3.2. DP Modellerinin Simpleks Yöntem ile Çözümü

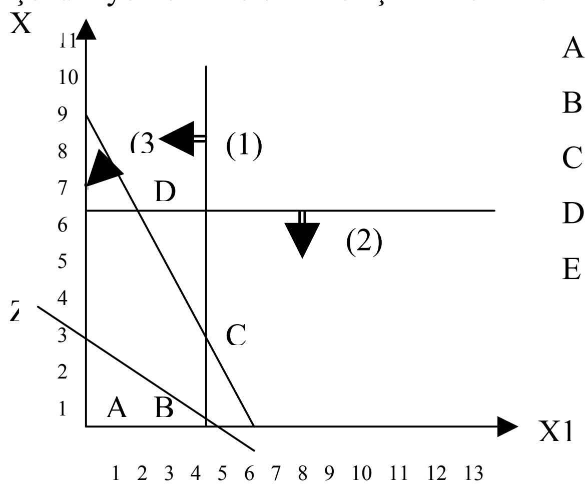
3.2.1. Primal Simpleks Yöntem

Grafik çözüm yönteminde gördüğümüz gibi optimal çözüm noktası, her zaman uygun çözüm alanının bir köşe noktası ya da uç noktası ile ilişkiliydi. Simpleks yöntem esas olarak işte bu temel fikre dayanmaktadır. Bir başka deyişle simpleks yöntem cebrik bir yöntem olmasına rağmen dayandığı temel fikir geometriktir. Bu nedenle simpleks yöntem grafik yöntem ile birlikte incelenecektir. Bunun için model kurma dersinde incelediğimiz cam fabrikası örneğini ele alacağız.

ÖRNEK: Cam Fabrikası örneğini ele alalım.

ÇÖZÜM: Simpleks yöntem evre evre grafik çözüm yöntemi ile birlikte açıklanacaktır.

$$
\begin{aligned}
Z_{max.} &= 3x_1 + 5x_2 \\
x_1 & \leq 4 \\
2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\
x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$



A (0, 0)
B (4, 0)
C (4, 3)
D (2, 6)
E (0, 6)

Örneğimizde uygun çözüm alanı ABCDE'dir. Simpleks yöntem, uygun çözüm alanı içinde uygun bir köşe noktasından (orijinden) başlayarak sistematik olarak bir sonraki uygun köşe noktasına, bu noktadan yine bir sonraki uygun köşe noktasına ilerleyen ve optimal çözüm bileşenine ulaşıldığında sonuçlanan tekrarlamalı bir algoritmadır.

Simpleks algoritması orijin --A (0,0)-- ile çözüme başlar ve bu nokta başlangıç çözüm noktası olarak ifade edilir. Algoritma daha sonra bitişik komşu köşe noktaya doğru ilerler. Algoritmanın ilerlediği nokta, B ya da E noktası olabilir. Özel olarak hangi noktanın seçileceği kararı, amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayılarına bağlıdır. x_2'nin amaç fonksiyonu katsayısı, x_1'in amaç fonksiyonu katsayısından (5>3) daha büyük olduğu için çözüm x_2'nin artarak ilerlediği köşe noktası olan E noktasına doğru ilerler. E noktasında, amaç fonksiyonunun değerini artıracak diğer bir komşu köşe noktası olup olmadığını belirlemek amacıyla süreç tekrarlanır. Benzer şekilde amaç fonksiyonunun değerini artıracak bir sonraki komşu köşe noktasına ilerlenir. Bu nokta D noktasıdır. D noktası optimal çözüm bileşenini verdiği için algoritma durur.

Simpleks yöntemde bir sonraki köşe noktasının seçimini belirleyen iki tane kural vardır. Bunlar:

1) Bir sonraki köşe noktası mevcut köşe noktasına komşu olmalıdır. Örnek olarak çözüm, A noktasından direkt olarak D noktasına ilerleyemez. Bu nedenle uygun çözüm alanındaki komşu köşe noktalarının sırayla izlenmesi gerekir.
2) Çözüm hiçbir zaman bir önceki çözüm noktasına doğru geri yönde ilerleyemez.

Simpleks algoritmasında aşağıdaki evreler izlenir:

Evre 1: DP Problemi Standart Formda Yazılır

Probleme gölge, artık ve yapay değişkenlerin eklenmesi ile eşitsizlik şeklindeki tüm kısıt denkleri (=) şeklinde ifade edilir.

$$Z_{maks.} = 3x_1 + 5x_2 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$

$$\begin{aligned}
x_1 \quad + S_1 \quad &= 4 \\
2x_2 \quad + S_2 \quad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 \quad + S_3 &= 18 \\
x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Evre 2: Başlangıç Simpleks Tablo Hazırlanır

