2. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA (DP)

2.1. DP'nin Tanımı ve Bazı Temel Kavramlar

Model: Bir sistemin değişen koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında varsayımlarda bulunmak amacı ile sistemin elemanları arasındaki bağıntıları kelimeler ya da matematik formüllerle belirleyen ifadeler topluluğuna "model" adı verilir.

Matematiksel Model: Bir sistemin elemanlarının simgeler ile tanımlanıp bunlar arasındaki ilişkilerin fonksiyonlar ile gösterimine "matematiksel model" adı verilir.

Karar Modeli: Sistemin yöneticisinin kontrolü altında olup, karar değişkeni olarak isimlendirilen değişkenlere, hangi değerlerin verilmesi gerektiğini belirlemek amacıyla kullanılan matematiksel modellere "karar modeli" adı verilir.

İşte YA'da en yaygın kullanım alanı bulan tekniklerden bir tanesi olan Doğrusal Programlama (DP), doğrusal karar modelleriyle ilgili kavram ve teknikler bütünüdür. Doğrusal programlama, bütün model parametrelerinin kesin olarak bilindiğini varsayan deterministik bir tekniktir.

Bir doğrusal programlama problemi (DPP) üç bölümden oluşur:

1- Bir DP problemi, karar değişkenlerinin (x_1, x_2, ...,x_n) doğrusal bir fonksiyonu olan amaç fonksiyonu içerir. Amaç fonksiyonu maksimizasyon ya da minimizasyon amaçlı olabilir.
2- Bir DP problemi, karar değişkenlerinin alacağı değerleri sınırlayan kısıtlar seti içerir. Her bir kısıt seti doğrusal eşitlik ya da eşitsizlik şeklinde ifade edilmelidir.
3- Bir DP problemi, karar değişkenlerinin negatif olmama gerekliliğini belirleyen bir kısıt içerir. $x_j \geq 0$, (j=1,.....,n).

Değişkenler: Bir problemin modeli kurulduktan sonra değeri hesaplanacak olan bilinmeyen simgelerdir.

Karar Değişkenleri: Bir karar modelinin çözümlenmesi sürecinde değeri hesaplanacak olan karar unsurlarıdır. Örneğin bir işletmede A ve B tipinde iki farklı ürün üretilmek istenilsin.

Karar değişkenleri x_1 ve x_2 sırasıyla, üretilecek olan A ve B tipindeki iki farklı ürünün üretim miktarlarını gösterirler.

Sapma Değişkenleri: Faktör ve kapasite arasındaki dengesizliği gidermeye çalışırlar. Bir başka deyişle, kullanılan hammadde ve onun kapasitesi arasındaki dengeyi kurmaya çalışırlar.

Faktör < Kapasite $\Rightarrow$ negatif sapma değişkeni (atıl kapasite)
Faktör > Kapasite $\Rightarrow$ pozitif sapma değişkeni (artık-fazla kapasite)

Bu bağlamda sapma değişkenlerini iki sınıfta toplamak mümkündür:

1. **Gölge Değişkenler:** Atıl kapasiteyi temsil ederler. "≤" şeklindeki bir kısıt denklemini (=) şeklinde ifade etmek amacıyla kullanılırlar.

Örnek:

$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$X_1 + X_2 + S_1 = 5$$

2. **Artık Değişkenler:** Fazla kapasiteyi temsil ederler. "≥" şeklindeki bir kısıt denklemini (=) şeklinde ifade etmek amacıyla kullanılırlar.

Örnek:

$$X_1 + X_2 \geq 5$$
$$X_1 + X_2 - E_1 = 5$$

Yukarıda sözü edilen sapma değişkenlerinin yanı sıra Simpleks Çözüm Yönteminde kullanılan bir başka değişken çeşidi "yapay değişken"dir. Yapay değişkenler Büyük M Yöntemi (Bölüm 3.2.2.) incelenirken açıklanacaktır.

Parametreler: DP modelinin davranışını etkileyen sabit katsayılardır. DP modelindeki c_j, b_i ve a_{ij} (i=1 ....m; j=1 .... n) katsayıları parametreler olarak adlandırılırlar.

Amaç Fonksiyonu: Karar değişkenlerinden ve bu değişkenlerin parametrelerinden oluşan en iyi çözümün (maksimum ya da minimum) elde edilmesini sağlayan doğrusal bir fonksiyondur.

Kısıtlar: Bir modeldeki karar değişkenleri ya da karar değişkenleri ile parametreler arasındaki zorunlu ilişkilerin her birine "kısıt" adı verilir. Kullanılan faktör ya da hammadde miktarlarıdır.

