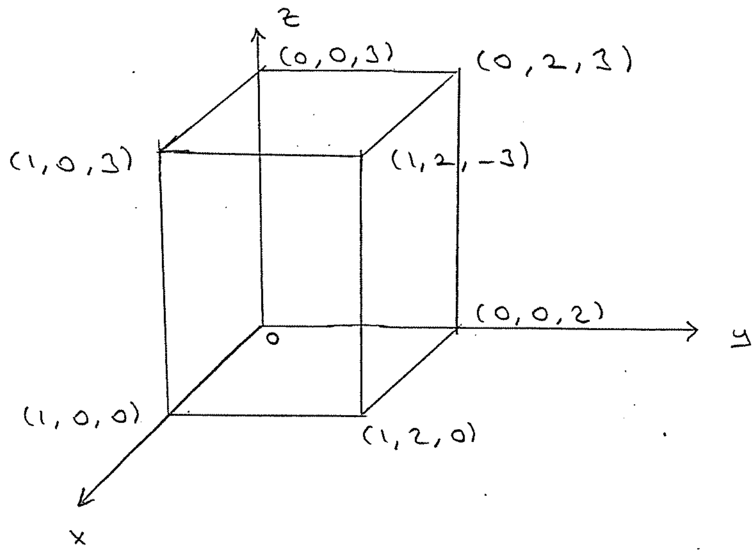
Soru-1 $\vec{A} = 3x\,\vec{e_x} + (y-3)\,\vec{e_y} + (2-z)\,\vec{e_z}$ vektörü ve şekilde verilen $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ ve $z=3$ düzlemleri ile sınırlandırılmış dikdörtgen prizmanın kapalı yüzeyini gözönüne alarak diverjans teoremini ispat ediniz.



Diverjans teoremine göre,

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}\,dv = \oint_S \vec{A}\,d\vec{S}$$

İlk olarak $\oint_S \vec{A}\,d\vec{S}$ hesaplansın.

$x=0$ düzlemi için,

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= 3\cdot 0\cdot\vec{e_x} + (y-3)\,\vec{e_y} + (2-z)\,\vec{e_z} \\ d\vec{S} &= -\vec{e_x}\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \rightarrow \int_S \vec{A}\,d\vec{S} = 0$$

$x=1$ düzlemi için,

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= 3\cdot\vec{e_x} + (y-3)\,\vec{e_y} + (2-z)\,\vec{e_z} \\ d\vec{S} &= \vec{e_x}\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \rightarrow \int_S \vec{A}\,d\vec{S} = \int_{z=0}^{3}\int_{y=0}^{2} 3\,dy\,dz$$

$$= 18$$

y=0 düzlemi için,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = 3x\,\vec{e}_x - 3\,\vec{e}_y + (2-z)\,\vec{e}_z \\ d\vec{S} = -\vec{e}_y\,dx\,dz\end{array}\right\} \rightarrow \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{3} 3\,dz\,dx = 9$$

y=2 düzlemi için,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = 3x\,\vec{e}_x - \vec{e}_y + (2-z)\,\vec{e}_z \\ d\vec{S} = \vec{e}_y\,dx\,dz\end{array}\right\} \rightarrow \int_S \vec{A}\,d\vec{S} = \int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{3} -dz\,dx = -3$$

z=0 düzlemi için,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = 3x\,\vec{e}_x + (y-3)\,\vec{e}_y + 2\,\vec{e}_z \\ d\vec{S} = -\vec{e}_z\,dx\,dy\end{array}\right\} \rightarrow \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1} -2\,dx\,dy = -4$$

z=3 düzlemi için,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = 3x\,\vec{e}_x + (y-3)\,\vec{e}_y - \vec{e}_z \\ d\vec{S} = \vec{e}_z\,dx\,dy\end{array}\right\} \rightarrow \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1} -dx\,dy = -2$$

Böylece, $\oint_S \vec{A}\,d\vec{S} = 0 + 18 + 9 - 3 - 4 - 2 = \underset{7}{18}$

Eşitliğin diğer tarafına bakıldığında,

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(y-3) + \frac{\partial}{\partial z}(2-z) = 3$$

$$\int_{z=0}^{3}\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1} 3\,dx\,dy\,dz = \underset{7}{18}$$

Böylece Diverjans teoremini doğrulanmış olur.

Soru-2 Küresel koordinatlarda $\vec{E} = 2r^2 \vec{e_r}$ elektrik alanı için $r = 3\,m$ yarıçaplı küreyi göz önüne alarak diverjans teoremini ispat ediniz.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\, dv = \iint_S \vec{E}\, d\vec{S}$$

$\vec{E} = 2r^2 \vec{e_r} \rightarrow \vec{E} = \vec{E}(r)$ olduğundan,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (2r^4) = 8r$$

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{3} 8r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{3} 8r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{3} 8r^3 (-\cos\theta) \Big|_{\theta=0}^{\pi} dr = 648\pi$$

Eşitliğin sağ tarafına bakıldığında,

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2r^2 \vec{e_r}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \vec{e_r}$$

$$= 2r^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2r^4 \int_0^{2\pi} (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi} d\phi = 2r^4 \cdot 2 \cdot \phi \Big|_{\phi=0}^{2\pi} = 648\pi$$

Böylece diverjans teoremi ispat edilmiş oldu.