Bu evrede problem bir tablo şeklinde özetlenir. Bu tablo Evre 1'deki standart DP problemini matris halinde ifade etmektedir ve aynı zamanda başlangıç çözümü temsil etmektedir. Bu tabloya başlangıç simpleks tablo adı verilmektedir. Tablonun bölümleri aşağıda açıklanmıştır:

	c_j **(1)**	3	5	0	0	0	
c_j **(4)**	**(2)**x_j / x_i**(3)**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	**(6)** Ç.S.
0	S_1	1 **(5)**	0	1	0	0	4
0	S_2	0	[2]	0	1	0	12
0	S_3	3	2	0	0	1	18
	Z_j **(7)**	0	0	0	0	0	0
	c_j-Z_j **(8)**	3	5	0	0	0	

(1) c_j Amaç Satırı: Bu satırdaki sayılar, değişkenlerin (karar, gölge, artık ve yapay) amaç fonksiyonu katsayıları olan c_j değerlerinden oluşmaktadır.

(2) x_j Değişkenler Satırı: DP modelinde bulunan bütün değişkenlerin (karar, gölge, artık ve yapay) yazılması ile edilen satırdır.

(3) x_i Temel Değişkenler Sütunu: Bu sütun çözümde yer alan değişkenleri gösterir. Bu nedenle bu sütundaki değişkenlere "temel değişkenler" ya da "çözüme giren değişkenler" adı verilir. Başlangıç simpleks tabloda temel değişkenler kısıt denklemlerinin yönüne bağlı olarak gölge ya da yapay değişkenlerden oluşmaktadır.

Başlangıç tabloda,

--- (≤) şeklindeki bir kısıt denkleminin ifade edildiği satırın temel değişkenler sütununda gölge değişkenler yer alır.

--- (=) ya da (≥) şeklindeki bir kısıt denkleminin ifade edildiği satırın temel değişkenler sütununda yapay değişkenler yer alır.

Başlangıç tabloda yer alan gölge ve yapay değişkenler -temel değişkenler- tabloda birim matrisi oluşturmaktadırlar.

(4) c_j Amaç Sütunu: Temel değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarından (c_j) oluşan sütundur.

(5) Teknolojik Katsayılar Matrisi: Kısıt denklemlerinde yer alan teknolojik katsayılardan oluşan matristir. m tane kısıt denklemli n tane değişkenli bir DP modelinde teknolojik katsayılar matrisinin boyutu mxn'dir. Örneğimizde matrisin boyutu 3x5'dir.

(6) Çözüm Sütunu: Bu sütun temel değişkenlerin çözüm değerlerini verir. Bu sütundaki değerlerin ilk tablodan en iyi çözümü veren son tabloya kadar daima pozitif ya da "0" olması gerekir. Sütunda (-) bir değerin olması olanaksız çözümü ya da hatalı işlemi gösterir.

(7) Z_j Satırı: Z_j satırı, teknolojik katsayılar matrisindeki sütunlar ile amaç sütunundaki bilgilerden yararlanılarak elde edilir. Her sütun için ayrı ayrı hesaplanacak olan Z_j değerleri, o sütundaki teknolojik katsayılar ile amaç sütunundaki karşıt sayıların çarpımlarının toplamına eşittir.

Örnek:

$Z_1 = 0x1+ 0x0 + 0x3 = 0$

$Z_2 = 0x0+ 0x2 + 0x2 = 0$

**

**

$Z_{çs} = 0x4 + 0x12 + 0x18 = 0$ $\boxed{Z=0}$

(8) c_j-Z_j Satırı: Bu satır her sütun için hesaplanan Z_j değerlerinin amaç satırındaki o sütuna ait sayıdan çıkarılmasıyla elde edilir.

Örnek:

c_1-Z_1 = 3-0 =3

c_2-Z_2 = 5-0 =5

c_j-Z_j değerleri amacınızdaki net artışı gösterirler.

Bir birim 1 no'lu ürün üretirsek amaç fonksiyonunun değeri 3 birim artar.

Bir birim 2 no'lu ürün üretirsek amaç fonksiyonunun değeri 5 birim artar.

Evre 3: Optimallik Testi Yapılır

Bu evrede çözümün optimal olup olmadığı test edilir. Bir başka deyişle, karar değişkenlerinden herhangi bir tanesinin çözüme girmesi ile amaç fonksiyonunun değerinin artıp artmayacağı test edilir. Çözümün optimal olması için maksimizasyon amaçlı problemlerde c_j-Z_j değerlerinin negatif ya da sıfır, minimizasyon amaçlı problemlerde ise c_j-Z_j değerlerinin pozitif ya da sıfır olması gerekir. (Nedeni: c_j-Z_j'ler maksimizasyon amaçlı problemlerde net katkıları gösterirler. Maksimizasyon amaçlı problemlerde bu değerin (-) işaretli olması artık toplam katkının arttırılamayacağını, azaltılacağını gösterir. Minimizasyon amaçlı problemlerde tersi geçirlidir).

Çözüm optimal ise simpleks algoritması durdurulur ve optimal çözüm belirlenir. Çözüm optimal değilse Evre 4'e ilerlenir.

