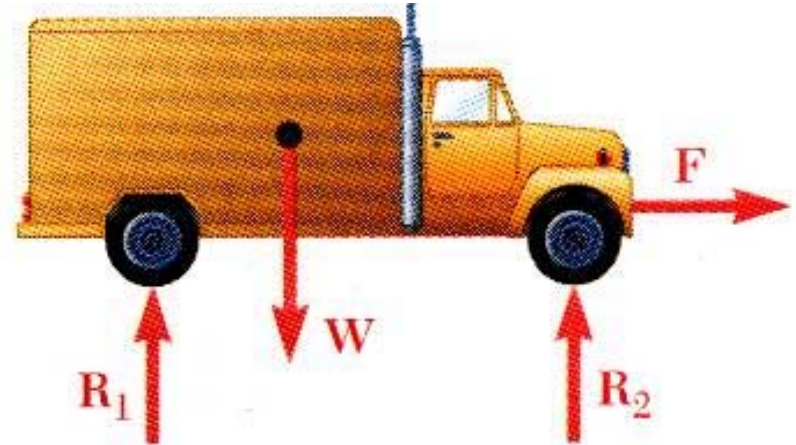
- Bir cisimi maddesel nokta olarak kabul etmek her zaman uygun değildir. Genelde, cisimin boyutları ve kuvvetlerin uygulama noktası önemlidir.
- Mekanikte bir çok cisim rijit olarak kabul edilebilir: kuvvet etkisi altında şekil değişimi çok küçüktür ve denge koşullarını ve cisimin hareketinin etkilemez.
- Bu bölümde, rijit cisime uygulanan kuvvetlerin etkisi ve verilen kuvvet sisteminin daha basit olan eşdeğer kuvvet sistemine dönüştürülmesi incelenecektir
 - kuvvetin bir noktaya göre momenti
 - kuvvetin bir eksene göre momenti
 - kuvvet çiftinin momenti
- Bir rijit cisime etki eden herhangi bir kuvvet sistemi, bir noktaya etki eden bir kuvvet ve kuvvet çiftinden oluşan eşdeğer bir sisteme dönüştürülebilir.

Dış ve İç Kuvvetler

- Rijit cisimlere etki eden kuvvetler iki gruba ayrılır:
 - Dış kuvvetler
 - İç kuvvetler

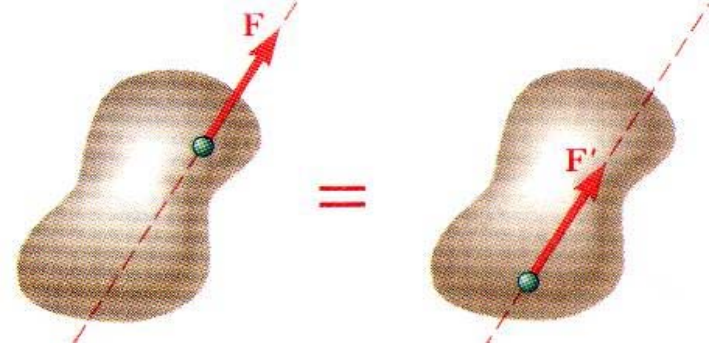


- Dış kuvvetler serbest cisim diyagramında gösterilir
- Her kuvvet cisime öteleme hareketi, dönme hareketi veya her ikisini birlikte yaptırabilir.

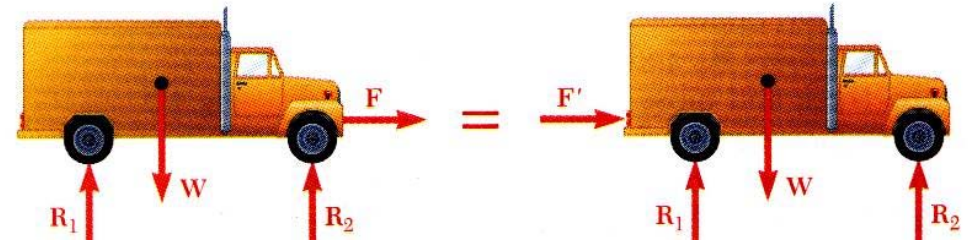


Kaydırılabilme İlkesi: Eşdeğer Kuvvetler

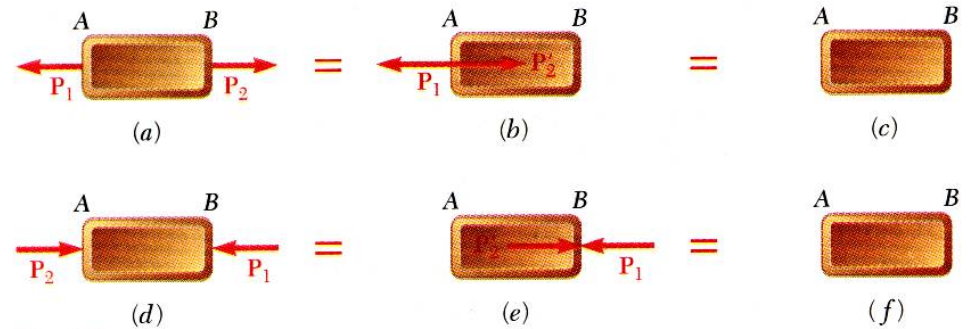
- Bir kuvvetin tesir çizgisi boyunca kaydırıldığında, cisimin denge veya hareket şartlarında değişiklik olmaz.



- F kuvvetinin uygulama noktasını ön tampondan arka tampona kaydırılması kamyonun hareketini değiştirmez.



- Kaydırılabilme ilkesi iç kuvvetler için ve şekil değiştiren cisimler için kullanılamaz.



İki Vektörün Vektörel Çarpımı

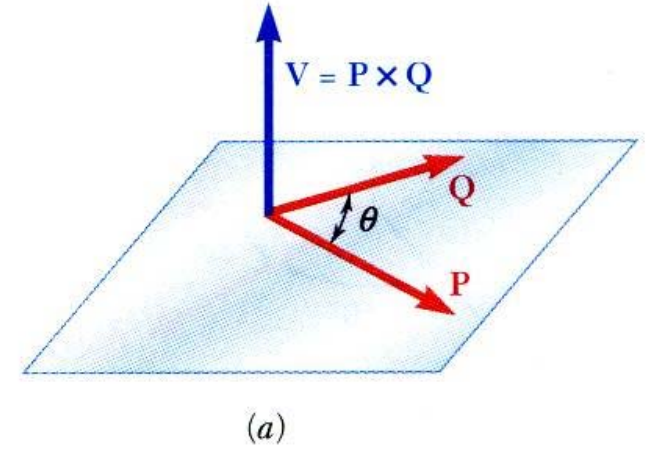
- Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti, vektörel çarpım uygulamaları ile daha iyi anlaşılabilir.

- P ve Q vektörlerinin vektörel çarpımı şu şekilde tanımlanır:

1. Sonuç vektörü V , P ve Q vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir.

2. V vektörünün şiddeti: $V = PQ \sin \theta$

3. V vektörünün yönü sağ el kuralı ile belirlenir.



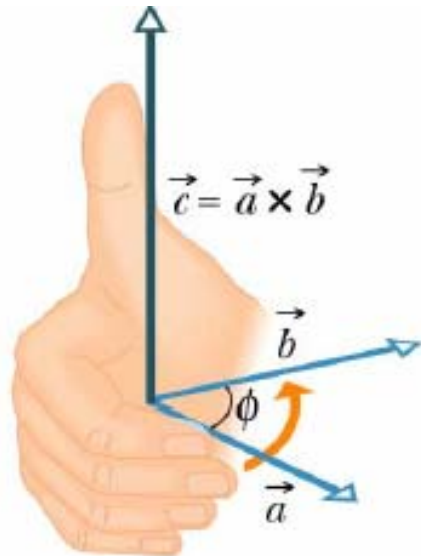
- Vektörel çarpım özellikleri:

$$Q \times P = -(P \times Q)$$

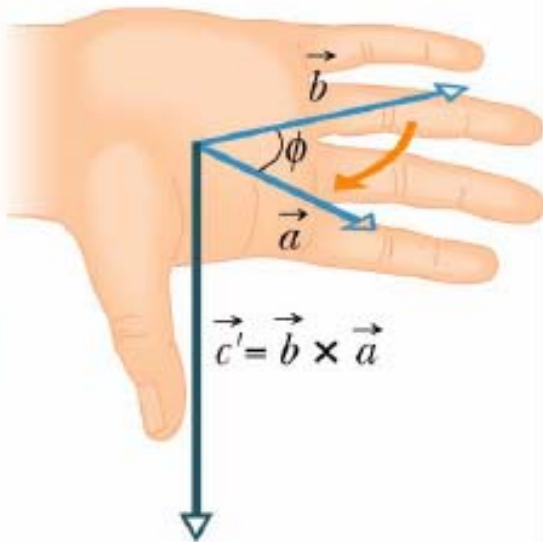
$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$$

$$(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S)$$

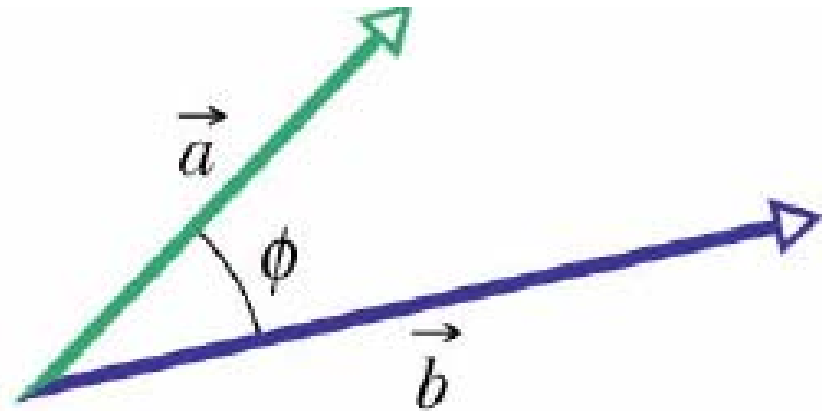
Sağ el kuralı



(a)



(b)



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

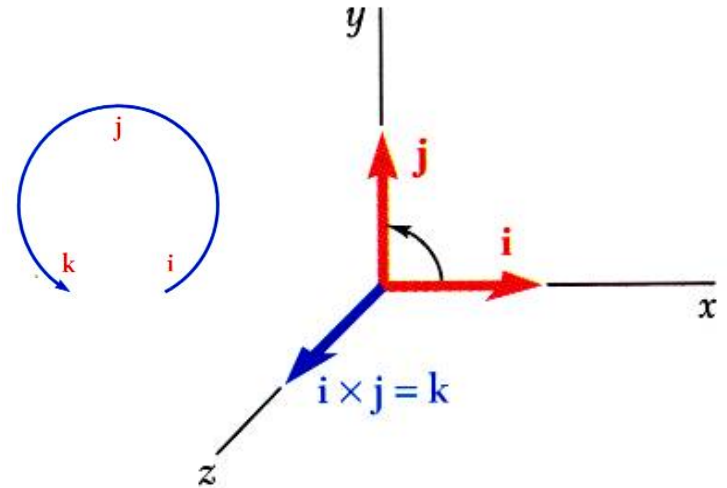
$$c = ab \sin \phi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi$$

Vektörel Çarpım: Dik Bileşenler

- Kartezyen birim vektörlerin vektörel çarpımı:

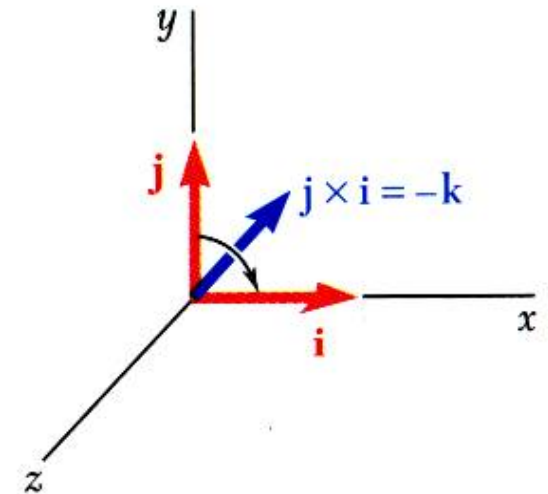
$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} &= 0 & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \end{aligned}$$



- P ve Q vektörlerinin vektörel çarpımı:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \times (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}) \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \vec{j} \\ &\quad + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$



Bir Kuvvetin Bir Noktaya Göre Momenti

- Bir kuvvet vektörü şiddeti ve yönü ile tanımlanır. Bu kuvvetin cisim üzerindeki etkisi uygulama noktasına bağlıdır.