Teknolojik Katsayılar: Her faaliyet için gerekli olan kaynak miktarıdır.

Sağ Taraf Sabitleri: Mevcut kaynak miktarlarını gösteren, problemdeki kısıt denklemlerinin sağ taraflarında yer alan parametrelerdir.

Bu bilgilere bağlı olarak bir DP problemi simgesel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

Amaç Fonksiyonu:

$$Z_{maks/min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Kısıt Denklemleri:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \; > \quad b_i \qquad (i=1,.....m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,.......n)$$

Örnek: Maksimizasyon amaçlı ve 2x2 boyutlu bir DP problemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Z_{max} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Optimal Çözüm: Bir DP modelinin karar değişkenlerinin, mevcut kısıtlar altında amaç fonksiyonunun en iyilenmesi (optimum kılınması) sonucunda aldığı değerler "optimal çözüm" olarak adlandırılır.

Optimal Değer: Optimal çözüme bağlı olarak amaç fonksiyonun aldığı değer "optimal değer" olarak adlandırılır.

2.2. DP'nin Bazı Uygulama Alanları

- Üretim Programı
- Beslenme Programı
- Reklam Ortamı Seçimi
- Sermaye Bütçeleme
- Dağıtım Pogramı
- Stok Kontrol
- Üretim Hattı Dengelemesi

2.3. DP'nin Varsayımları

DP'nin altı temel varsayımı vardır. Bu varsayımlar aşağıda verilmiştir:

- Belirlilik (Certainity)
- Doğrusallık (Linearity)
- Bölünebilirlik (Divisibility)
- Toplanabilirlik (Additivity)
- Orantısallık (Proportionality)
- Negatif olmama (Non-negativity)

Belirlilik Varsayımı: Bir DP modelinde yer alan parametrelerin bilindiği ve değişmediği kabul edilir. Yani, birim başına kar ya da maliyetlerin (c_j), her faaliyet için gerekli olan kaynak miktarlarının (a_{ij}) ve mevcut kaynak miktarlarının (b_i) sabit olduğu varsayılır. Bu varsayımın kabul edilmesiyle DP problemlerinin çözümü kolaylaşmaktadır. Ancak, uygulamada bu parametrelerin sık sık değişme eğiliminde olması, DP'nin pratik faydasını azaltmaktadır. Ancak, problemin optimum çözümü elde edildikten sonra duyarlılık analizi başlığı altında parametrelerdeki değişmelerin etkileri incelenerek DP'ye dinamik bir yapı kazandırılabilir.

Bölünebilirlik Varsayımı: Belirlilik varsayımı ile karar değişkenlerinin sürekli değerler alabileceği kabul edilir. Örneğin herhangi bir DP modelinin çözümünde 4.6 adet araba üretileceği gibi bir üretim çıktısı sonucuna ulaşılabilir. Optimal çözüme ulaşıldıktan sonra kesirli değerler “Tam Sayı Programlama” algoritmalarıyla tamsayılaştırılabilir.

Doğrusallık Varsayımı: Bir DP modelinin amaç fonksiyonu ve kısıt denklemleri doğrusal olmalıdır. Bir başka deyişle x_j’ler birinci dereceden olmalıdır.

Toplanabilirlik Varsayımı: Amaç fonksiyonunun ve kısıt denklemlerinin değerlerine yapılan toplam katkı, her bir katkının ayrı ayrı toplanması ile elde edilir.

Örneğin, bir iş iki iş-gücü saat ile diğer bir iş üç iş-gücü saat ile yapılıyorsa iki işi birden yapmak beş iş-gücü saati gerektirir.

Orantısallık Varsayımı: Her bir karar değişkeninin amaç fonksiyonuna ve kısıt denklemlerinin sol tarafına yapacağı katkı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır. Örnek olarak 1 adet A tipi oyuncağın amaç fonksiyonu katkısı 800.000 TL ise 4 adet A tipi oyuncağın amaç fonksiyonuna toplam katkısı bunun dört katı olan 3.200.000 TL (4x800.000) olacaktır.

Bir adet A tipi oyuncak plastik departmanında 4 dakikada işleniyorsa, 5 adet A tipi oyuncak bunun beş katı olan 20 dakikada (4x5=20) işlenecektir.

Negatif Olmama Varsayımı: DP’deki tüm değişkenlerin negatif olmayan değerler alması gerekmektedir. Negatif üretimden söz edilemeyeceği için değişkenlerin pozitif ya da en azından sıfıra eşit olması gerekmektedir.

