

### 3.2.4. Simpleks Yöntemde Duyarlılık Analizleri

Duyarlılık analizinde doğrusal programlama modelinin parametrelerindeki değişikliklerinin optimal çözüm üzerindeki etkileri araştırılmaktadır. Herhangi bir parametredeki değişimin optimal çözüme etkisi diğer tüm parametrelerin değerleri sabit tutularak incelenir. Modelde kullanılan parametrelere  $(c_j, b_i, a_{ij})$  bağlı olarak duyarlılık analizinde

- Sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmelerin
- Amaç fonksiyonu katsayılarındaki değişmelerin
- Teknolojik katsayılarda meydana gelen değişmelerin

optimal çözüme olan etkileri problemi yeniden çözmeksizin incelenebilir.

#### a)Sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmeler

**Bir doğrusal programlama modelinde yer alan kısıtların sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmeler optimal çözümdeki çözüm sütunu değerlerini etkiler. Optimal tablodaki çözüm sütunu değerleri negatif değerli olmadığı sürece, mevcut çözüm uygun ve optimal bir çözüm olarak kalır. Dolayısıyla, sağ taraf sabitlerindeki değişmelerin etkileri, çözümün uygun ve optimal bir çözüm olarak kaldığı, değişim aralığı belirlenerek incelenebilir. Belirlenen aralık ilgili kaynağın gölge fiyatı değişmeksizin ne kadar artırılıp azaltılabileceğini de gösterir.**

<sup>14</sup>Aşağıdaki problem bu amaçla ele alınmıştır:

Örnek 2.  $Z_{maks.} = 4X_1 + 5X_2$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 10 && (\text{işgücü, saat/gün}) \\ 6X_1 + 6X_2 &\leq 36 && (\text{Hammadde1, kg/gün}) \\ 8X_1 + 4X_2 &\leq 40 && (\text{Hammadde2, kg/gün}) \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

<sup>2</sup> LEE, S.M., MOORE L.J. ve TAYLOR, B.W., (1981),Management Science, Wm.C.Brown Company,U.S.A..

Tablo 4. Örnek 2 'ye ait Başlangıç Simpleks Tablosu

	4	5	0	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
0 S <sub>1</sub>	1	2	1	0	0	10
0 S <sub>2</sub>	6	6	0	1	0	36
0 S <sub>3</sub>	8	4	0	0	1	40
Z <sub>j</sub>	0	0	0	0	0	0
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	4	5	0	0	0	

Tablo 5. Örnek 2 'ye ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	4	5	0	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
5 X <sub>2</sub>	0	1	1	-1/6	0	4
4 X <sub>1</sub>	1	0	-1	1/3	0	2
0 S <sub>3</sub>	0	0	4	-2	1	8
Z <sub>j</sub>	4	5	1	1/2	0	28
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	0	0	-1	-1/2	0	

### İşgücü kapasitesindeki değişimler

$$Z_{\text{maks.}} = 4X_1 + 5X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10 + \Delta \quad (\text{işgücü, saat/gün})$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 36 \quad (\text{Hammadde1, kg/gün})$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 40 \quad (\text{Hammadde2, kg/gün})$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Tablo 6. Örnek 2'ye ait Başlangıç Simpleks Tablosu (b<sub>1</sub>=10+Δ)

	4	5	0	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
0 S <sub>1</sub>	1	2	1	0	0	10 + 1Δ
0 S <sub>2</sub>	6	6	0	1	0	36 + 0Δ
0 S <sub>3</sub>	8	4	0	0	1	40 + 0Δ
Z <sub>j</sub>	0	0	0	0	0	0
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	4	5	0	0	0	

Tablo 7. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu (b<sub>1</sub>=10+Δ)

	4	5	0	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
5 X <sub>2</sub>	0	1	1	-1/6	0	4 + 1Δ
4 X <sub>1</sub>	1	0	-1	1/3	0	2 - 1Δ
0 S <sub>3</sub>	0	0	4	-2	1	8 + 4Δ
Z <sub>j</sub>	4	5	1	1/2	0	28+Δ
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	0	0	-1	-1/2	0	