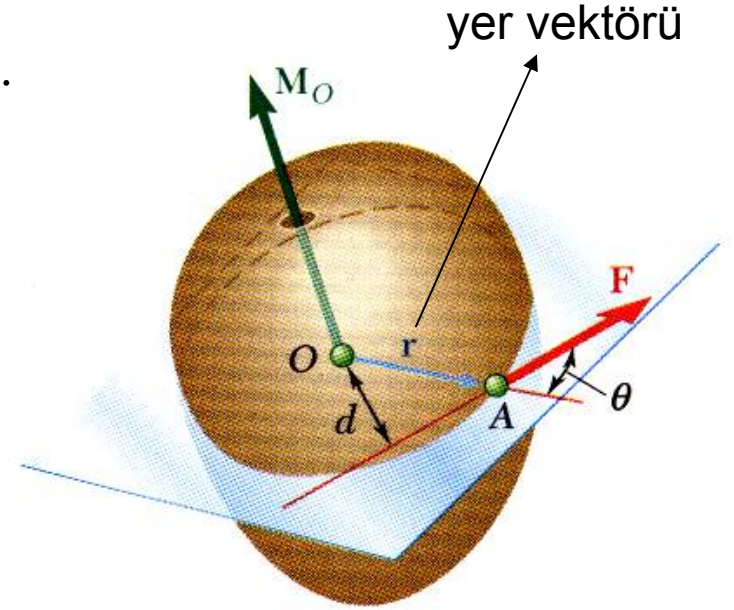
- F kuvvetinin O noktasına göre momenti:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- Moment vektörü $\mathbf{M}_O$ O noktası ve F kuvvetinin oluşturduğu düzleme diktir.
- $\mathbf{M}_O$ momentinin şiddeti cisimin kuvvet etkisi altında dönme eğiliminin ölçüsüdür. Yönü sağ el kuralı ile belirlenir.

$$M_O = rF \sin \theta = Fd$$

- Aynı şiddetli ve yönlü moment oluşturan her hangi bir kuvvet F' , F kuvvetinin eşdeğeridir.



(a)



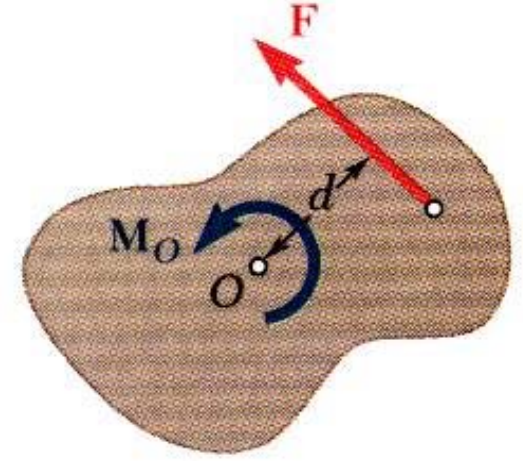
(b)

- *İki-boyutlu yapılarda* uzunluk ve genişlik vardır. Derinlik ihmal edilir. Kuvvetler bir düzlem içindedir.

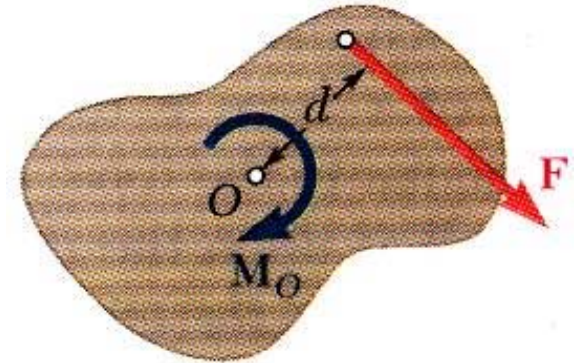
- Yapı düzlemini O noktası ve F kuvveti oluşturur.
 M_O : kuvvetin O noktasına göre momentidir ve düzleme diktir.

- Kuvvet, yapıyı saat ibrelerinin ters yönünde çevirmeye çalışırsa moment yönü düzleminden dışarıya doğrudur. Bu yön pozitif yön olarak seçilir.

- Kuvvet, yapıyı saat ibrelerinin yönünde çevirmeye çalışırsa moment yönü düzleminden içeriye doğrudur. Bu yön negatif yön olarak seçilir.



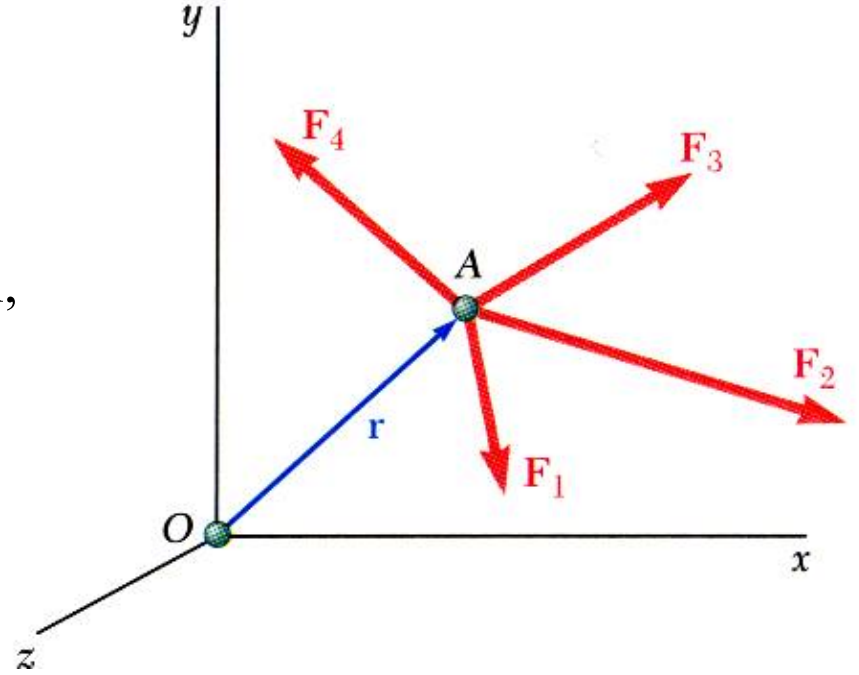
(a) $M_O = +Fd$



(b) $M_O = -Fd$

Varignon Teoremi

- Bir noktaya etkiyen bir çok kuvvetin bileşkesinin bir O noktasına göre momenti, bu kuvvetlerin O noktasına göre momentlerinin toplamına eşittir:



$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots$$

Momentin Dik Bileşenleri

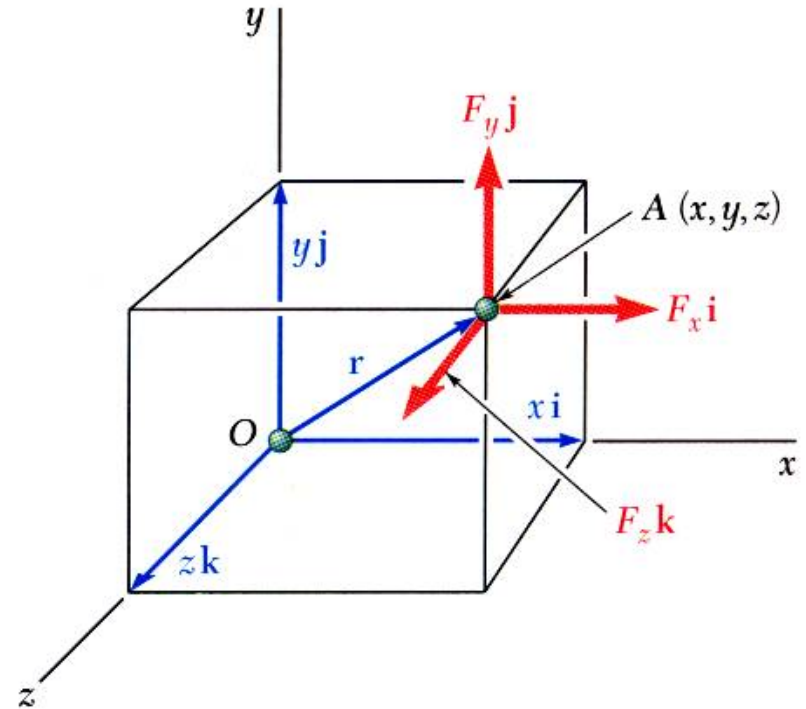
$\vec{F}$ kuvvetinin O noktasına göre momenti:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$



F kuvvetinin B noktasına göre momenti:

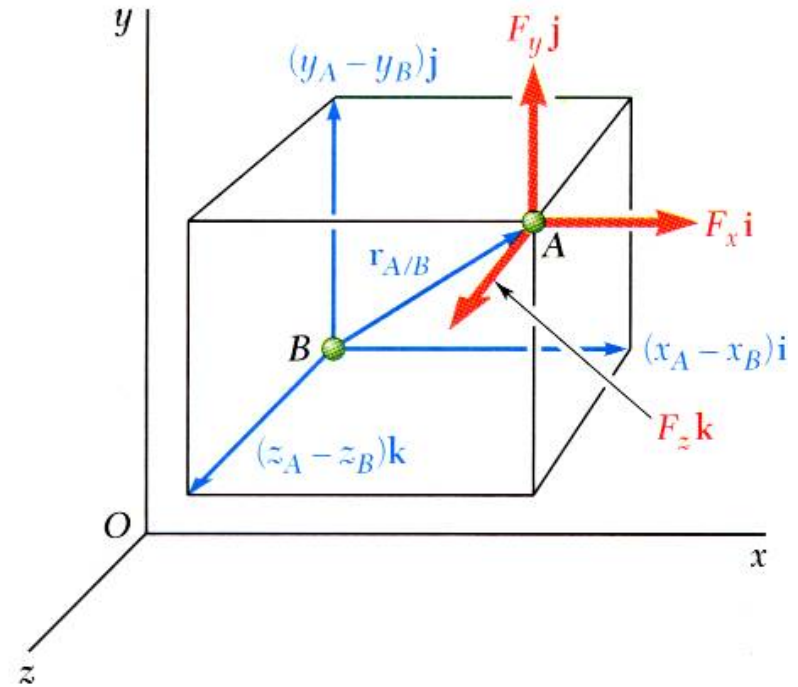
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$$= (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



İki-boyutlu yapılar için:

$$\vec{M}_O = (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

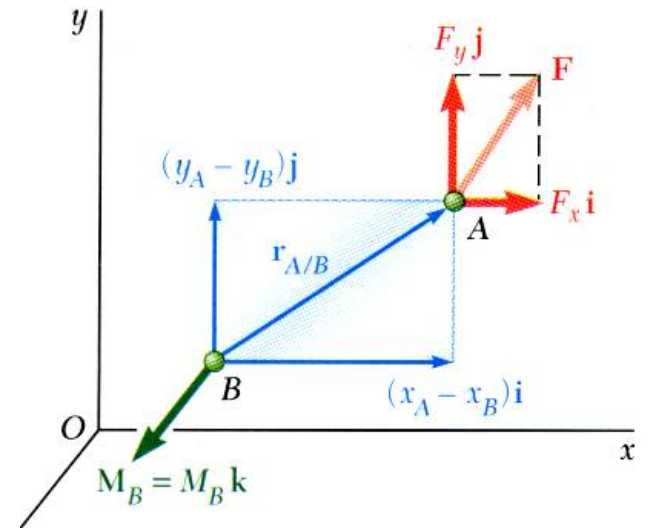
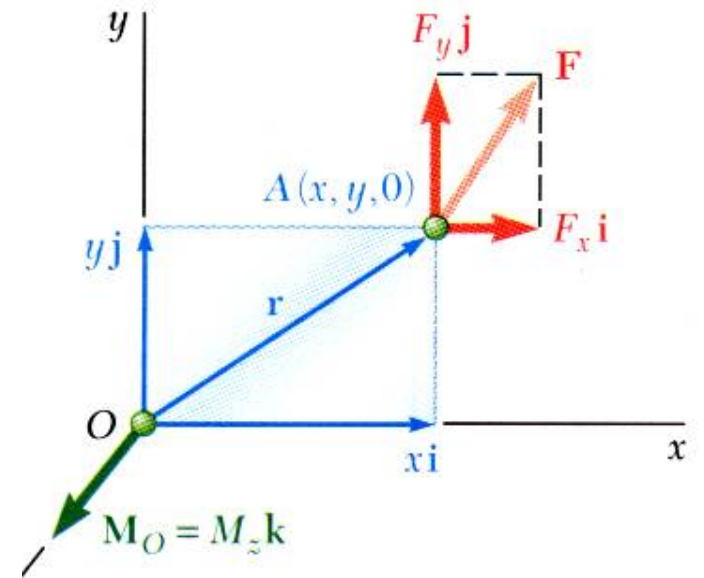
$$M_O = M_Z$$

$$= xF_y - yF_x$$

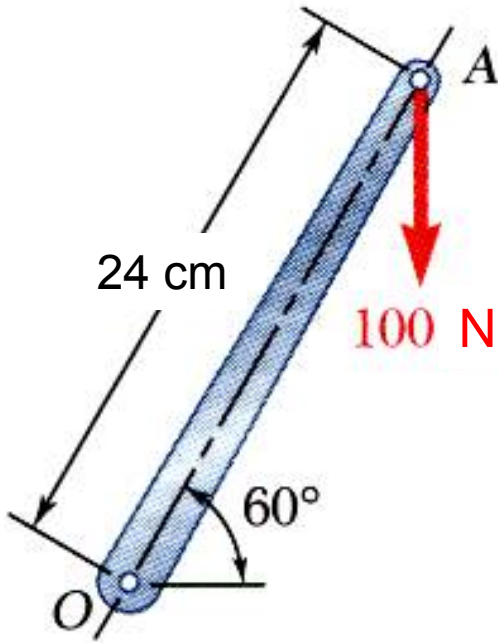
$$\vec{M}_O = [(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x]\vec{k}$$

$$M_O = M_Z$$

$$= (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

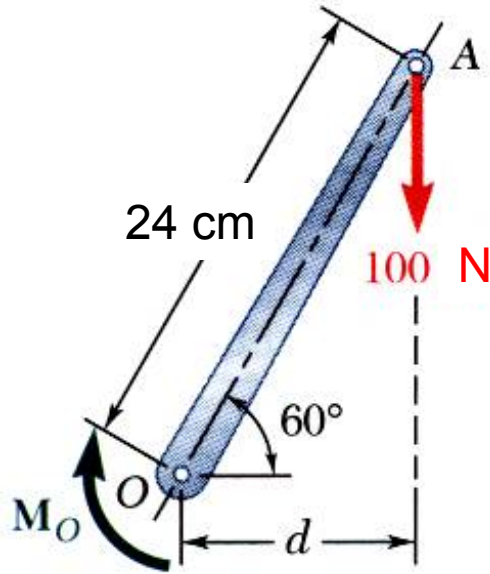


Örnek Problem 3.1



100 N’luk dik kuvvet O noktasından bağlanmış şafta A noktasından etkimektedir.

- O noktasına göre momenti,
- aynı momenti oluşturacak, A noktasına uygulanacak yatay kuvveti,
- aynı momenti oluşturacak, A noktasına uygulanacak en küçük şiddetli kuvveti ,
- aynı momenti oluşturacak 240 N’luk düşey kuvvetin yerini,
- b, c, ve d şıkkında elde ettiğiniz kuvvetlerin orjinal kuvvete eşdeğer olup olmadığını, belirleyiniz.



