

Deney 4:

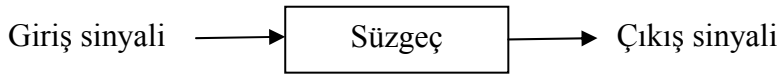
Sayısal Süzgeçler

Amaç

Bu deneyin amacı sonlu dürtü yanıtı (FIR) ve sonsuz dürtü yanıtı (IIR) sayısal süzgeçlerin tanıtılması ve frekans yanıtlarının incelenmesidir.

Giriş

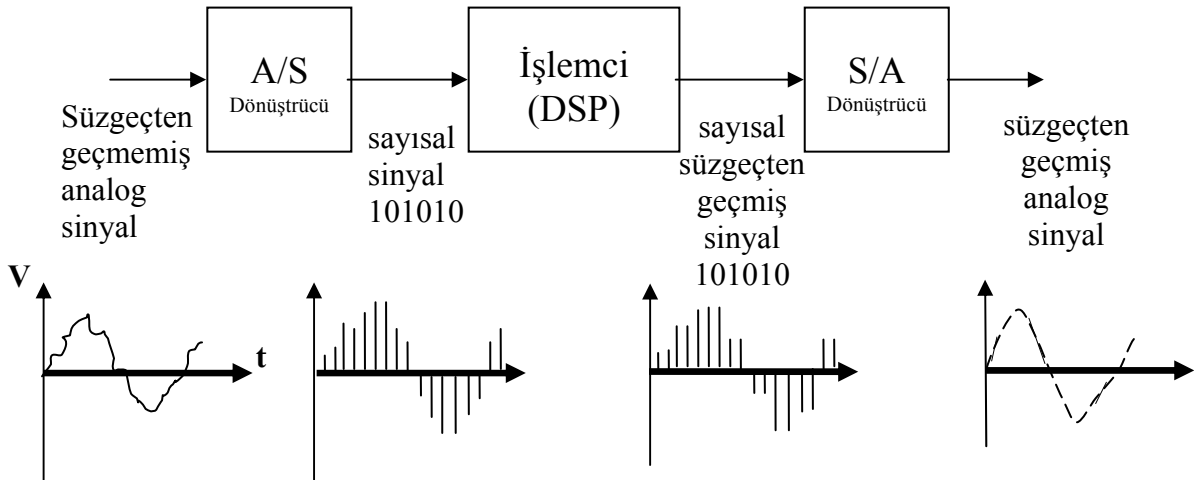
Sinyal işlemede *süzgeçleme* bir sinyalin rasgele gürültü gibi istenilmeyen bileşenlerinin atılması veya sadece istenilen kısmının çıkışta elde edilmesidir. Aşağıda süzgeçleme işlemi blok diyagramı görülmektedir.



Şekil 4.1 Süzgeçlemedeki temel fikir

Süzgeçler, fiziksel yapıları ve çalışma prensipleri birbirlerinden oldukça farklı olan analog ve sayısal süzgeçler olmak üzere ikiye ayrılabilir.

Analog bir süzgeçte direnç, kapasite ve işlemsel kuvvetlendirici gibi elemanlardan oluşan analog elektronik devre elemanları kullanılır; analog süzgeç devreleri gürültü süzme ve video sinyali iyileştirmesi gibi birçok farklı alanda kullanılabilir. Analog süzgeçlere fiziksel bir sistemden elde edilen analog elektriksel gerilim veya akım işareti uygulanır; sayısal bir süzgece uygulanacak olan sinyal ise ayrık olmalıdır.