Farklı  $b_1$  Değerleri için Örnek 2'ye ait  
Optimal Simpleks Çözüm Tabloları

Tablo 8. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $b_1=12$ )

	4	5	0	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	
5 $X_2$	0	1	1	-1/6	0	6
4 $X_1$	1	0	-1	1/3	0	0
0 $S_3$	0	0	4	-2	1	16
$Z_j$	4	5	1	1/2	0	30
$C_j-Z_j$	0	0	-1	-1/2	0	

Tablo 9. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $b_1=9$ )

	4	5	0	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	
5 $X_2$	0	1	1	-1/6	0	3
4 $X_1$	1	0	-1	1/3	0	3
0 $S_3$	0	0	4	-2	1	4
$Z_j$	4	5	1	1/2	0	27
$C_j-Z_j$	0	0	-1	-1/2	0	

Tablo 10. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $b_1=11$ )

	4	5	0	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	
5 $X_2$	0	1	1	-1/6	0	5
4 $X_1$	1	0	-1	1/3	0	1
0 $S_3$	0	0	4	-2	1	12
$Z_j$	4	5	1	1/2	0	29
$C_j-Z_j$	0	0	-1	-1/2	0	

## b) Amaç fonksiyonu katsayılarındaki değişmeler

Bir doğrusal programlama modelinin amaç fonksiyonunda yer alan katsayılarda meydana gelen değişmeler optimal çözümdeki  $C_j-Z_j$  satırındaki değerleri etkiler. Optimal tablodaki  $C_j-Z_j$  satırındaki değerler maksimizasyon amaçlı problemde pozitif, minimizasyon amaçlı problemde negatif değerler olmadığı sürece, mevcut çözüm optimal bir çözüm olarak kalır. Amaç fonksiyonu katsayılarında meydana gelen değişmelerin etkileri, mevcut çözümün optimal bir çözüm olarak kaldığı, değişim aralığı belirlenerek incelenebilir. Amaç fonksiyonu katsayılarındaki değişmeler, karar değişkeninin optimal tabloda temel dışı değişken ve temel değişken olma durumuna göre incelenebilir.

<sup>15</sup>Aşağıdaki problem bu amaçla ele alınmıştır:

### Örnek 3

$$\begin{aligned} Z_{\text{maks.}} &= 6X_1 + 4X_2 \\ 2X_1 + 6X_2 &\leq 12 && (\text{işgücü, saat/gün}) \\ 4X_1 + 4X_2 &\leq 16 && (\text{Hammadde, kg/gün}) \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tablo 11. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	6	4	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	
0 $S_1$	0	4	1	-1/2	4
6 $X_1$	1	1	0	1/4	4
$Z_j$	6	6	0	3/2	24
$C_j-Z_j$	0	-2	0	-3/2	

<sup>15</sup> LEE, S.M., MOORE L.J. ve TAYLOR, B.W., (1981), Management Science, Wm.C.Brown Company, U.S.A.

### i. Temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısındaki değişmeler

Bir temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişim aralığı, değişkenin optimal simpleks tablodaki  $C_j-Z_j$  satırındaki değerinden yararlanılarak belirlenebilir. Bu değere  $\Delta$  ilave edilerek optimallik şartı aranır.

$$Z_{\text{maks.}} = 6X_1 + (4 + \Delta)X_2$$

$$2X_1 + 6X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + 4X_2 \leq 16$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Tablo 12. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $C_2=4 + \Delta$ )

	6	4+ $\Delta$	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	
0 $S_1$	0	4	1	-1/2	4
6 $X_1$	1	1	0	1/4	4
$Z_j$	6	6	0	3/2	24
$C_j-Z_j$	0	-2 + $\Delta$	0	-3/2	