- a) Kuvvetin O noktasına göre oluşturduğu momentin şiddeti, kuvvetin tesir çizgisiyle moment alma noktası arasındaki dik mesafeyle çarpımı ile bulunur. Moment saat ibreleri yönünde olduğuna göre, yönü sayfa düzleminin içine doğrudur.

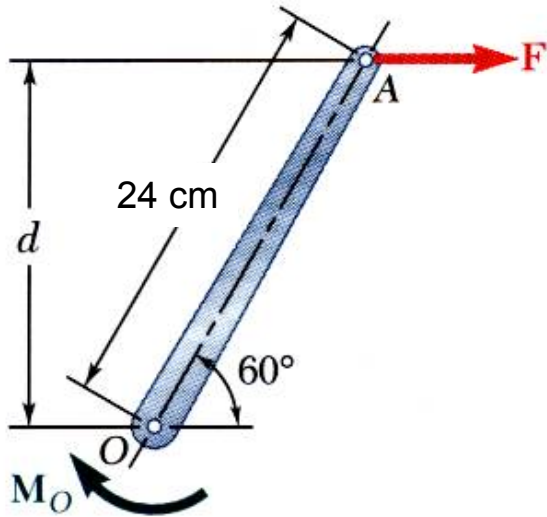
$$M_O = Fd$$

$$d = (24 \text{ cm}) \cos 60^\circ = 12 \text{ cm}.$$

$$M_O = (100 \text{ N})(12 \text{ cm})$$

$$M_O = 1200 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

b) Aynı momenti oluşturan A noktasına uygulanacak yatay kuvvet:



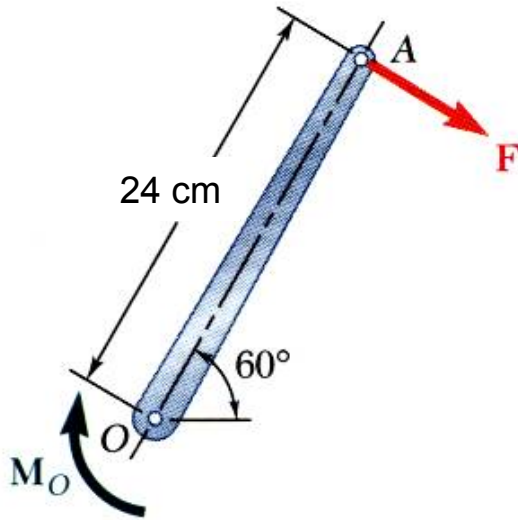
$$d = (24 \text{ cm}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ cm}$$

$$M_O = Fd$$

$$200 \text{ N} \cdot \text{cm.} = F(20.8 \text{ cm.})$$

$$F = \frac{1200 \text{ N} \cdot \text{cm.}}{20.8 \text{ cm}}$$

$$F = 57.7 \text{ N}$$



c) Aynı momenti oluşturan A noktasına uygulanacak en küçük kuvvet:

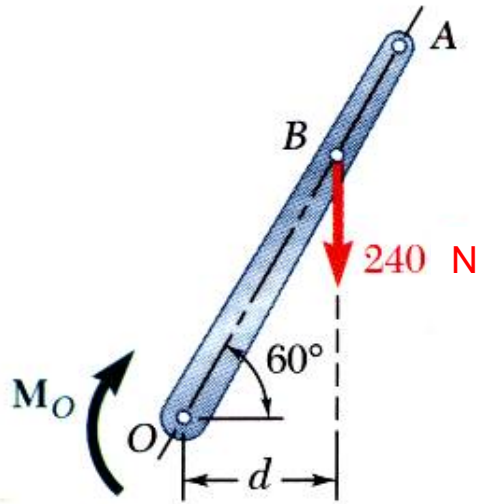
Bunun için tesir çizgisi ile moment alma noktası arasındaki dik mesafenin en büyük değere sahip olması gerekir. F kuvvetinin şaft eksenine dik olduğu durumda gerçekleşir.

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ N} \cdot \text{cm} = F(24 \text{ cm})$$

$$F = \frac{1200 \text{ N} \cdot \text{cm}}{24 \text{ cm}}$$

$$F = 50 \text{ N}$$



d) aynı momenti oluşturacak 240 N'luk dik kuvvetin uygulama noktası:

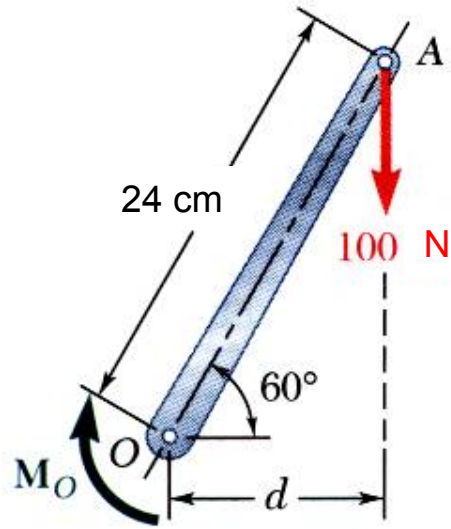
$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ N} \cdot \text{cm} = (240 \text{ N})d$$

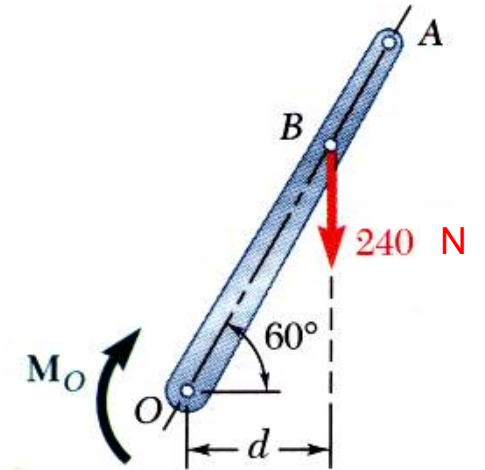
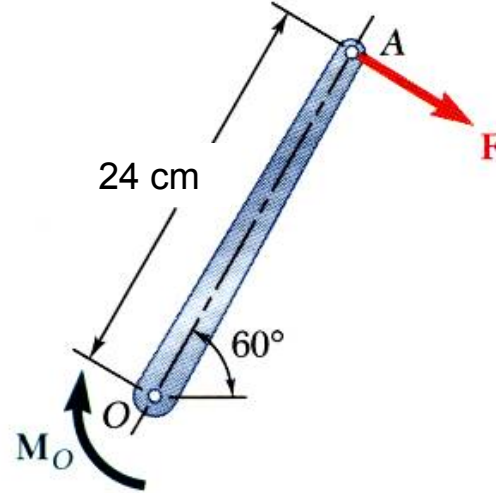
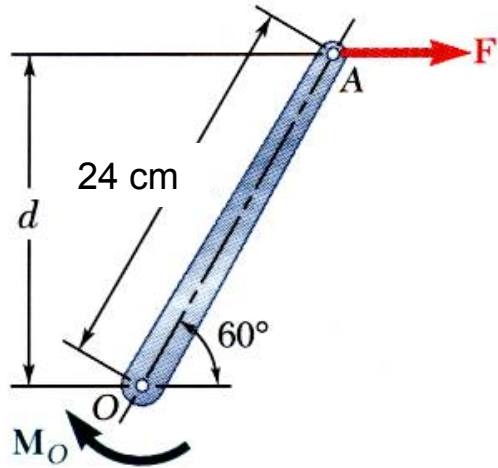
$$d = \frac{1200 \text{ N} \cdot \text{cm}}{240 \text{ N}} = 5 \text{ cm}$$

$$OB \cos 60^\circ = 5 \text{ cm}$$

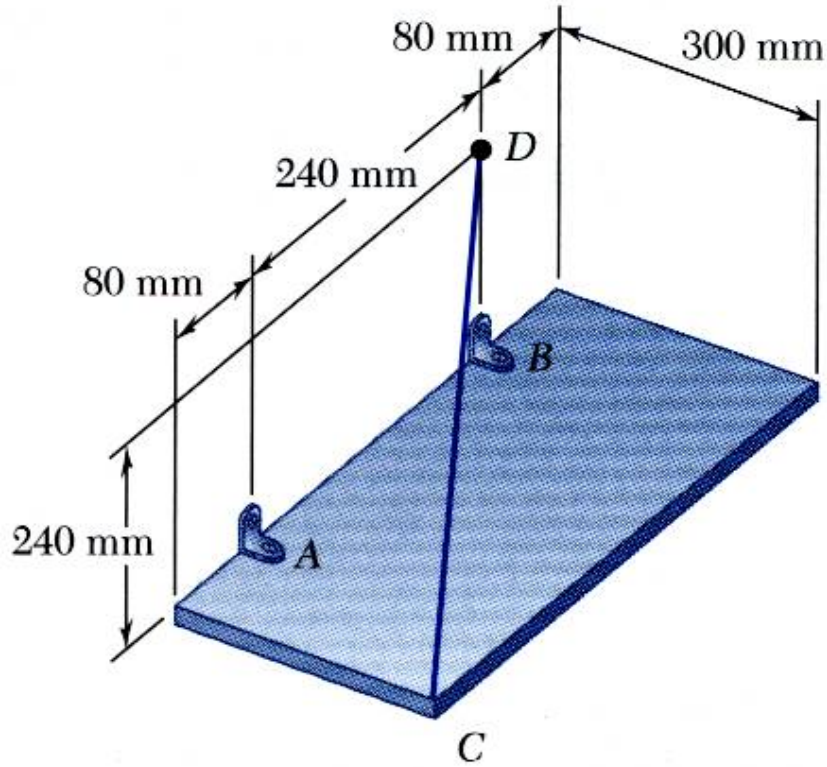
$$OB = 10 \text{ cm}$$



- e) b, c ve d şıklarında elde edilen kuvvetler orjinal kuvvet ile O noktasına göre eşit şiddetli ve yönlü moment oluşturmaktadırlar. Fakat bu kuvvetlerin şiddeti, yönü ve tesir çizgileri farklı olduğu için eşdeğer kuvvet değildirler.