Şekil 4.2 Analog sinyalin sayısal süzgeçten geçmesi

Sayısal işlemci ile hesaplama yapılabilmesi için örneklenmiş ayrık analog işaret değerleri kullanılmalıdır. Yukarıda blok diyagramı görülen sistemde elde edilen sayısal sinyal bitleri hesaplamalarda kullanılmak üzere işlemciye gönderilir. İşlemci girişe gelen bitleri bir sabit ile çarpma ve bazı değerleri toplama gibi işlemler yaptıktan sonra süzgeçten geçen işarete ait değerleri çıkışa verir. İşlemci çıkışındaki işaret, gerekirse bir Sayısal - Analog Dönüştürücü (SAD) yardımıyla analog bir sinyale dönüştürülür.

Sayısal Süzgeç Kullanmanın Avantajları

1. Süzgeçleme fonksiyonları sayısal süzgeçteki işlemcinin belleğindeki bir program kullanılarak değiştirilebilir. Analog bir süzgeci değiştirebilmek için ise, devrenin yeniden tasarlanması ve donanımın değiştirilmesi gerekir.
2. Sayısal süzgeçler sıradan bir bilgisayar veya iş istasyonunda kolaylıkla gerçekleştirilip test edilebilir.
3. Özellikle aktif bileşen içeren analog süzgeç devrelerinin karakteristikleri zamandan ve sıcaklık değişimlerinden etkilenirken, sayısal süzgeçler bu tip sorunlardan etkilenmeden kararlı bir şekilde çalışabilirler.
4. Sayısal süzgeçler analog sayıcı kısımları bulunmasına rağmen *alçak frekanslı* sinyallerle doğru olarak çalışabilirler. Sayısal işaret işleme hızı arttıkça, sayısal süzgeçler RF (radyo frekans) yüksek frekanslı sinyallere de uygulanabilirler.
5. Sinyalleri farklı yöntemlerle işlemek için sayısal süzgeçler analog süzgeçlere göre çok daha kullanışlıdır. Örnek olarak bazı sayısal süzgeç tipleri sinyal karakteristiklerine göre süzgeci uyarlayabilirler.

Sayısal Süzgeç İşlemleri

Sayısal olarak süzgeçlenecek sinyalin, t zaman olmak üzere, bir gerilim dalga şekliyle tanımlandığını varsayalım.

$$V = x(t)$$

Bu sinyal h (örnekleme) zaman aralıklarında örneklenirse, $t = ih$ zamanında örneklenmiş değer x_i olur.

$$x_i = x(ih)$$

Bundan dolayı, analog Sayısal dönüştürücüden işlemciye gönderilen sayısal değerler, $t = 0$ anı örnekleme başlağı zaman olmak üzere, $t = 0, h, 2h, 3h, \dots$ anlarındaki sinyal dalga şeklinin değerlerine uygun olarak aşağıdaki diziyle gösterilir.

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

$t = nh$ (n pozitif tamsayı) anında, işlemci belleğindeki değerler şunlardır.

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

Örneklenmiş x_{n+1}, x_{n+2} değerlerinin mevcut olmadığına dikkat edilmelidir. İşlemciden sayısal analog dönüştürücüye gönderilen değerler $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ dizisinden oluşmaktadır. y_n değeri genellikle $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ değerlerinden hesaplanır. Sayısal süzgecin süzgeçleme şeklini y' lerin x' lerden hesaplanma yolu belirler.

Sayısal Süzgeç Örnekleri

(1) Birim Kazançlı Süzgeç: Her çıkış y_n değeri giriş x_n değerinin tam olarak aynısıdır. Bu ilişki aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y_n = x_n \quad (4.1)$$

Bu süzgecin sinyal üzerinde bir etkisi yoktur.

(2) Basit Kazançlı Süzgeç: Bu süzgeç basitçe her giriş değerini K kazanç katsayısı ile çarpar. K bir sabittir; giriş ve çıkış arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y_n = K x_n \quad (4.2)$$

$K > 1$ değeri süzgeci bir kuvvetlendirici, $0 < K < 1$ değeri süzgeci bir zayıflatıcı ve $K < 0$ değeri ise süzgeci bir ters alıcı kuvvetlendirici yapar. $K = 1$ durumunda birim kazançlı süzgeç olur.