### ii. Temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısındaki değişmeler

Bir temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişim aralığı, değişkene ait satırdaki temel olmayan değişken değerlerinin  $\Delta$  ile çarpıldıktan sonra karşı gelen  $C_j-Z_j$  satırındaki değerlerden çıkarılarak ve optimallik şartı sağlanarak belirlenebilir.

$$Z_{\text{maks.}} = (6 + \Delta_1)X_1 + 4X_2$$

$$2X_1 + 6X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + 4X_2 \leq 16$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Tablo 13. Örnek 3'e ait Başlangıç Simpleks Tablosu ( $C_1=6 + \Delta_1$ )

	6+ $\Delta_1$	4	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	
0 $S_1$	2	6	1	0	12
0 $S_2$	4	4	0	1	16
$Z_j$	0	0	0	0	0
$C_j-Z_j$	6+ $\Delta_1$	4	0	0	

Tablo 14. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu  
( $C_1=6 + \Delta_1$ )

	$6 + \Delta_1$ $X_1$	4 $X_2$	0 $S_1$	0 $S_2$	
0 $S_1$	0	4	1	-1/2	4
$(6 + \Delta_1)X_1$	1	1	0	1/4	4
$Z_j$	$6 + \Delta_1$	$6 + \Delta_1$	0	$3/2 + \Delta_1/4$	$24 + 4\Delta_1$
$C_j - Z_j$	0	$-2 - \Delta_1$	0	$-3/2 - \Delta_1/4$	

Farklı  $C_1$  ve  $C_2$  Değerleri için Örnek 3'e ait  
Optimal Simpleks Çözüm Tabloları

Tablo 15. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu  
 $\Delta_2=2, (C_2=6)$

	6 $X_1$	6 $X_2$	0 $S_1$	0 $S_2$	
0 $S_1$	0	4	1	-1/2	4
6 $X_1$	1	1	0	1/4	4
$Z_j$	6	6	0	3/2	24
$C_j - Z_j$	0	0	0	-3/2	

Tablo 16. Örnek 3'e Optimal Simpleks Çözüm Tablosu  
 $\Delta_2=1, (C_2=5)$

	6 $X_1$	5 $X_2$	0 $S_1$	0 $S_2$	
0 $S_1$	0	4	1	-1/2	4
6 $X_1$	1	1	0	1/4	4
$Z_j$	6	6	0	3/2	24
$C_j - Z_j$	0	-1	0	-3/2	

Tablo 17. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu  
 $\Delta_1 = -2, (C_1=4)$

	4 $X_1$	4 $X_2$	0 $S_1$	0 $S_2$	
0 $S_1$	0	4	1	-1/2	4
4 $X_1$	1	1	0	1/4	4
$Z_j$	4	4	0	1	16
$C_j - Z_j$	0	0	0	-1	

Tablo 18. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu  
 $\Delta_1=3, (C_1=9)$

	9	4	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	
0 $S_1$	0	4	1	-1/2	4
9 $X_1$	1	1	0	1/4	4
$Z_j$	9	9	0	9/4	36
$C_j-Z_j$	0	-5	0	-9/4	

Örnek 4. Aşağıda verilen problemin amaç fonksiyonu katsayılarında ve sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkilerini inceleyiniz.

$$Z_{\min.} = 14X_1 + 10X_2 + 4X_3 + 8X_4$$

$$\begin{aligned} X_3 &\geq 40 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 85 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 &\leq 320 \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4 &\leq 410 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tablo 19. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	14	10	4	8	0	M	M	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$E_1$	$A_1$	$A_2$	$S_1$	$S_2$	
4 $X_3$	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	75
14 $X_1$	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10
0 $E_1$	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	35
0 $S_2$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	5
$Z_j$	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	440
$C_j-Z_j$	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Farklı b Değerleri için Örnek 4'e ait  
 Optimal Simpleks Çözüm Tabloları