Örnek Problem 3.4

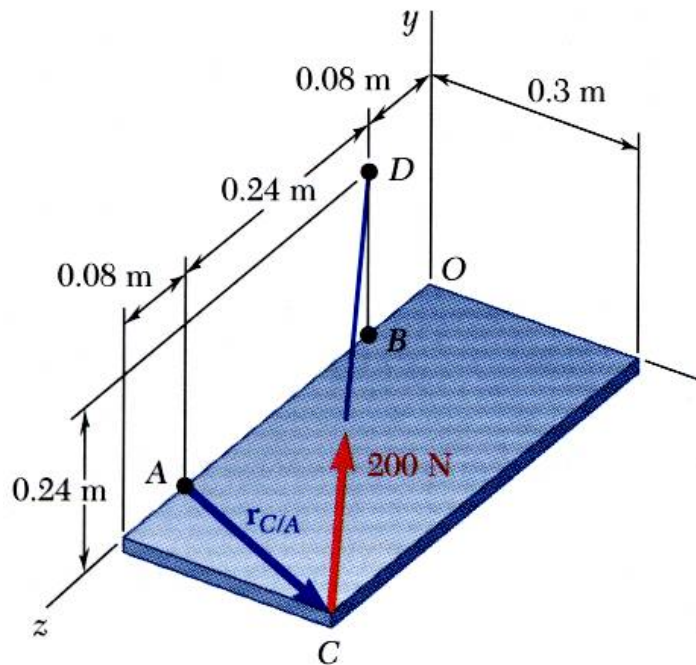


Dikdörtgen plaka **A** ve **B** noktalarından duvara sabitlenmiştir ve **CD** teli ile desteklenmektedir. Teldeki kuvvetin **200 N** olduğu biliniyorsa, telin **C** noktasından plakaya uyguladığı kuvvetin **A** noktasına göre momentini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

F kuvvetinin A noktasına göre momenti M_A vektörel çarpım ile bulunur:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$



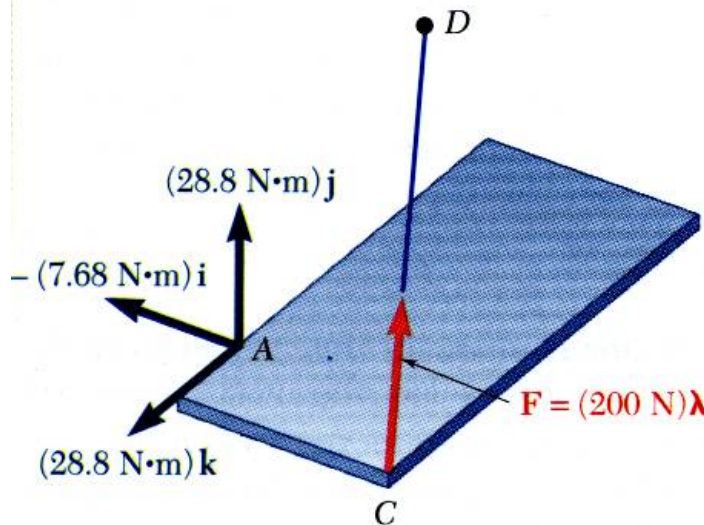
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{C/A} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0.3 \text{ m})\vec{i} + (0.08 \text{ m})\vec{j}$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = (200 \text{ N}) \frac{\vec{r}_{C/D}}{r_{C/D}}$$

$$= (200 \text{ N}) \frac{-(0.3 \text{ m})\vec{i} + (0.24 \text{ m})\vec{j} - (0.32 \text{ m})\vec{k}}{0.5 \text{ m}}$$

$$= -(120 \text{ N})\vec{i} + (96 \text{ N})\vec{j} - (128 \text{ N})\vec{k}$$



$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = -(7.68 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{i} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{j} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$

İki Vektörün Skaler Çarpımı

- İki vektör P ve Q nun skaler çarpım tanımı:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ \cos \theta$$

- Scaler çarpım özellikleri:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = \vec{Q} \bullet \vec{P}$$

$$\vec{P} \bullet (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \bullet \vec{Q}_1 + \vec{P} \bullet \vec{Q}_2$$

$$(\vec{P} \bullet \vec{Q}) \bullet \vec{S} = \text{tanimsiz}$$

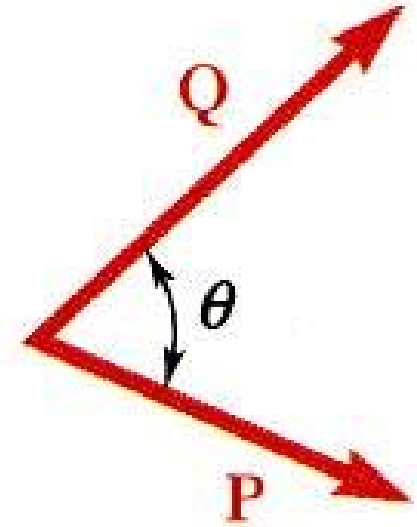
- Kartezyen birim vektörlerin skaler çarpımı:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \bullet (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \bullet \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \bullet \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \bullet \vec{k} = 0 \quad \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\vec{P} \bullet \vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

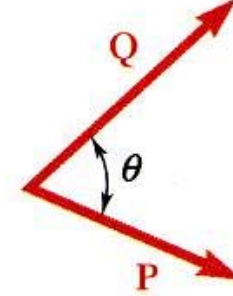


İki Vektörün Skaler Çarpımı: Uygulamalar

- İki vektör arasındaki açı:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$



- Vektörün verilen eksendeki izdüşümü:

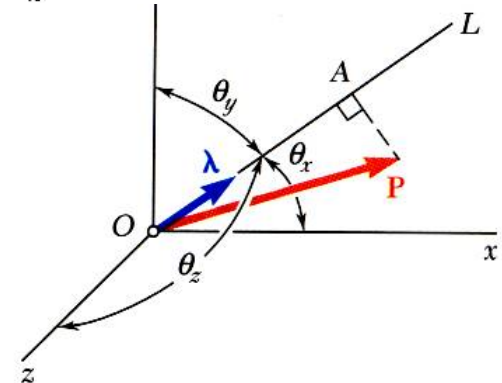
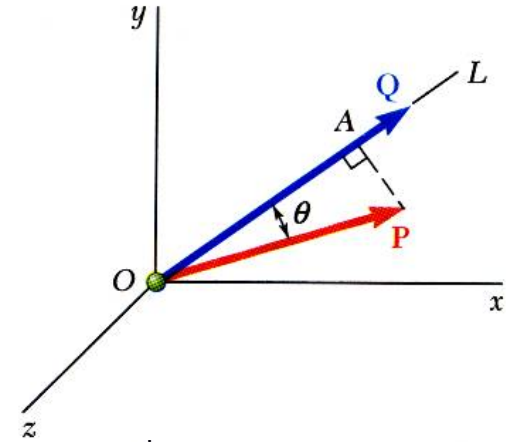
$$P_{OL} = P \cos \theta \quad \leftarrow \quad P\text{'nin OL boyunca izdüşümü}$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ \cos \theta$$

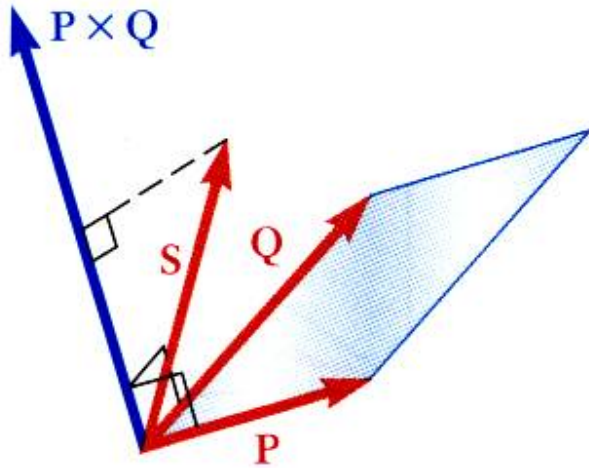
$$\frac{\vec{P} \bullet \vec{Q}}{Q} = P \cos \theta = P_{OL}$$

- Birim vektör ile tanımlanmış bir eksen için:

$$\begin{aligned} P_{OL} &= \vec{P} \bullet \vec{\lambda} \\ &= P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \end{aligned}$$



Vektörlerin Üçlü Karişik Çarpımı



$$\vec{S} \bullet (\vec{P} \times \vec{Q}) = \text{skaler sonuc}$$

- $\vec{S}$, $\vec{P}$ ve $\vec{Q}$ vektörlerinin 6 değişik çarpımı eşit şiddetlidir fakat işaretleri aynı değildir.

$$\begin{aligned}\vec{S} \bullet (\vec{P} \times \vec{Q}) &= \vec{P} \bullet (\vec{Q} \times \vec{S}) = \vec{Q} \bullet (\vec{S} \times \vec{P}) \\ &= -\vec{S} \bullet (\vec{Q} \times \vec{P}) = -\vec{P} \bullet (\vec{S} \times \vec{Q}) = -\vec{Q} \bullet (\vec{P} \times \vec{S})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{S} \bullet (\vec{P} \times \vec{Q}) &= S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) \\ &\quad + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x)\end{aligned}$$

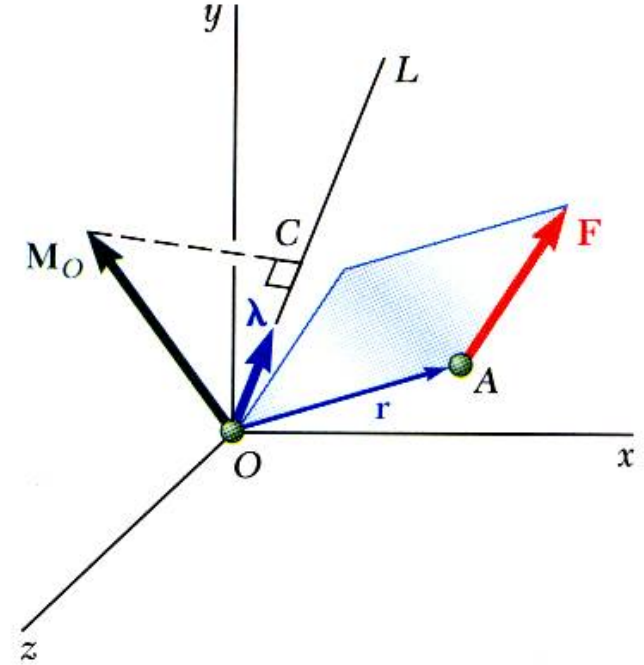
$$= \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

Bir Kuvvetin Verilen Bir Eksene Göre Momenti

- A noktasına uygulanan F kuvvetinin O noktasına göre momenti M_O :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

- OL eksenine göre moment M_{OL} , M_O momentinin OL eksenine üzerindeki izdüşümüdür:



$$M_{OL} = M_O \cos \theta = M_O 1 \cos \theta = \vec{M}_O \cdot \vec{\lambda} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_O = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

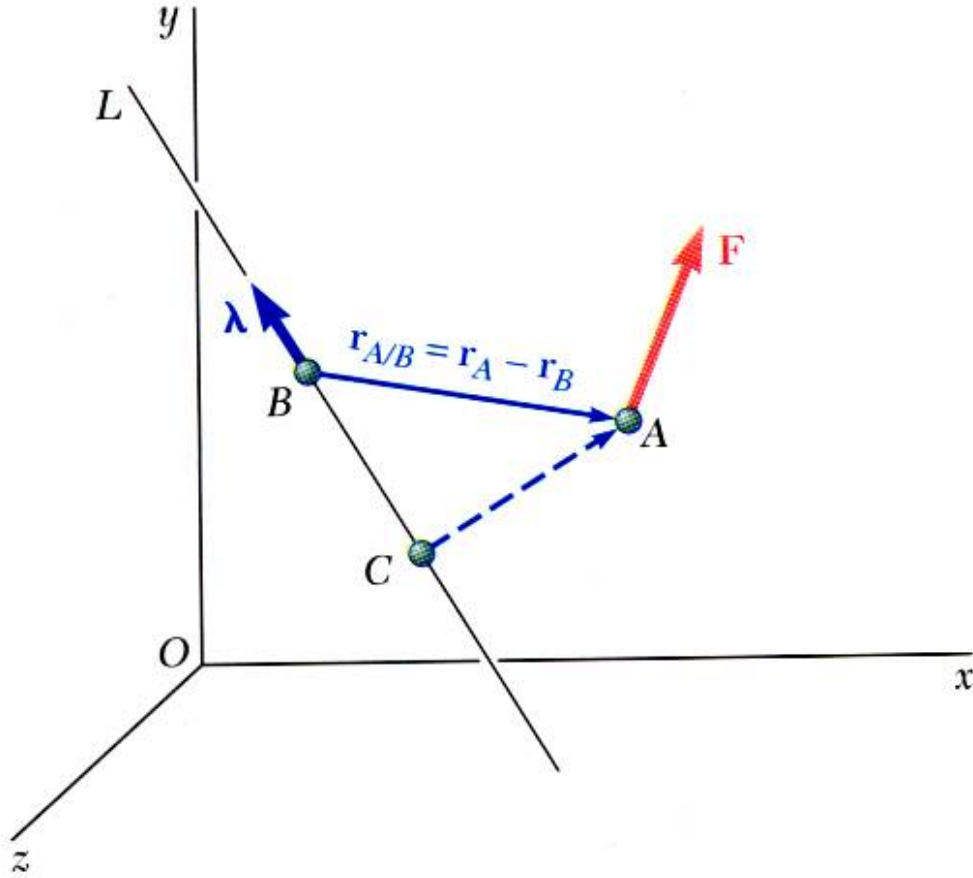
- Momentin bileşenleri:

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

- Bir kuvvetin keyfî bir eksene göre momenti:



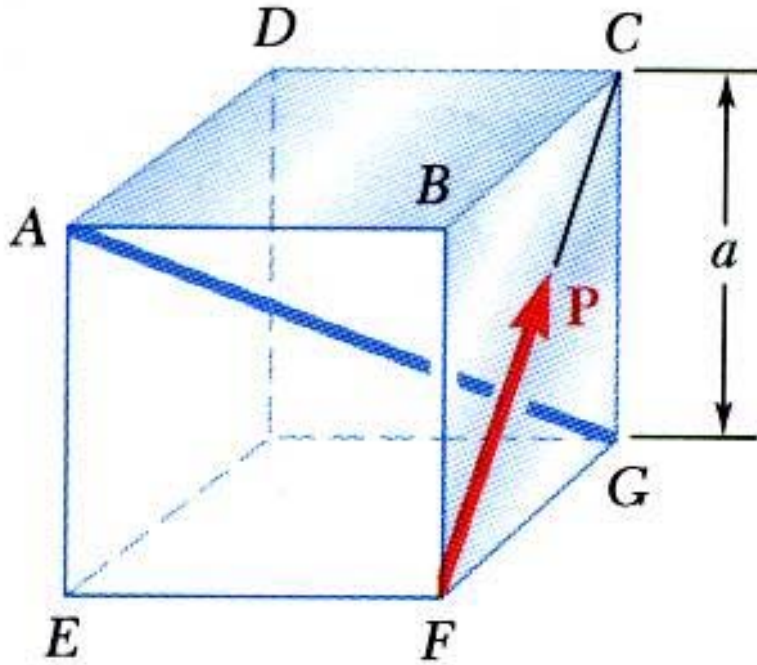
$$M_{BL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_B$$

$$= \vec{\lambda} \bullet (\vec{r}_{A/B} \times \vec{F})$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