2.4. DP’nin Özellikleri ve Düzenleniş Biçimleri

2.4.1. DP’nin Özellikleri

Bir DP probleminin modeli, doğrusal eşitlikler ve/veya eşitsizlikler şeklindeki kısıt denklemleri çerçevesinde en iyilenecek (optimum kılınacak) bir doğrusal amaç fonksiyonu içerir. Bu durumda bir DP problemi genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Z_{maks./min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,\ldots\ldots\ldots\ldots,m$$

$$j=1 \qquad >$$

$$x_j \geq 0 \qquad j= 1,\dots\dots\dots,n$$

DP'nin özellikleri kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1) DP problemlerinde uygun çözüm birden çoktur. Fakat genelde optimum çözüm bir tanedir (alternatif çözüm olabilir).
2) Kaynak miktarları sınırlıdır. Amaca ulaşmak için sonsuz miktarda kaynak kullanılamayacağı gibi, miktar olarak en kıt olan kaynak çözüm alanını belirler.
3) Problemde verilen bilgiler, amaç ve kaynaklar ile ilgili sınırlayıcı koşullar, matematiksel olarak eşitlikler ya da eşitsizlikler şeklinde ifade edilmelidir. İfadeler doğrusal olmalıdır.
4) Karar değişkenleri (x_j) negatif olmamalıdır. x_j- ≥0 (j=1, ...,n)
5) c_j, b_i ve a_j (i=1,...........,m ve j=1, ..., n) değerleri önceden belirlenmiştir. Her bir model için sabit oldukları varsayılır ve parametreler olarak adlandırılırlar.

2.4.2. DP'nin Düzenleniş Biçimleri

DP modelleri değişik amaçlarla değişik biçimlerde düzenlenirler. DP modellerinin biçimleri aşağıdaki gibidir*.

*-ÖZDEN, K. (1989), Yöneylem Araştırması, Hava Harp Okulu Yayınları, s.186.

1) Primal (özgün) form
2) Kanonik form
3) Standart form
4) Dual (ikiz) form

1.) Primal (Özgün) Form:

Herhangi bir DP problemi temel alınarak kurulan ilk modele primal (özgün) problem adı verilir.

Primal modelin matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$Z_{maks./min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$n$$

$$\sum_{j=1} a_{ij}x_j \;\; \underset{>}{\leq} b_i \quad i=1,.................m$$

$$x_j \underset{<}{\geq} 0 \qquad j= 1,.................n$$

x_j- serbest

Buna göre primal modelde,

a.) En büyüklenecek ya da en küçüklenecek bir amaç fonksiyonu vardır.

b.) Kısıt denklemlerinin işaretleri (≥), (=), (≤) şeklinde olabilir.

c.) Amaç fonksiyonunda parametreler, kısıt denklemlerinde ise parametreler ve sağ taraf sabitleri yer alır.

d.) Karar değişkenleri sıfıra eşit, sıfırdan büyük ya da serbest işaretli olabilirler.

Örnek:

$$Z_{maks.} = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 25$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2.) Kanonik Form:

Bir DP problemi, kanonik formda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Z_{maks.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad i=1,.................,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j= 1,................., n$$

Kanonik formun özellikleri aşağıdaki gibidir.

a.) Amaç fonksiyonu maksimizasyon amaçlı olmalıdır.

b.) Kısıt denklemleri $\leq$ şeklinde ifade edilmelidir.

c.) Tüm değişkenler negatif olmayan değerler almalıdır.

Bu forma uymayan DP problemleri aşağıdaki işlemlerle kanonik forma dönüştürülürler:

1) Bir f(x) fonksiyonunun minimizasyonu, bu fonksiyonun negatif işaretlisinin (-f(x)) maksimizasyonuna eşittir.
2) Herhangi bir yöndeki eşitsizlik ($\leq$ ya da $\geq$) (-1) ile çarpılarak karşıt yöndeki eşitsizliğe ($\geq$ ya da $\leq$) dönüştürülebilir.

Örnek:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$$

3) Eşitlik şeklinde verilen bir kısıt denklemi zıt yönde iki eşitsizlik olarak ifade edilebilir.

Örnek:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$ eşitliği

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1 \quad \text{ve} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geq b_1$$

şeklinde iki eşitsizlik olarak yazılabilir. Buradan,

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1 \quad \text{ve} \quad -a_{11}x_1-a_{12}x_2 \leq -b_1$$

şeklinde iki tane $\leq$ yönlü eşitsizlik elde edilir.

4) Sol tarafı mutlak değer şeklinde verilen bir eşitsizlik iki eşitsizliğe dönüştürülebilir.