Tablo 20. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $b_1=39$ )

	14	10	4	8	0	M	M	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$E_1$	$A_1$	$A_2$	$S_1$	$S_2$	
4 $X_3$	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	75
14 $X_1$	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10
0 $E_1$	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	36
0 $S_2$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	5
$Z_j$	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	440
$C_j-Z_j$	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Tablo 21. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $b_2=84$ )

	14	10	4	8	0	M	M	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$E_1$	$A_1$	$A_2$	$S_1$	$S_2$	
4 $X_3$	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	76
14 $X_1$	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	8
0 $E_1$	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	36
0 $S_2$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	6
$Z_j$	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	416
$C_j-Z_j$	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Tablo 22. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $b_3=319$ )

	14	10	4	8	0	M	M	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$E_1$	$A_1$	$A_2$	$S_1$	$S_2$	
4 $X_3$	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	74½
14 $X_1$	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10½
0 $E_1$	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	34½
0 $S_2$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	6
$Z_j$	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	445
$C_j-Z_j$	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Tablo 23. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu ( $b_4=409$ )

	14	10	4	8	0	M	M	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$E_1$	$A_1$	$A_2$	$S_1$	$S_2$	
4 $X_3$	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	75
14 $X_1$	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10
0 $E_1$	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	35
0 $S_2$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	4
$Z_j$	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	440
$C_j-Z_j$	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Örnek 5. Aşağıda verilen problemin amaç fonksiyonu katsayılarında ve sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkilerini inceleyiniz.

$$Z_{\text{maks.}} = 14X_1 + 10X_2 + 4X_3 + 8X_4$$

$$\begin{aligned} X_3 &\geq 40 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 85 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 &\leq 320 \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4 &\leq 410 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$



Tablo 24. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	E <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	
4 X <sub>3</sub>	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 X <sub>1</sub>	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	45
0 S <sub>1</sub>	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	70
0 S <sub>2</sub>	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	75
Z <sub>j</sub>	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	790
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

Farklı b Değerleri için Örnek 5'e ait  
Optimal Simpleks Çözüm Tabloları

Tablo 25. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b<sub>1</sub>=39)

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	E <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	
4 X <sub>3</sub>	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	39
14 X <sub>1</sub>	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	46
0 S <sub>1</sub>	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	72
0 S <sub>2</sub>	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	77
Z <sub>j</sub>	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	800
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

Tablo 26. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b<sub>2</sub>=84)

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	E <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	
4 X <sub>3</sub>	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 X <sub>1</sub>	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	44
0 S <sub>1</sub>	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	72
0 S <sub>2</sub>	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	78
Z <sub>j</sub>	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	776
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

Tablo 27. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b<sub>3</sub>=319)

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	E <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	
4 X <sub>3</sub>	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 X <sub>1</sub>	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	45
0 S <sub>1</sub>	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	69
0 S <sub>2</sub>	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	75
Z <sub>j</sub>	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	790
C <sub>j</sub> -Z <sub>j</sub>	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

Tablo 28. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu( $b_4=409$ )

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$E_1$	$A_1$	$A_2$	$S_1$	$S_2$	
4 $X_3$	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 $X_1$	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	45
0 $S_1$	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	70
0 $S_2$	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	74
$Z_j$	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	790
$C_j-Z_j$	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

#### KAYNAKLAR

- LEE, S.M., MOORE L.J. ve TAYLOR, B.W., (1981), Management Science, Wm.C.Brown Company,U.S.A.
- RENDER, B. & STAIR, R. M., (1992), Introduction to Management Science, Allyn and Bacon, U.S.A.
- WALKER,R.,C.,(1999), Introduction to Mathematical Programming, Prentice Hall, U.S.A.
- WINSTON, W., (1991), Operations Reseach Applications and Algorithms, 2<sup>nd</sup> Edit., PWS-KENT Publishing Com., U.S.A