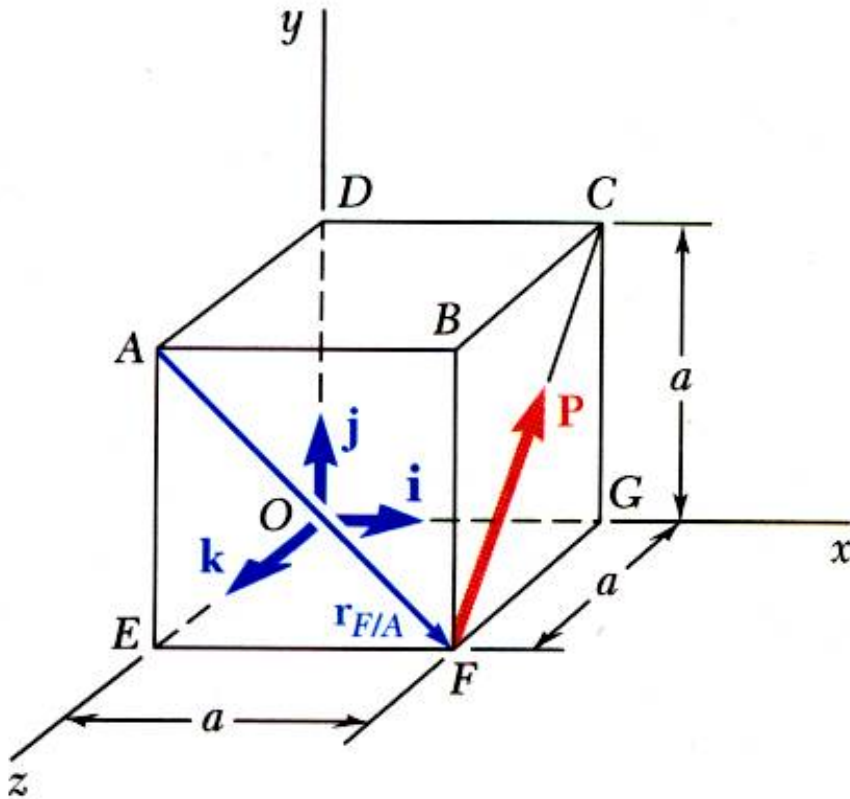
- Sonuç verilen eksenindeki B noktasından bağımsızdır.

Örnek Problem 3.5



P kuvveti A küpüne F köşesinde etmektedir. P kuvvetinin

- a) A noktasına göre,
- b) AB kenarına göre,
- c) AG köşegenine göre momentlerini bulunuz.
- d) AG ile FC doğruları arasındaki dik uzunluğu bulunuz.



- $\mathbf{P}$ kuvvetinin A noktasına göre momenti:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{P}$$

$$\vec{r}_{F/A} = a\vec{i} - a\vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{P} = P\left((1/\sqrt{2})\vec{i} + (1/\sqrt{2})\vec{j}\right) = (P/\sqrt{2})(\vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{M}_A = a(\vec{i} - \vec{j}) \times (P/\sqrt{2})(\vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{M}_A = \left(aP/\sqrt{2}\right)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

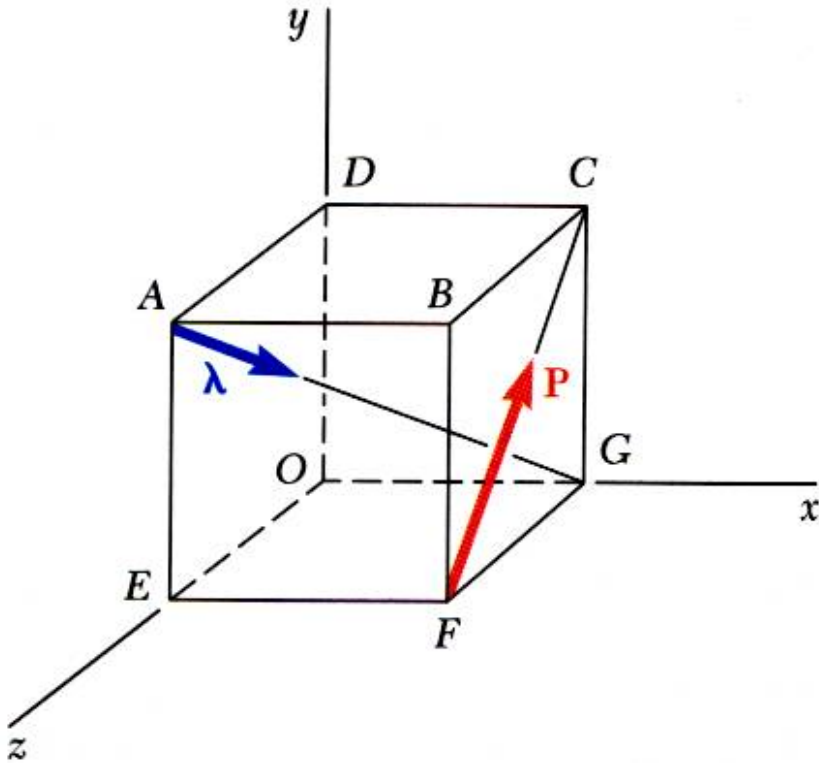
- $\mathbf{P}$ kuvvetinin AB eksenine göre momenti:

$$M_{AB} = \vec{i} \bullet \vec{M}_A$$

$$= \vec{i} \bullet \left(aP/\sqrt{2}\right)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2}$$

- $\mathbf{P}$ kuvvetinin AG köşegenine göre momenti:



$$M_{AG} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_A$$

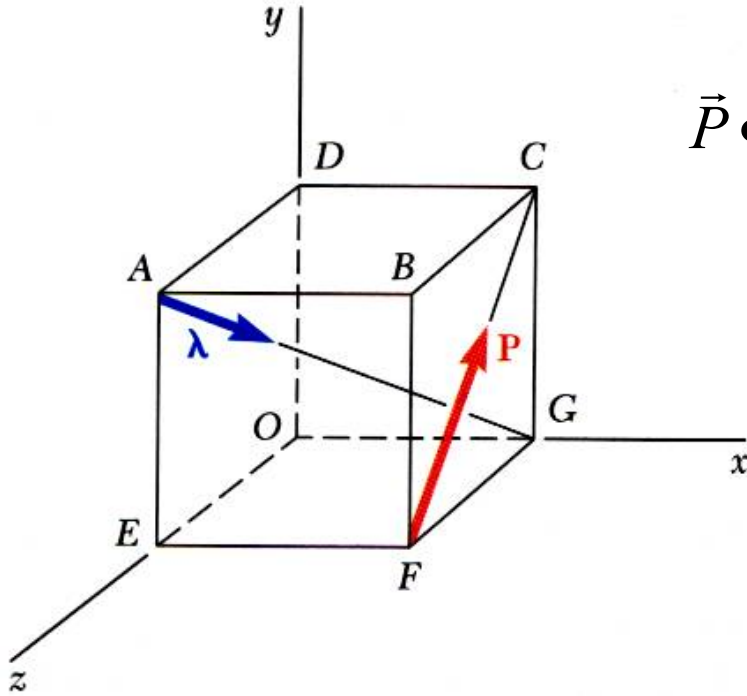
$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{A/G}}{r_{A/G}} = \frac{a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{M}_A = \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\begin{aligned} M_{AG} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \bullet \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \frac{aP}{\sqrt{6}}(1 - 1 - 1) \end{aligned}$$

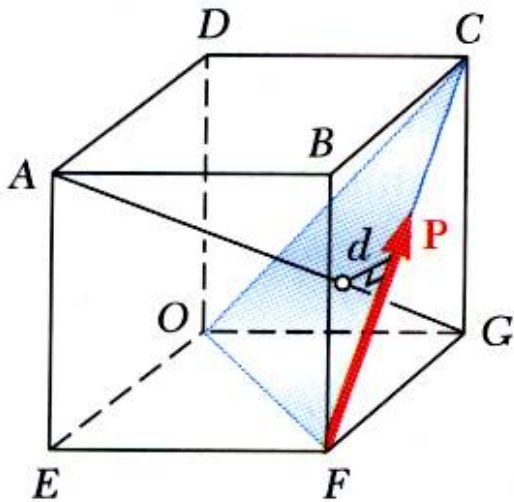
$$M_{AG} = -\frac{aP}{\sqrt{6}}$$

- AG ile FC doğruları arasındaki dik mesafe:



$$\vec{P} \cdot \vec{\lambda} = \frac{P}{\sqrt{2}} (\vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = \frac{P}{\sqrt{6}} (0 - 1 + 1) = 0$$

Bu nedenle, P vektörü AG köşegenine diktir.



$$|M_{AG}| = \frac{aP}{\sqrt{6}} = Pd$$

$$d = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Bir Kuvvet Çiftinin Momenti

- İki kuvvet F ve $-F$ aynı şiddete, paralel tesir çizgisine fakat zıt yönlerde sahip ise kuvvet çifti oluştururlar
- Kuvvet çiftinin momenti:

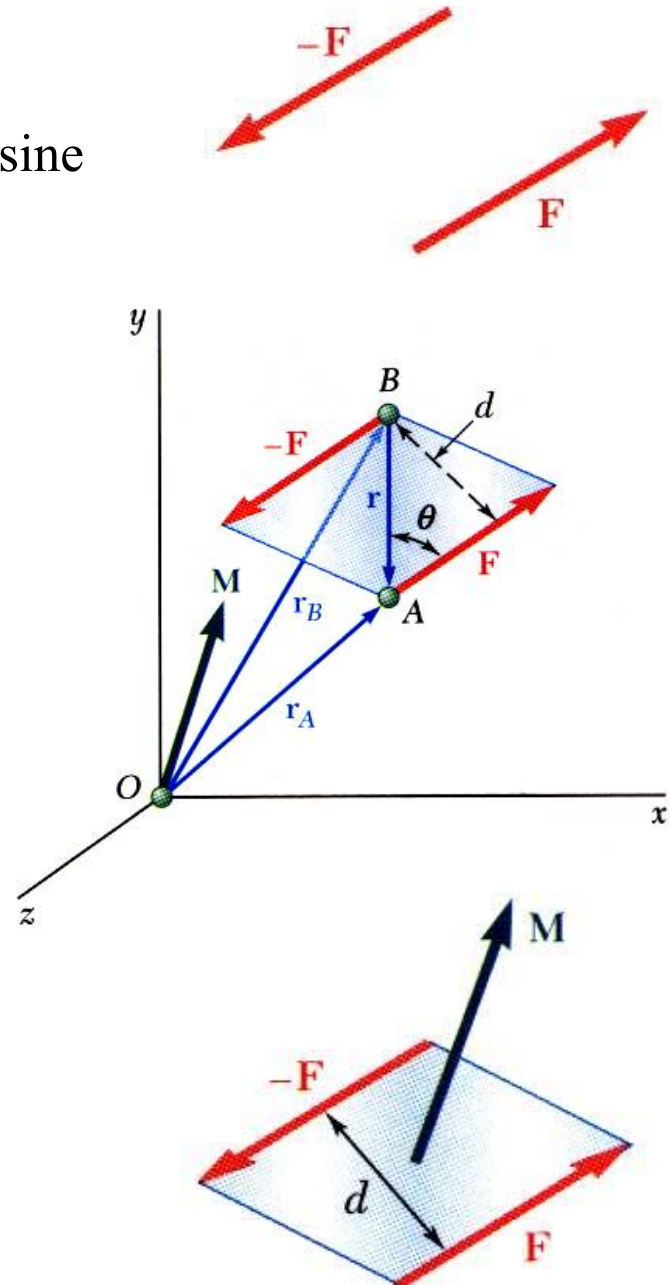
$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F})$$

$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = rF \sin \theta = Fd$$

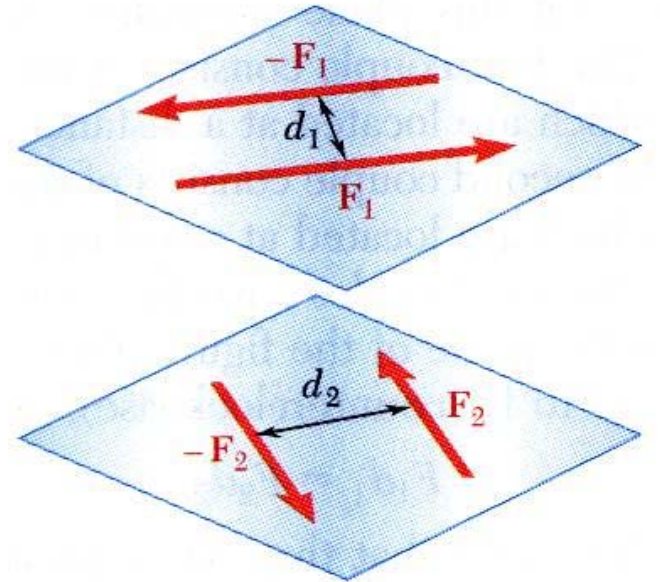
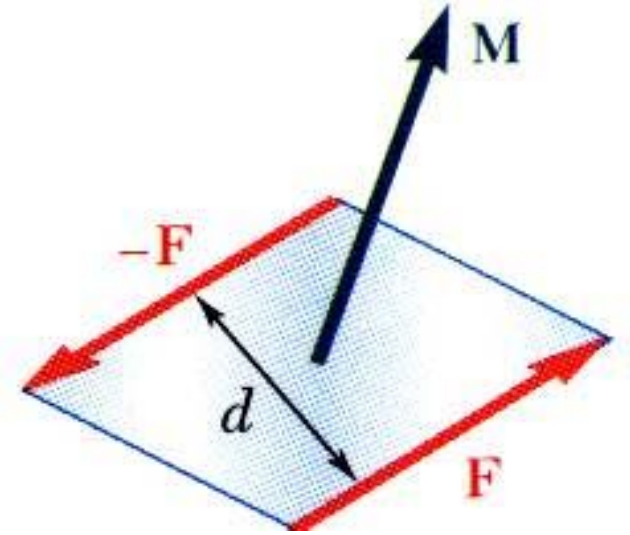
- Kuvvet çiftinin moment vektörü seçilen koordinat merkezinin yerinden bağımsızdır: Serbest vektördür ve herhangi bir noktaya uygulandığında aynı etkiyi oluşturur.