Evre 4: Çözüme Giren Değişken Seçilir

Maksimizasyon amaçlı problemlerde çözüme giren değişken, mevcut temel olmayan değişkenler arasından amaç fonksiyonu değerini en fazla artıracak değişken olarak belirlenir. Bir başka deyişle, en yüksek c_j-Z_j değerini veren x_j değişkeni öncelikle çözüme girer. Yukarıdaki örnekte x_2 değişkeni bu özelliğe sahiptir. Bu durumda en yüksek c_j-Z_j değerine sahip sütuna "anahtar sütun" adı verilir ve bu sütunda yer alan değişkene "çözüme giren değişken" adı verilir. O halde maksimizasyon amaçlı problemlerde c_j-Z_j satırındaki en büyük değere, minimizasyon amaçlı problemlerde ise c_j-Z_j satırındaki mutlak değerce en büyük (-) işaretli değere karşı gelen değişken, çözüme giren değişken olarak seçilir. Örneğimizde, x_2 çözüme giren değişken olarak seçilir.

Evre 5: Çözümden Çıkan Değişken Seçilir

Çözümden çıkarılacak değişkeni bulmak için çözüm sütunundaki değerler anahtar sütundaki karşıt sayılara bölünür. Bölme işlemi sonunda bulunan oranlar arasından en küçük pozitif orana ait olan satır değişkeni "çözümden çıkan değişken" olarak belirlenir. Örneğimizde S_2 çözümden çıkan değişken olarak seçilir. Minimum oranlı değer aynı zamanda uygun çözüm alanı içindeki en dış noktadır. Bu oranlardan "0" ya da negatif değerli oran dikkate alınmaz. Bu satıra "anahtar satır" denir. Anahtar satır ile anahtar sütunun keşistiği yerdeki ögeye de "anahtar eleman" adı verilir.

Evre 6: Yeni Katsayılar Hesaplanır ve Yeni Simpleks Tablo Oluşturulur

Yeni katsayılar hesaplanarak yeni simpleks tablo oluşturulur. Daha sonra Evre 3'e geri dönülür.

a) Yeni Temel Değişken Satırının (T_s)Hesaplanması

Anahtar satırdaki bütün elemanlar anahtar sayıya ayrı ayrı bölünür. Bu işlem sonunda elde edilen değişkenler ikinci tabloda yeni temel değişken satırına (x_2) yazılır.

$$\text{Yeni Temel Değişken Satırı} = \frac{\text{Anahtar satır}}{\text{Anahtar Sayı}} \Rightarrow \frac{(0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 12)}{(2)} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 6)$$

b) Diğer Temel Değişken Satırlarının Hesaplanması

$$Y_s = E_s - (T_s x P)$$

Y_s- Yeni Satır

E_s- Eski Satır

T_s- Yeni Temel Değişken Satırı

P-Pivot Eleman (Eski satırın anahtar sütun ile kesiştiği yerdeki öge)

$$\begin{array}{l} \quad (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 4) \\ - \; 0. \; (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; ½ \;\; 0 \;\; 6) \\ \hline \quad (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 4) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad (3 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 18) \\ - \; 2 \,. (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; ½ \;\; 0 \;\; 6) \\ \hline \quad (3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 6) \end{array}$$

Elde edilen bu değerler ikinci tabloda mevcut temel değişkenler satırına (S_1 ve S_2 satırlarına) yazılır. Son olarak Z_j ve c_j-Z_j satırlarının yeni değerleri Evre 2'de anlatıldığı gibi hesaplanarak yeni simpleks tablodaki yerlerine yazılır.

	3 x_1	5 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	Ç.S.
0 S_1	1	0	1	0	0	4
5 x_2	0	1	0	1/2	0	6
0 S_3	3	0	0	-1	1	6
Z_j	0	5	0	5/2	0	30
c_j-Z_j	3	0	0	-5/2	0	

Evre 3’e geri dönülür. Optimallik testi yapılır. c_j-Z_j satırında hala (+) değerli öge vardır. Süreç yinelenir.

Evre 3: Optimallik Testi Yapılır; çözüm optimal değildir.

Evre 4: Çözüme Giren Değişken Seçilir; x_1 değişkeni.

Evre 5: Çözümden Çıkan Değişken Seçilir; S_3 değişkeni.

Evre 6: Yeni Katsayılar Hesaplanır ve Yeni Simpleks Tablo Oluşturulur;

	3 x_1	5 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	Ç.S.
0 S_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
5 x_2	0	1	0	1/2	0	6
3 x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Z_j	3	5	0	3/2	1	36
c_j-Z_j	0	0	0	-3/2	-1	

Optimal çözüme ulaşıldığı için algoritma durur. Problem çözülmüştür.

KAYNAKLAR:

HILLIER, F.S. ve LIEBERMAN, G.J. (1995), Introduction to Mathematical Programming, McGraw-Hill Publishing Company.

TAHA, H. (1992), Operations Research, Fifth Edition, MacMillan International Company, New York.

WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston.