

3.2.6. Dual Problem ve Ekonomik Yorumu

Primal Model

$$Z_{\text{maks.}} = 4X_1 + 5X_2 \quad (\text{kar, pb/gün})$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10 \quad (\text{işgücü, saat/gün})$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 36 \quad (\text{Hammadde1, kg/gün})$$

$$8X_1 + 4X_2 \leq 40 \quad (\text{Hammadde2, kg/gün})$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	4	5	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
5 X_2	0	1	1	-1/6	0	4
4 X_1	1	0	-1	1/3	0	2
0 S_3	0	0	4	-2	1	8
Z_j	4	5	1	1/2	0	28
$C_j - Z_j$	0	0	-1	-1/2	0	

Dual Model

$$Z_{\text{min.}} = 10y_1 + 36y_2 + 40y_3$$

$$y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4$$

$$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	10	36	40	0	0	M	M	
	y_1	y_2	y_3	E_1	E_2	A_1	A_2	
36 y_2	0	1	2	-1/3	1/6	1/3	-1/6	1/2
10 y_1	1	0	-4	1	-1	-1	1	1
Z_j	10	36	32	-2	-4	2	4	28
$C_j - Z_j$	0	0	8	2	4	M-2	M-4	

Primal Model

$$Z_{\max.} = 6X_1 + 4X_2$$

$$2X_1 + 6X_2 \leq 12 \quad (\text{işgücü, saat/gün})$$

$$4X_1 + 4X_2 \leq 16 \quad (\text{Hammadde, kg/gün})$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	6	4	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
6 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	6	6	0	3/2	24
$C_i - Z_i$	0	-2	0	-3/2	

Dual Model

$$Z_{\min.} = 12y_1 + 16y_2$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 6$$

$$6y_1 + 4y_2 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	12	16	0	0	M	M	
	y_1	y_2	E_1	E_2	A_1	A_2	
0 E_2	-4	0	-1	1	1	-1	2
16 y_2	1/2	1	-1/4	0	1/4	0	3/2
Z_j	8	16	-4	0	4	0	24
$C_i - Z_i$	4	0	4	0	M-4	M	

Optimal Primal- Optimal Dual Tablo Arasındaki İlişkiler

1) Amaç fonksiyonunun optimal değeri primal ve dual problemler için aynıdır.

$$Z_{\text{maks.}} = G_{\text{min.}}$$

2).Eğer dual optimal çözümde herhangi bir dual değişken temel değişken olarak yer alırsa ,onun primal problemdeki karşılığı olan gölge/ artık değişkenin değeri sıfır olur.

$$Y_2=3/2 \quad ; \quad S_2=0$$

Eğer primal optimal çözümde,herhangi bir primal kısıtlayıcının gölge/artık değişkeni temel değişken olarak pozitif bir değere sahip ise,onun karşılığı olan dual değişkenin optimal değeri '0' olur.

$$S_1=4 \quad ; \quad y_1=0$$

3).Dual problemin temel değişkenlerinin optimal çözüm değerleri primal simpleks tablosunda gölge değişkenlerin altındaki $c_j - z_j$ satırında ters işaretli olarak bulunur. Primal değişkenlerin optimal değerleri dual optimal simpleks tabloda artık değişkenlerin altındaki $c_j - z_j$ satırında bulunur.

4).Eğer dual değişken yapay değişken içeren primal kısıtlayıcıya karşılıksa dual değişkenin optimal değeri optimal primal simpleks tabloda yapay değişkenin altındaki $c_j - z_j$ satırındaki elemanın ters işaretlisi olarak bulunur (M için '0' değeri verilir).

Primal Model

$$Z_{\text{maks.}} = 6X_1 + 5X_2 + 3X_3 \quad (\text{kar, pb/gün})$$

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 19 \quad (\text{HammaddeA, kg/gün})$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 9 \quad (\text{HammaddeB, kg/gün})$$

$$2X_1 + X_2 \leq 16 \quad (\text{işgücü, saat/gün})$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	6	5	3	0	0	0	
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	0	3/2	0	1	-1	-1/2	2
3 X_3	0	3/2	1	0	1	-1/2	1
6 X_1	1	1/2	0	0	0	1/2	8
Z_j	6	15/2	3	0	3	3/2	51
$C_j - Z_j$	0	-5/2	0	0	-3	-3/2	