İki kuvvet çiftinin momentini aynı olması için:

- Paralel düzlemlere sahip olması gerekir
- Her iki kuvvet çiftinin oluşturduğu momentlerin yönleri aynı olmalıdır.

• Ayrıca $F_1 d_1 = F_2 d_2$



Kuvvet Çiftlerinin Toplanması

- Kuvvet çiftleri içeren P_1 ve P_2 kesişen düzlemleri için:

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 \text{ düzlem } P_1$$

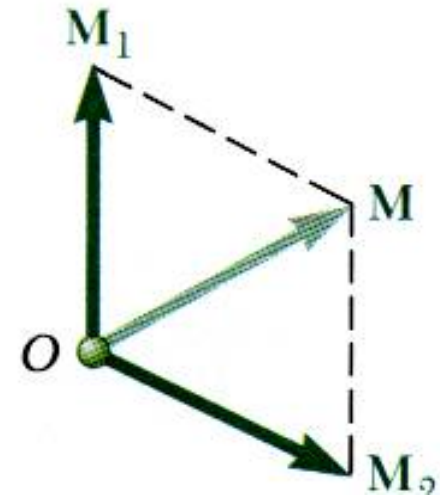
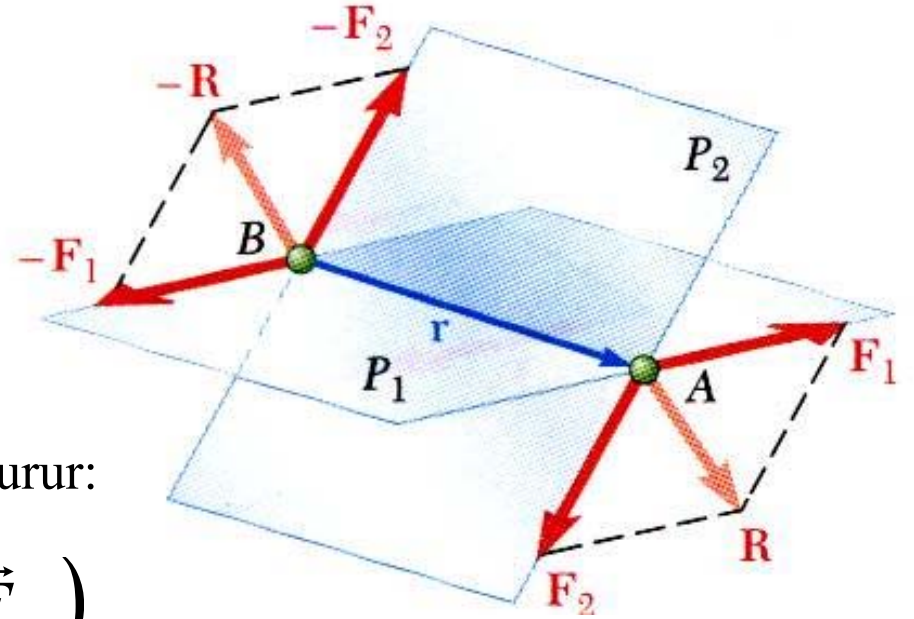
$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 \text{ düzlem } P_2$$

- Vektörlerin bileşkesi de kuvvet çifti oluşturur:

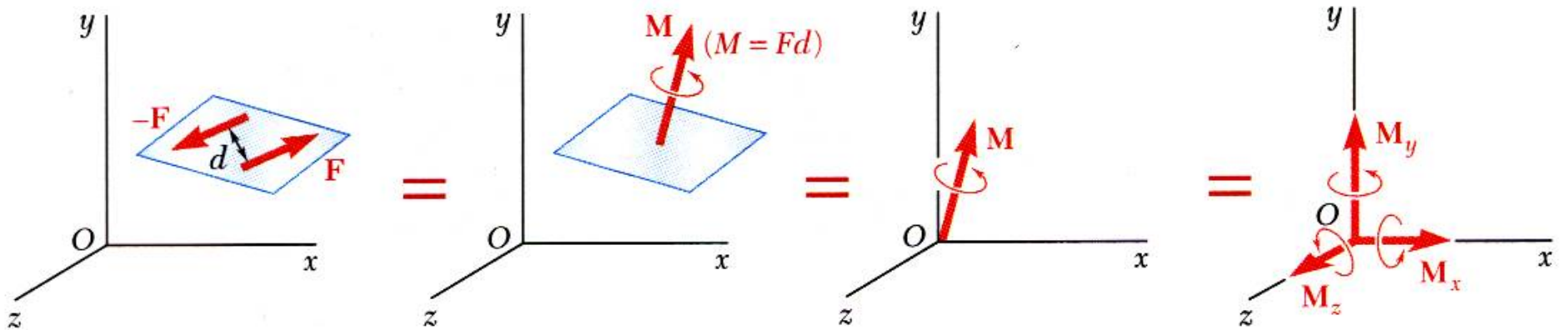
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

- Varignon theoremi kullanılırsa:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2\end{aligned}$$

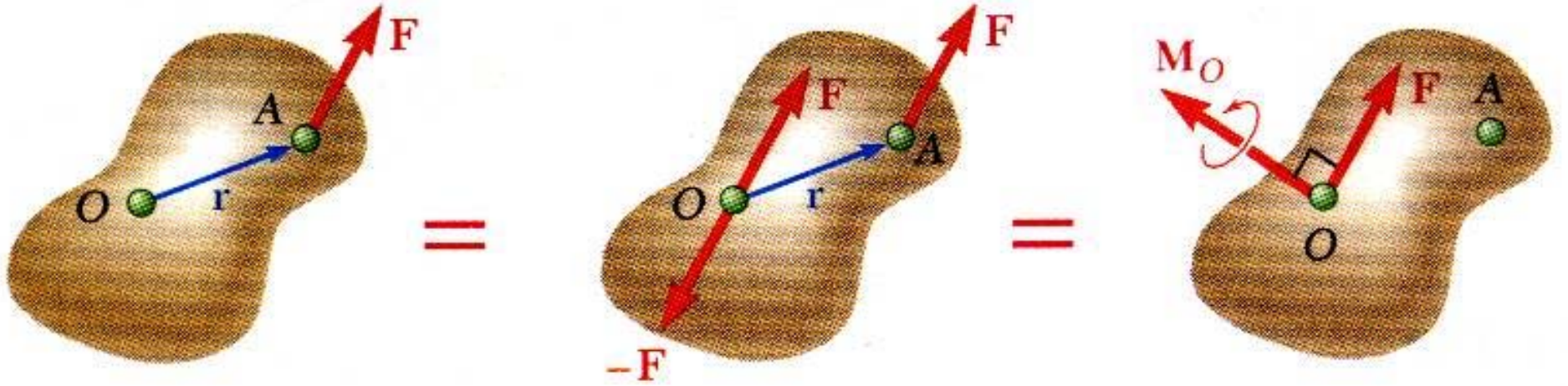


Kuvvet Çiftleri Vektörlerle Gösterilebilir

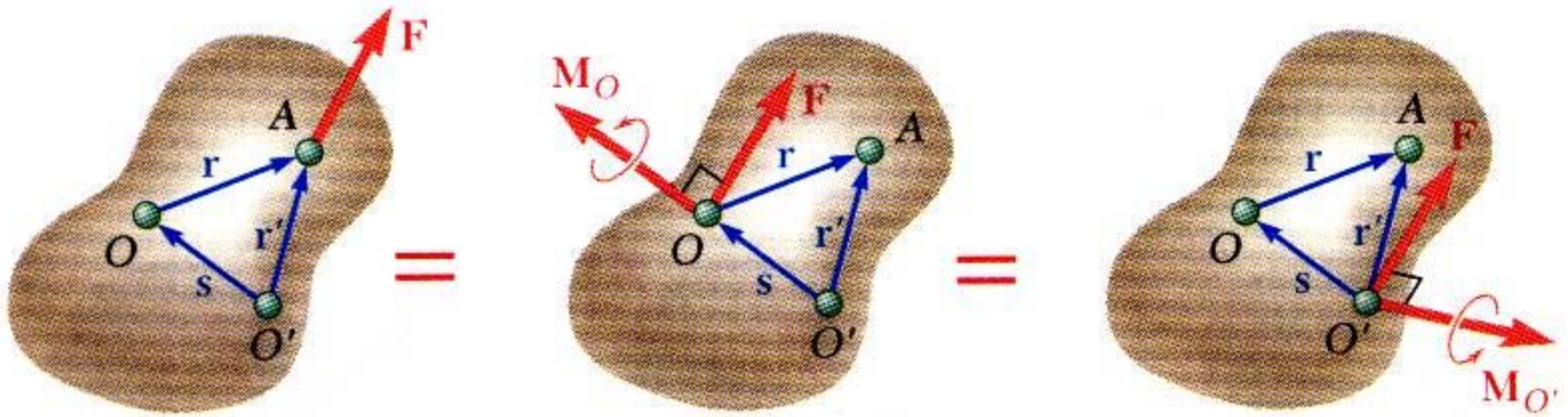


- Bir kuvvet çifti, kuvvet çiftinin oluşturduğu momentle aynı şiddete ve yöne sahip vektörle gösterilebilir.
- *Kuvvet çifti vektörleri* vektörel toplama kurallarına uyarlar.
- Kuvvet çifti vektörleri bileşenlerine ayrılabilir.
- Kuvvet çifti vektörleri serbest vektördürler. Uygulama noktası yerinin önemi yoktur.

Bir Kuvvetin O Noktasında Bir Kuvvet ve Kuvvet Çiftine Çözülmesi



- Kuvvet vektörü F , O noktasına kaydırılırken sadece basit taşıma işlemi yapılmaz.
- O noktasında F kuvvetiyle aynı şiddete sahip zıt vektörler yerleştirilirse sistemde değişikliğe neden olmaz.
- Bu üç kuvvet eşdeğer bir kuvvet ve kuvvet çifti ile yer değiştirebilir: Kuvvet-Kuvvet çifti sistemi.



- F kuvvetinin A noktasından O' noktasına kaydırılması farklı bir kuvvet çiftinin toplamını gerektirir, $M_{O'}$:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

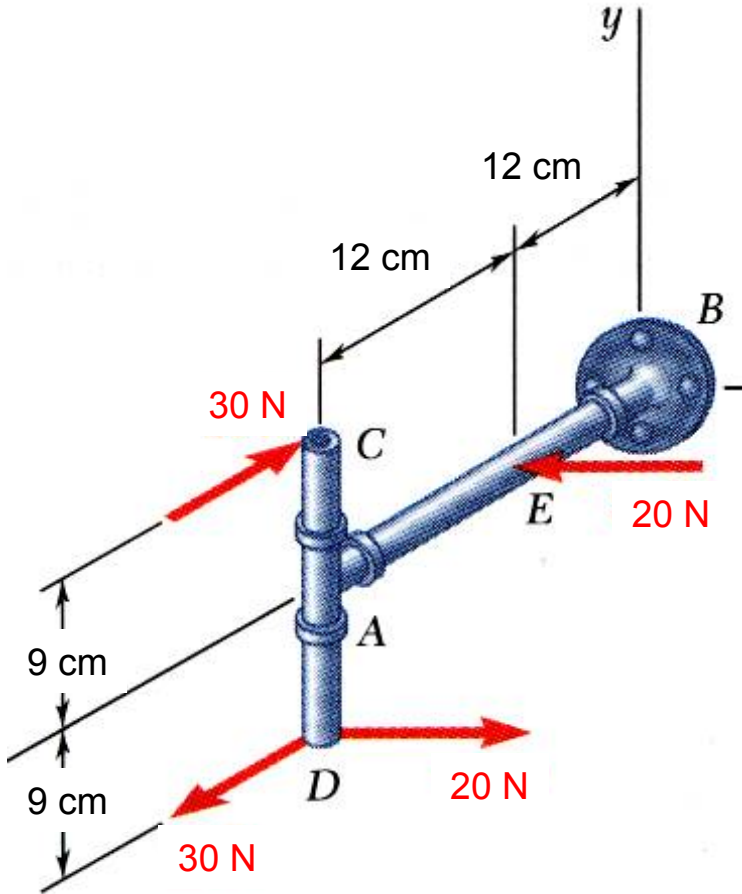
- F kuvvetinin O' noktalarına göre momentleri:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O'} &= \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{s}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{s} \times \vec{F} \\ &= \vec{M}_O + \vec{s} \times \vec{F}\end{aligned}$$

- Kuvvet-Kuvvet çifti sisteminin O noktasından O' noktasına taşınması, O noktasındaki kuvvetin O' noktasına göre momentinin toplamını gerektirir.

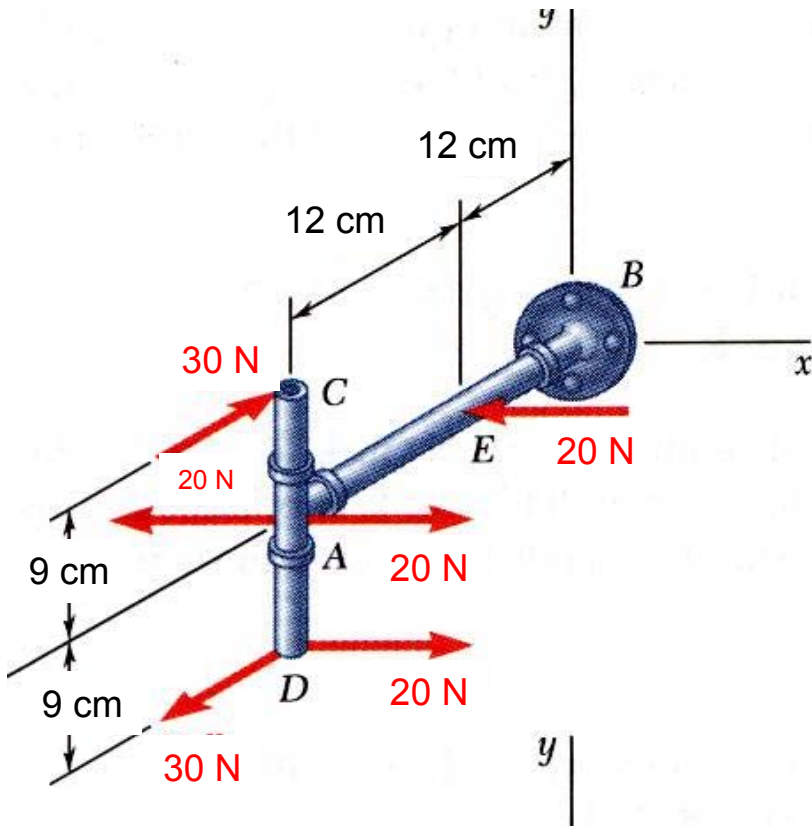
Örnek Problem 3.6

Şekildeki iki kuvvet çiftinin tek bir kuvvet çifti için bileşenlerini bulunuz.



Çözüm

- Verilen kuvvet çiftlerinin hesabını kolaylaştırmak için A noktasına $\pm x$ doğrultularında 20 N'luk iki kuvvet ilave edilebilir. Böylece toplamı kolay olan 3 kuvvet çifti oluşur.
- Alternatif olarak, iki kuvvetin uygulama noktası olduğu için (bu kuvvetlerin momenti sıfır olacaktır), D noktasına göre momentler hesaplanabilir.



- A noktasına 20 N şiddetli $\pm x$ yönlerinde iki kuvvet ilave edilirse:

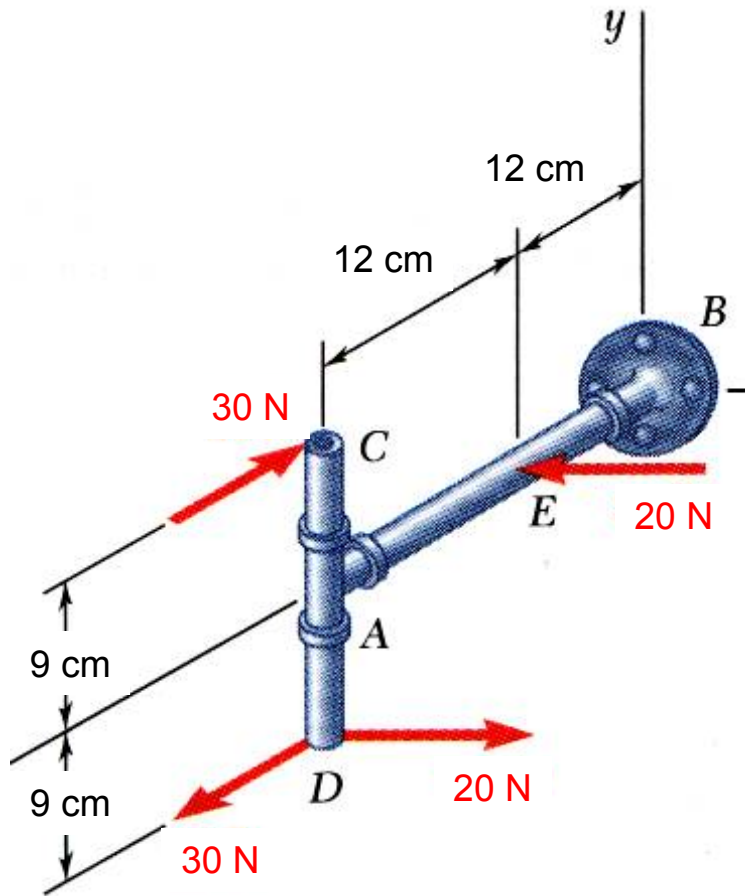
- Üç kuvvet çifti:

$$M_x = -(30 \text{ N})(18 \text{ cm}) = -540 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$M_y = +(20 \text{ N})(12 \text{ cm}) = +240 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$M_z = +(20 \text{ N})(9 \text{ cm}) = +180 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$\vec{M} = -(540 \text{ N} \cdot \text{cm})\vec{i} + (240 \text{ N} \cdot \text{cm})\vec{j} + (180 \text{ N} \cdot \text{cm})\vec{k}$$

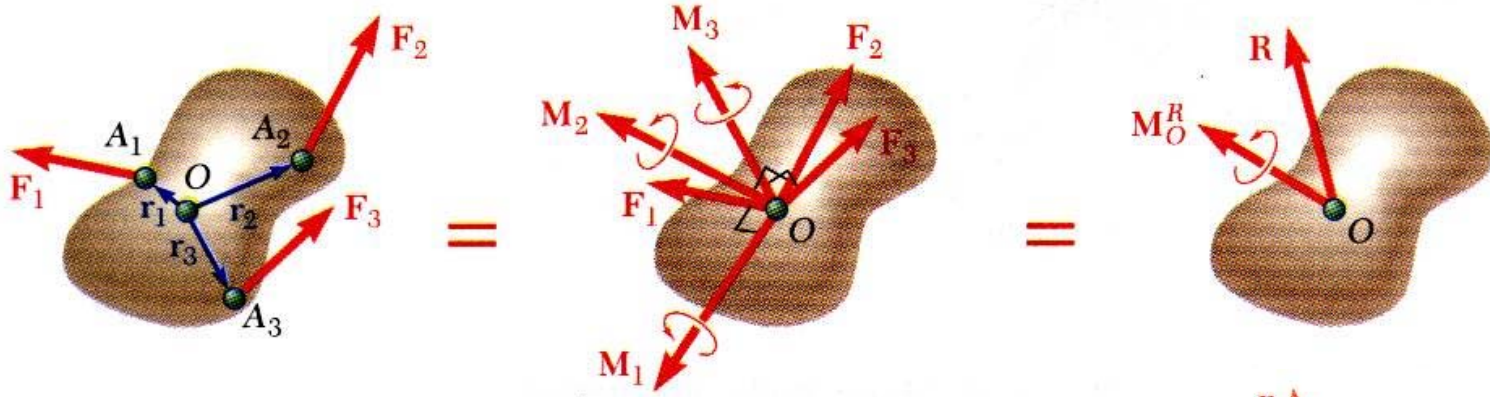


- Alternatif olarak, kuvvetlerin **D** noktasına göre momenti hesaplanabilir:
- **D** noktasına göre sadece **C** ve **E** noktalarındaki kuvvetlerin momentleri vardır.

$$\vec{M} = \vec{M}_D = (18 \text{ cm})\vec{j} \times (-30 \text{ N})\vec{k} + [(9 \text{ cm})\vec{j} - (12 \text{ cm})\vec{k}] \times (-20 \text{ N})\vec{i}$$

$$\vec{M} = -(540 \text{ N} \cdot \text{cm})\vec{i} + (240 \text{ N} \cdot \text{cm})\vec{j} + (180 \text{ N} \cdot \text{cm})\vec{k}$$

Kuvvet Sistemlerinin Kuvvet ve Kuvvet Çiftine Çözömlenmesi



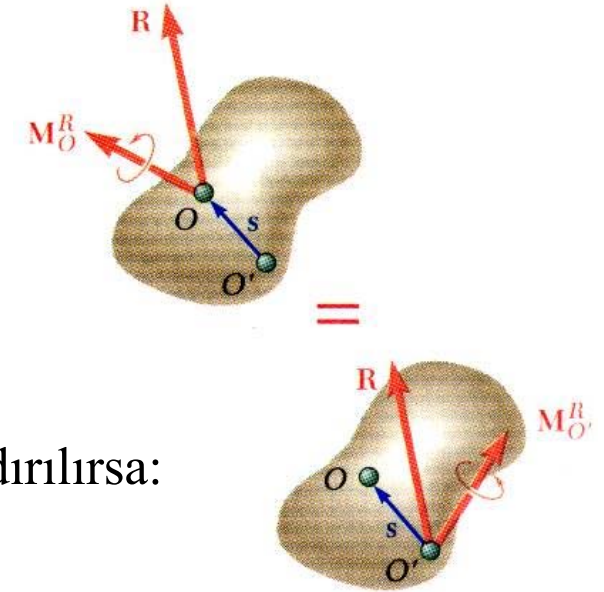
- Kuvvetler sistemi O noktasına göre bir kuvvet ve kuvvet çiftine çözümlenebilir.
- Bilşeke kuvvet ve kuvvet çifti vektörleri:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad \vec{M}_O^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

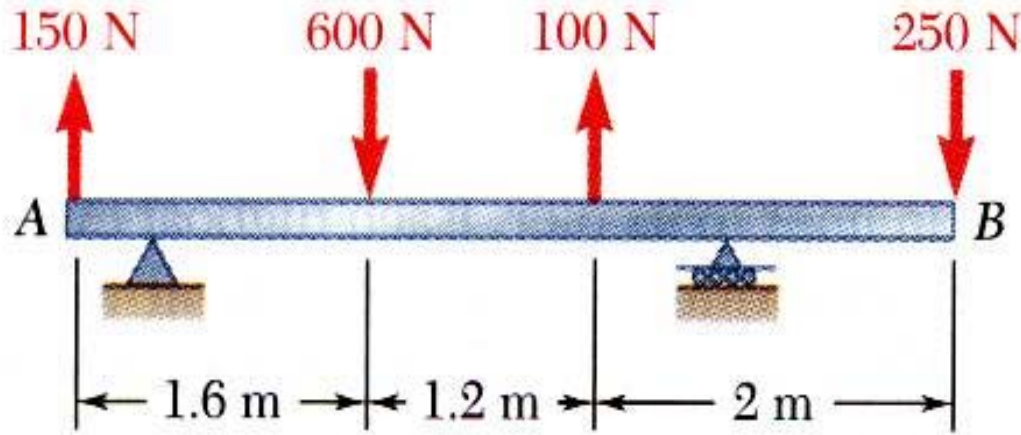
- O noktasındaki kuvvet ve moment çifti O' noktasına kaydırılırsa:

$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{M}_O^R + \vec{s} \times \vec{R}$$

- İki kuvvetler sistemi aynı kuvvet-kuvvet çiftine çözümlenebiliyorsa eşdeğerdir.



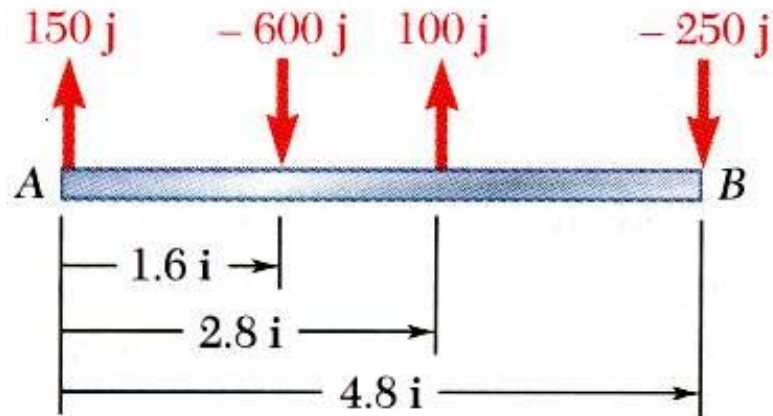
Örnek Problem 3.8



Şekildeki kiriş için, kuvvetler sistemini

- (a) *A* noktasındaki eşdeğer kuvvet-kuvvet çiftine
- (b) *B* noktasındaki eşdeğer kuvvet-kuvvet çiftine ve
- (c) tek bir kuvvete indirgeyiniz

Not: Mesnet tepkileri katılmayacağı için verilen kuvvet sistemi etkisi altında kiriş dengede değildir.