(3) Saf Geciktirme Süzgeci: $t = nh$ anındaki çıkış değeri $t = (n - 1)h$ anındaki giriş değeridir. Süzgeç giriş çıkışı ilişkisi aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y_n = x_{n-1} \quad (4.3)$$

$y_0 = x_{-1}$ 'dir. x_{-1} işareti tanımlı değildir, bu sebeple tanımlı olmayan x_{-1} anı 0 alınabilir. Bu duruma oldukça sıkça rastlanır.

(4) İki-Terim Farkı Süzgeci: $t = n$ anındaki çıkış değeri, x_n girişi ve bir önceki x_{n-1} girişi arasındaki farka eşittir. Süzgeç giriş çıkışı ilişkisi aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y_n = x_n - x_{n-1} \quad (4.4)$$

Bu süzgecin analog türev alıcı devresine benzer etkiye sahiptir.

(5) İki-Terim Ortalama Süzgeci: Çıkış o anki ve bir önceki girişin aritmetik ortalamasıdır. Süzgeç giriş çıkışı arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \quad (4.5)$$

Yukarıdaki eşitli ile ifade edilen sistem sinyalin yüksek frekanslı değişimlerini yumuşatarak basit bir alçak geçiren süzgeç işlevi görmektedir.

(6) Üç-Terimin Ortalaması Süzgeci: Bir önceki örneğe benzemektedir, çıkış değerini bulmak için süzgeç o anki ve önceki iki girişin ortalamasını alır. Süzgeç giriş çıkışı arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{3} \quad (4.6)$$

y_0 çıkış değerini bulmak için gerekli olan, ancak tanımlı olmayan x_{-1} ve x_{-2} giriş değerleri sıfır alınır.

(7) Merkezi Fark Süzgeci: Bu süzgeç İki-Terim Farkı Süzgecine benzemektedir. Çıkış o anki giriş değeri ve iki örnekleme anı öncesindeki giriş değerinin farkının yarısına eşittir. Süzgeç giriş çıkışı ilişkisi aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \quad (4.7)$$

Bir Sayısal Süzgecin Derecesi

Bir sayısal süzgecin *derecesi*, çıkışı hesaplamak için kullanılan *önceki* girişlerin veya eğer kullanılıyorsa (işlemci hafızasında saklanan) önceki çıkış değerlerinin sayısıdır.

- y_n , sadece x_n giriş değerine bağlı olduğundan örnek (1) ve (2) sıfıncı derecelidir.
- y_n çıkışı için x_{n-1} girişi gerekli olduğundan örnek (3), (4) ve (5) birinci-derecelidir.
- y_n çıkışı için x_{n-1} ve x_{n-2} girişi gerekli olduğundan örnek (6) ve (7) ikinci-derecelidir.

Sayısal Süzgeç Katsayıları

Yukarıda verilen sayısal süzgeç örneklerinin tamamı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\text{Sıfırıncı Derece} \quad y_n = b_0 x_n$$

$$\text{Birinci Derece} \quad y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1}$$

$$\text{İkinci Derece} \quad y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$$

Derecesi belli olmayan süzgeçler de benzer şekilde ifade edilebilir. Yukarıdaki ifadelerdeki b_0, b_1, b_2 , sabitleri süzgeç karakteristiğini belirler ve *süzgeç katsayıları* olarak adlandırılırlar. Tablo 1 örneklerdeki süzgeçlerin katsayılarını göstermektedir.

Tablo 4.1 Basit sayısal süzgeç örnekleri süzgeç katsayıları

Örnek	Derece	b_0	b_1	b_2
1	0	1	-	
2	0	K	-	
3	1	0	1	
4	1	1	-1	
5	1	$1/2$	$1/2$	
6	2	$1/3$	$1/3$	$1/3$
7	2	$1/2$	0	$-1/2$

Özyineli ve Özyinesiz Süzgeçler

Çıkış y_n değeri, girişin o anki x_n ve önceki değerlerinden $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ elde edilebilen bir süzgece özyinesiz sayısal süzgeç denir.