Dual Model

$$Z_{\min.} = 19y_1 + 9y_2 + 16y_3$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 6$$

$$4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	19	9	16	0	0	0	M	M	M	
	y ₁	y ₂	y ₃	E ₁	E ₂	E ₃	A ₁	A ₂	A ₃	
16y ₃	1/2	0	1	-1/2	0	1/2	1/2	0	-1/2	3/2
9y ₂	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	3
0E ₂	-1/2	0	0	-1/2	1	-3/2	1/2	-1	3/2	5/2
Z _j	17	9	16	-8	0	-1	8	0	1	51
C _j -Z _j	2	0	0	8	0	1	M-8	M	M-1	

3.2.6. Dual Simpleks Yöntem

Doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir yöntem ‘Dual Simpleks Yöntem’dir. Bu yöntem çözümün optimal ancak uygun olmadığı durumlarda kullanılır. Maksimizasyon amaçlı bir probleme ait tablonun C_j-Z_j satırındaki değerler “0” veya “-” değerli iken çözüm sütunundaki değerlerin en az biri “-” işaretliyse veya minimizasyon amaçlı bir probleme ait tablonun C_j-Z_j satırındaki değerlerin tümü “+” veya “0” iken çözüm sütununda yer alan değerlerin en az biri “-” işaretli ise dual simpleks yöntemine başvurulur.

Dual Simpleks yöntem, primal simpleks yöntemde olduğu gibi çözüme giren ve çözümden çıkan değişkenlerin seçimiyle başlar. Ancak, dual simpleks yöntemde önce çözümden çıkacak değişken, daha sonra çözüme girecek değişken belirlenir.

Temelden çıkacak değişken çözüm sütununda negatif değere sahip değişkenler arasından seçilir. Çözüm sütununda mutlak değerce en büyük “-” “değerli değişken temelden çıkacak olan değişkendir (anahtar satır).

Eğer çözüm sütunundaki tüm değişkenler “+” ise çözüm uygun bir çözümdür. Ancak çözümün optimal bir çözüm olup olmadığını belirlemek için $C_j - Z_j$ satırına bakılır.

Temele girecek değişken çözümde bulunmayan değişkenler arasından seçilir. Bunun için $C_j - Z_j$ satırındaki değerler anahtar satırdaki karşı gelen değerlere bölünür. Paydaya gelen sayılar arasında “0” veya “+” değerli olanlar dikkate alınmaz.

Problem maksimizasyon amaçlı bir problem ise, en küçük oranın elde edildiği sütuna ait değişken çözüme girecek değişken olarak seçilir(anahtar sütun).

Problem minimizasyon amaçlı bir problem ise, mutlak değerce en küçük oranın elde edildiği sütuna ait değişken çözüme girecek değişken olarak seçilir(anahtar sütun).

Çözümle ilgili diğer işlemler primal simpleks yöntemdeki gibidir.

Bir sonraki tabloda $C_j - Z_j$ satırı optimallik şartını sağlarken çözüm sütunundaki değerlerin en az biri “-” işaretli ise dual simpleks yönteme devam edilir.. Elde edilen tablonun çözüm sütunundaki değerlerin hiçbirisi “-” işaretli değilse ve $C_j - Z_j$ satırı optimallik şartını sağlıyorsa optimal ve uygun çözüm elde edilmiş demektir.

Dual Simpleks yöntem, çoğunlukla,

-sağ taraf sabitlerindeki değişikliklerden sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde

-modele yeni bir kısıt ilave edildikten sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde ve

-normal minimizasyon problemlerinin çözümünde

kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned}\text{Örnek1}^{17}: \quad Z_{\min.} &= 3X_1 + 2X_2 \\ 3X_1 + X_2 &\geq 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 &\leq 3 \\ X_1, X_2 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Örnek2}^{18}: \quad Z_{\min.} &= X_1 + 2X_2 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 &\geq 4 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 &\geq 6 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0\end{aligned}$$

¹⁷ TAHA, H. (1992), Operations Reseach, 5th Edit., Mac Millan International Com, New York,

¹⁸ WINSTON, W.,(1991), Operations Reseach Applications and Algorithms, 2nd Edit., PWS-KENT Publishing Com., U.S.A.

Örnek3¹⁹: $Z_{\min.} = 5X_1 + 4X_2$

$$X_1 + 2X_2 \geq 12$$

$$5X_1 + X_2 \geq 31$$

$$3X_1 + X_2 \geq 21$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

KAYNAKLAR

- TAHA, H. (1992), Operations Reseach, 5th Edit., Mac Millan International Com, New York,
- WALKER, R.,C.,(1999), Introduction to Mathematical Programming, Prentice Hall Inc., U.S.A.
- WINSTON, W.,(1991), Operations Reseach Applications and Algorithms, 2nd Edit., PWS-KENT Publishing Com., U.S.A.

¹⁹ WALKER, R.,C.,(1999), Introduction to Mathematical Programming, Prentice Hall Inc., U.S.A.