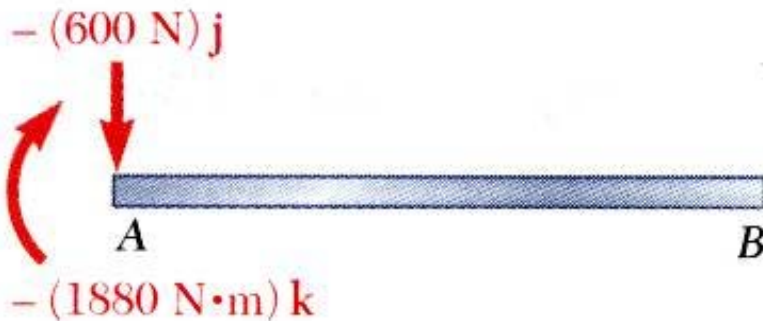
a) Kuvvetleri A noktasına taşırsak:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum \vec{F} \\ &= (150 \text{ N})\vec{j} - (600 \text{ N})\vec{j} + (100 \text{ N})\vec{j} - (250 \text{ N})\vec{j}\end{aligned}$$

$$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_A^R &= \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \\ &= (1.6\vec{i}) \times (-600\vec{j}) + (2.8\vec{i}) \times (100\vec{j}) \\ &\quad + (4.8\vec{i}) \times (-250\vec{j})\end{aligned}$$

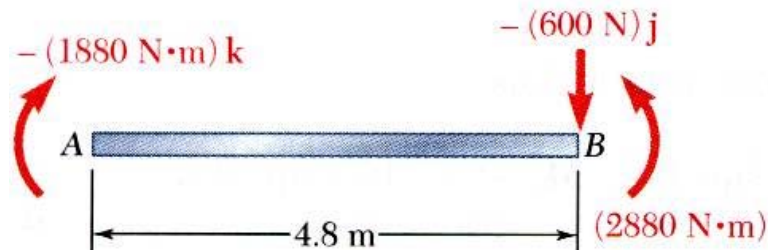
$$\vec{M}_A^R = -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$



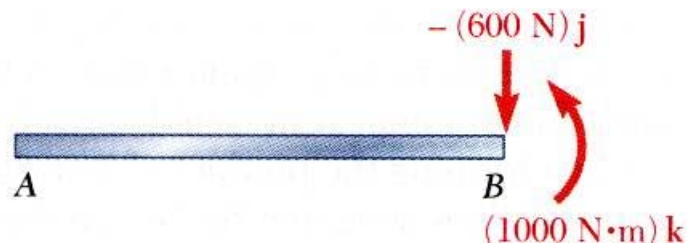


b) B noktasındaki eşdeğer kuvvet-kuvvet çiftini bulmak için A noktasındaki kuvvet-kuvvet çiftini kullanabiliriz.

$$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}$$

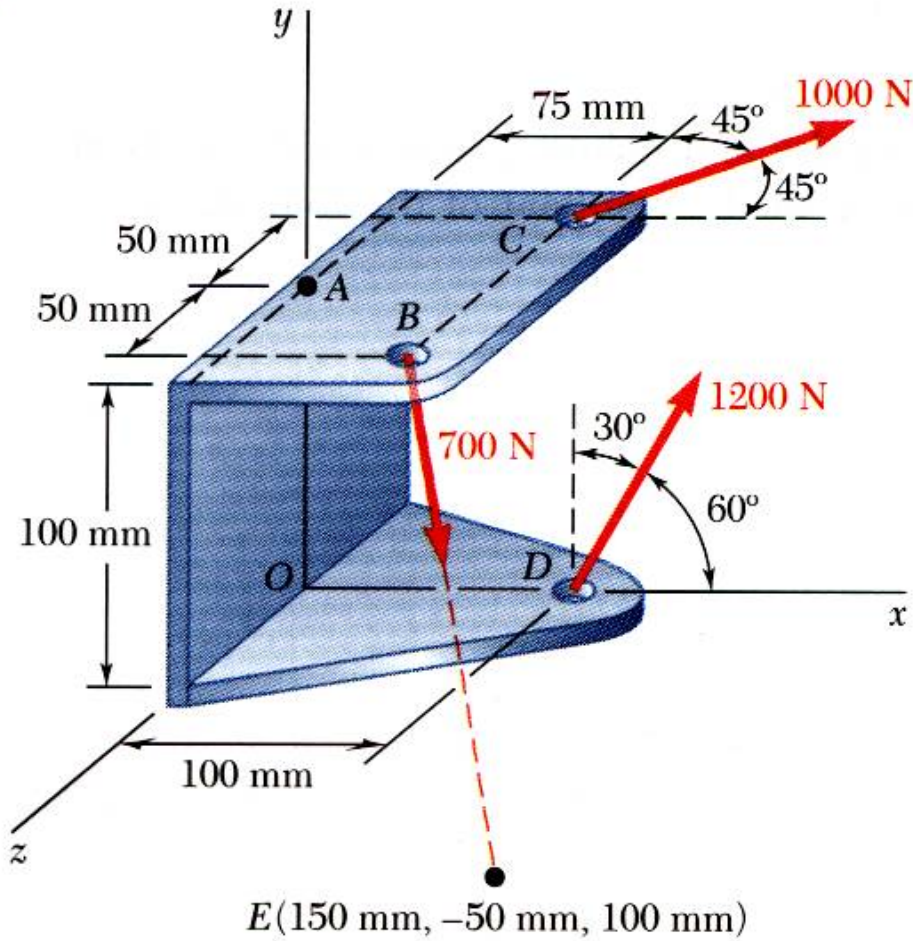


$$\begin{aligned}\vec{M}_B^R &= \vec{M}_A^R + \vec{r}_{B/A} \times \vec{R} \\ &= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k} + (-4.8 \text{ m})\vec{i} \times (-600 \text{ N})\vec{j} \\ &= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k} + (2880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}\end{aligned}$$

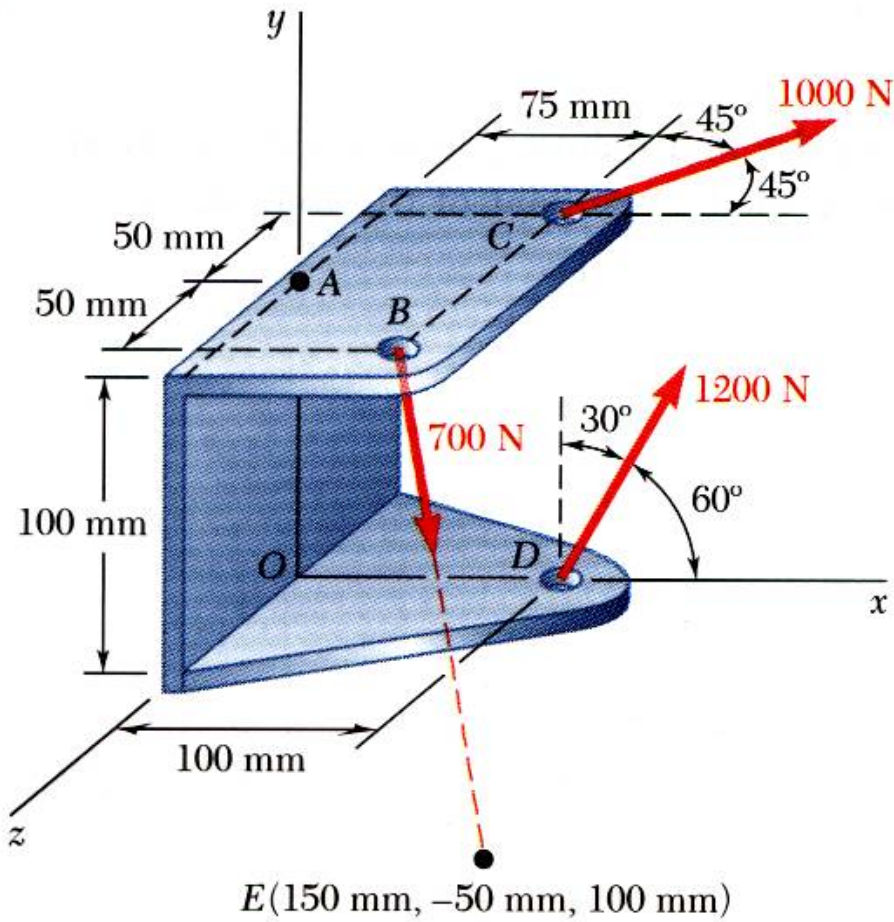


$$\vec{M}_B^R = +(1000 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$

Örnek Problem 3.10



Şekildeki dirseğe etki eden 3 kuvvet yerine A noktasına etkiyen eşdeğer bir kuvvet-kuvvet çifti bulunuz.



Kuvvet vektörlerinin A noktasına göre yer vektörleri:

$$\vec{r}_{B/A} = 0.075\vec{i} + 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0.075\vec{i} - 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{D/A} = 0.100\vec{i} - 0.100\vec{j} \text{ (m)}$$

- Kuvvetlerin bileşenleri:

$$\vec{F}_B = (700 \text{ N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\vec{i} - 0.857\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k} \text{ (N)}$$

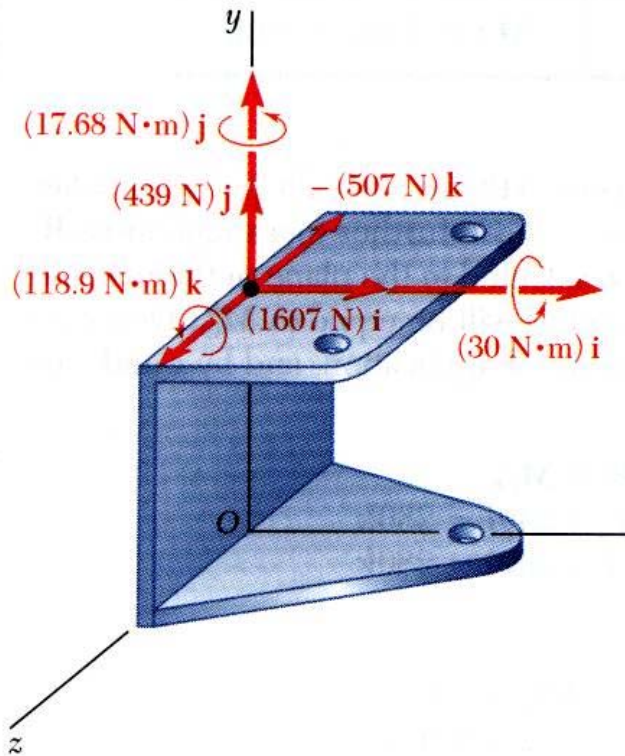
$$\begin{aligned}\vec{F}_C &= (1000 \text{ N})(\cos 45^\circ\vec{i} - \cos 45^\circ\vec{j}) \\ &= 707\vec{i} - 707\vec{j} \text{ (N)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_D &= (1200 \text{ N})(\cos 60^\circ\vec{i} + \cos 30^\circ\vec{j}) \\ &= 600\vec{i} + 1039\vec{j} \text{ (N)}\end{aligned}$$

- Eşdeğer Kuvvet:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum \vec{F} \\ &= (300 + 707 + 600)\vec{i} \\ &\quad + (-600 + 1039)\vec{j} \\ &\quad + (200 - 707)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \text{ (N)}}$$



- Kuvvet Çifti:

$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

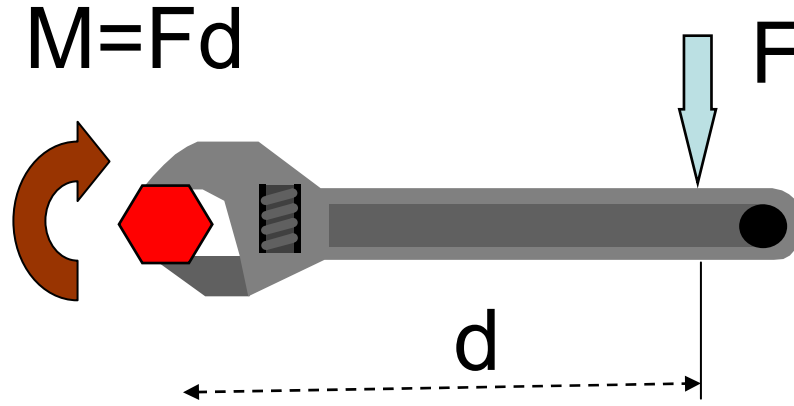
$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\vec{j}$$

$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_A^R = 30\vec{i} + 17.68\vec{j} + 118.9\vec{k}}$$

Civata sıkılması



Kapı açılması