Örnek:

$|a_{11}x_1+a_{12}x_2| \leq b_1$ eşitsizliği

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geq -b_1 \quad \text{ve} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1$$

şeklinde iki eşitsizlik olarak yazılabilir. Buradan,

$$-a_{11}x_1-a_{12}x_2 \leq b_1 \quad \text{ve} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1$$

şeklinde iki tane ≤ yönlü eşitsizlik elde edilir.

5) İşareti belirli olmayan bir değişken, iki tane negatif olmayan değişkenin farkı olarak tanımlanabilir. Örneğin x_1'in işareti belirsiz ise, $x_1^{II} \geq 0$ ve $x_1^{I} \geq 0$ koşuluyla $x_1= (x_1^{II} - x_1^{I})$ şeklinde yazılabilir.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini kanonik formda yazınız.

$$
\begin{aligned}
Z_{min.} &= 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\
& 10x_1+16x_2 + 8x_3 \leq 1500 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1000 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 120 \\
& x_2 \geq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ ve } x_3 \text{ - serbest}
\end{aligned}
$$

3.) Standart Form:

Bir DP problemi, standart formda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Z_{maks./min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i=1,\ldots\ldots\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j= 1,\ldots\ldots\ldots,n$$

Standart formun özellikleri aşağıdaki gibidir.

a.) Amaç fonksiyonu maksimizasyon ya da minimizasyon amaçlı olabilir.

b.) Tüm kısıt denklemleri (=) şeklinde ifade edilmelidir.

c.) Sağ taraf sabitleri negatif olmayan değerler almalıdır .

d.) Tüm değişkenler negatif olmayan değerler almalıdır.

Bu forma uymayan DP problemleri aşağıdaki işlemlerle standart forma dönüştürülürler:

1) (≤) şeklindeki bir kısıt denklemi, denkleme negatif sapma değişkeninin eklenmesi ile (=) şeklinde ifade edilebilir. Eklenen bu değişkene "gölge değişken" adı verilir.

Örnek:

$$3x_1 + 2x_2 \le 30$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 30$$

2) (≥) şeklindeki bir kısıt denklemi, denkleme pozitif sapma değişkeninin eklenmesi ile (=) şeklinde ifade edilebilir. Eklenen bu değişkene "artık değişken" adı verilir.

Örnek:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1000$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - E_1 = 1000$$

3) Sağ taraf sabiti (-) değerli olan eşitlik ya da eşitsizlik şeklindeki bir kısıt denklemi, (-1) ile çarpılıp sağ taraf sabitinin (+) değer alması sağlanır.

Örnek:

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -1000$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 1000$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + S_1 = 1000$$

4) İşareti belirli olmayan bir değişken, iki tane negatif olmayan değişkenin farkı olarak tanımlanabilir. Örneğin x_1'in işareti belirsiz ise, $x_1^{11} \ge 0$ ve $x_1^{1} \ge 0$ koşuluyla $x_1 = (x_1^{11} - x_1^{1})$ şeklinde yazılabilir.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini standart formda yazınız.

$$Z_{min.} = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad & \geq 3 \\ x_1 + x_2 & \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 & = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2\text{-serbest} & \end{aligned}$$

4.) <u>Dual (İkiz) Form:</u>

Her DP probleminin ilişkili olduğu bir ikiz problemi vardır. DP probleminin asıl şekline primal problem, bununla ilişkili ikinci şekline dual (ikiz) problem adı verilir. Gerçekten de bir DP problemi, kendisiyle içsel bağlantılı başka bir DP problemine dönüştürülebilir: Örneğin, DP'de maksimizasyon (minimizasyon) problemi, aynı verileri içeren benzer bir minimizasyon (maksimizasyon) problemi olarak yazılabilir. DP'de bu ikili yapı DUALİTE (İKİLİLİK) olarak adlandırılmaktadır.

Dual problemin çözümü önemli ekonomik yorumlar sağlar. Primal ve dual modeller arasındaki ilişkileri aşağıdaki gibi sıralamak olasıdır:

1) Primal ve dual modelin optimal çözümleri için

Primal		Dual	
maks. Z	=	min. G	
min. G	=	maks. Z	eşitliği geçerlidir

2) Primal modelin amaç fonksiyonu katsayıları (cj), dual modelin sağ taraf sabitlerini (bi) oluştururlar.

Primal	Dual	
cj	bi	(j=1,..........,n) (i=1,...........,m)

3) Primal modelin sağ taraf sabitleri (bi), dual modelin amaç fonksiyonu katsayılarını (cj) oluştururlar.