Özyineli süzgeç ise, giriş değerlerine ek olarak önceki çıkış değerlerini de kullanan bir süzgeçtir. Çıkışın geçmişteki değerleri girişin geçmişteki değerleri gibi işlemci belleğinde saklanır.

Özyineli kelimesi y_n çıkış değeri bulunurken geçmişte hesaplanmış çıkış değerlerinin kullanıldığını ifade eder. Özyineli süzgeç gösterilimi, sadece $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ giriş terimlerini değil, ancak $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$ çıkış terimlerini de içerir.

Bir süzgeç frekans yanıtı karakteristiği özyineli süzgeç kullanılarak eşdeğer bir özyinesiz süzgeçten daha düşük derece ile gerçekleştirilebilir.

Özyinesiz süzgeçler FIR, özyineli süzgeçler ise IIR süzgeçler olarak bilinirler. FIR ve IIR terimleri süzgeçlerin farklı dürtü yanıtları olduğunu gösterir. FIR süzgeç sonlu dürtü yanıtına sahipken, IIR süzgecin dürtü yanıtı teorik olarak sonsuza kadar devam eder; çünkü özyineli terimler (çıkışın önceki değerleri) süzgeç girişindeki değerlerden elde edilir ve süreç aynı şekilde devam eder. IIR terimi pratikte doğru değildir, çünkü IIR süzgeçlerin hemen hemen tümünün dürtü yanıtları sonlu sürede sıfır olur.

Özyineli Süzgeç Örneği:

Aşağıdaki eşitlik özyineli süzgece bir örnektir.

$$y_n = x_n + y_{n-1} \quad (4.8)$$

y_n çıkış değeri, x_n giriş değeri ve y_{n-1} çıkışın geçmiştek değerinin toplanmasıyla elde edilir. y_{-1} (x_{-1} 'e benzer şekilde) tanımsızdır ve genellikle sıfır alınır.

(4.8) eşitliğindeki y_{n-1} 'i bir önceki değeri ile yer değiştirirsek aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + y_{-1} = x_0 \\ y_1 &= x_1 + y_0 = x_1 + x_0 \\ y_2 &= x_2 + y_1 = x_2 + x_1 + x_0 \\ y_3 &= x_3 + y_2 = x_3 + x_2 + x_1 + x_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Burada y_n , $t = nh$ anındaki çıkış değerinin, x_n girişi ve önceki bütün girişlerin toplamına eşit olduğu görülmektedir. Bu örnekteki sayısal süzgeç giriş değerlerini topladığı için analog integral devresine benzer bir işleve sahip olur. Bu örnekte görüldüğü gibi, özyineli süzgeç eşdeğer özyinesiz süzgece göre çıkış değerlerini ekonomik olarak hesaplanır. Örnekteki her çıkış iki değer toplamasıyla kolayca elde edilir. Örneğin $t = 10h$ anındaki çıkışı hesaplamak için aşağıdaki eşitlik kullanılır.

$$y_{10} = x_{10} + y_9 \quad (4.10)$$

Aynı etkiyi özyinesiz süzgeç ile yapmak için ise aşağıdaki eşitliği kullanmak gerekir.

$$y_{10} = x_{10} + x_9 + x_8 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + x_0 \quad (4.11)$$

Bu işlem daha fazla bellek kullandığından daha çok toplama işlemi gerekli olur.