Primal	Dual		
bi	cj	(j=1,.............,n)	(i=1,............,m)

4) Primal modelde kısıt katsayılarının oluşturduğu teknolojik katsayılar satırı, dual modelde teknolojik katsayılar sütun vektörünü oluştururlar.

Primal	Dual		
a_{ij}	a_{ij}	(j=1...n),	(i=1...m)
n-değişken	n-kısıt denklemi		
m-kısıt denklemi	m-değişken		

O halde, primal model n adet değişken, m adet kısıt denklemi içeriyorsa, dual model m adet değişken n adet kısıt denklemi içerecektir.

5) Dual problemin duali primaldir.
6) Primal ve dual problemin karar değişkenleri negatif olmayan değişkenlerdir. $x_j \geq 0$, $y_i \geq 0$

Primal	Dual
$x_j \geq 0$	$y_i \geq 0$

7) Primal problemdeki kısıt denklemleri, dual problemde yön değiştirirler.

Primal	Dual
$\leq$	$\geq$

$\geq$ $\leq$

A-) Normal Maksimum / Minimum Problemlerin Dualinin Alınması

a) Normal Maksimum Problemi

Asıl Model — Dual Model

$$Z_{maks} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad G_{min} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$x_j \geq 0 \qquad y_i \geq 0$$

(i=1,...........,m) (j=1,............,n)   (j=1,.............,n) (i=1,...........,m)

Normal maksimum probleminin duali kanonik formdan ve standart formdan yararlanılarak alınabilir.

i) Kanonik Form

Normal maksimum problemi, maksimizasyon amaçlı ve $\leq$ yönlü kısıt denklemli olacağı için zaten kanonik formda olacaktır. O halde, dual problem minimizasyon amaçlı ve $\geq$ yönlü kısıt denklemli olacaktır.

Örnek: Aşağıdaki verilen DP probleminin kanonik formdan yararlanarak dualini alın.

$$Z_{maks.} = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ii) Standart Form

Normal maksimum problemi standart forma dönüştürülerek duali alınır.

Örnek: Yukarıda verilen DP probleminin standart formdan yararlanarak dualini alınız.

b) Normal Minimum Problemi

Asıl Model — Dual Model

$$G_{min.} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad Z_{maks.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$y_j \geq 0 \qquad x_j \geq 0$$

(i=1,............,m) (j=1,...........,n) (j=1,..............,n) (i=1,...............,m)

Normal minimum probleminin dual problemi maksimizasyon amaçlı ve ≤ yönlü kısıt denklemli olacaktır.

Örnek: Aşağıda verilen DP probleminin dualini alınız.

$$G_{min.} = 50y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 80y_4$$

$$\begin{aligned}
400y_1 + 200y_2 + 150y_3 + 500y_4 &\geq 500 \\
3y_1 + 2y_2 &\geq 6 \\
2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 &\geq 10 \\
2y_1 + 4y_2 + y_3 + 5y_4 &\geq 8 \\
y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

i- Standart Form

Normal minimum problemi standart forma dönüştürüldükten sonra duali alınır.

Örnek: Yukarıda verilen DP probleminin standart formdan yararlanarak dualini alınız.

O halde, normal maksimum ve minimum problemlerinin standart formdan duali alınırken aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. Maksimizasyon amaçlı normal DP problemi standart forma dönüştürüldükten sonra duali alındığı zaman, dual problem minimizasyon amaçlı ve '≥' yönlü kısıt denklemli olacaktır.

2. Minimizasyon amaçlı normal DP problemi standart forma dönüştürüldükten sonra duali alındığı zaman, dual problem maksimizasyon amaçlı ve '≤' yönlü kısıt denklemli olacaktır.

B.) Asimetrik DP Probleminin Dualinin Alınması

DP problemi normal forma (Normal Maksimum/Normal Minimum) dönüştürüldükten sonra duali alınır.

Tablo-Primal-Dual Problem Arasındaki İlişki

Primal Problem (Dual Problem)	Dual Problem (Primal Problem)
Maksimizyon Z(G)	Minimizasyon G(Z)
i. kısıt denklemi ≤ şeklinde = şeklinde ≥ şeklinde	y_i - değişken $y_i \geq 0$ sınırlandırılmamış $y_i \leq 0$
x_j-değişken $x_j \geq 0$ sınırlandırılmamış $x_j \leq 0$	j.kısıt denklemi ≥ şeklinde = şeklinde ≤ şeklinde

Kaynak: HILLIER, F.S. ve LIEBERMAN, G.J. (1995), Introduction to Mathematical Programming, McGraw-Hill Publishing Company, p.213.