Özyineli (IIR) Sayısal Süzgecin Derecesi

Bir sayısal süzgecin derecesi, bir çıkış değerini üretmek için kullanılması gerekli olan geçmişteki giriş ve çıkış değerlerinin sayısı olarak tanımlanmıştır. Bu tanım o anki çıkış değerini hesaplamak için sadece o anki ve önceki girişleri kullanan özyinesiz (FIR) süzgeçler için uygundur. Özyineli süzgecin derecesi ise, farklı olarak, o anki çıkışı hesaplamak için gerekli olan önceki girişlerin ya da çıkış değerlerinin en büyük sayısıdır. Bu tanım hem FIR hem de IIR süzgeçler için geçerli olabilir. Örneğin (4.8) eşitliğinde verilen özyineli süzgeç birinci derece bir süzgeç olarak sınıflandırılır, çünkü önceki giriş değerlerine ihtiyaç duyulmamasına rağmen bir önceki çıkış değerini y_{n-1} 'i kullanır.

Uygulamada, özyineli süzgeçler genellikle eşit sayıda önceki giriş ve çıkış değerlerine ihtiyaç duyarlar. Böylece, ikinci dereceden özyineli süzgeç önceki iki girişi (x_{n-1} ve x_{n-2}) ve önceki iki çıkışı (y_{n-1} ve y_{n-2}) içerirken, birinci dereceden özyineli süzgeçler de önceki giriş x_{n-1} ile çıkış y_{n-1} değerlerini kullanırlar. Özyineli (IIR) bir süzgecin en az birinci dereceden olması gerektiği görülür, sıfırıncı dereceden özyineli bir süzgeç tasarımı ise olanaksızdır.

Özyineli (IIR) Sayısal Süzgeç Katsayıları

Birinci dereceden özyineli bir süzgeç aşağıdaki eşitlikte gösterilebilir.

$$y_n = \frac{b_0 x_n + b_1 x_{n-1} - a_1 y_{n-1}}{a_0} \quad (4.12)$$

(4.12) eşitliği simetrik formda yazılırsa aşağıdaki hale gelir.

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} \quad (4.13)$$

İkinci dereceden bir süzgeç ise aşağıdaki eşitlikte gösterilmiştir.

$$y_n = \frac{b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}}{a_0} \quad (4.14)$$

Sayısal Süzgeç Aktarım İşlevi

Sayısal bir süzgecin doğrudan y_n çıkışını veren ve tüm giriş ile çıkış terimlerini eşitliğin farklı tarafında gösteren simetrik durum olmak üzere iki farklı şekilde tanımladık. Aktarım işlevi süzgeç simetrik gösteriliminden elde edilir. Frekans yanıtının belirlenmesi için süzgecin aktarım işlevi tanımlanır. z^{-1} sembolü gecikme operatörünü gösterir ve bir örnekleme aralığı gecikmeyi tanımlar. z^{-1} operatörü bir (x_n) giriş değerine uygulandığında önceki giriş (x_{n-1}) elde edilir.

$$z^{-1}x_n = x_{n-1} \quad (4.15)$$

$z^{-1}x_0$ ile elde edilen x_{-1} bilinmeyendir ve genellikle sıfır alınır. z^{-1} operatörünü bir çıkışa uygulamak önceki çıkışı verir.

$$z^{-1}y_n = y_{n-1} \quad (4.16)$$

z^{-1} gecikme operatörünü iki kez kullanmak iki örnekleme aralığı gecikmeye sebep olur.

$$z^{-1}(z^{-1}x_n) = z^{-1}x_{n-1} = x_{n-2} \quad (4.17)$$

Bu gösterim şeklini özyineli bir sayısal süzgeç tanımlama için kullanalım.

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} \quad (4.18)$$

Örneğin (4.18) eşitliğinde verilen genel bir simetrik ikinci dereceden süzgeci inceleyelim.

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= z^{-1}y_n, \quad y_{n-2} = z^{-2}y_n \\ x_{n-1} &= z^{-1}x_n, \quad x_{n-2} = z^{-2}x_n \end{aligned} \quad (4.19)$$

Süzgeç giriş ve çıkış ifadeleri arasındaki ilişkiyi gösteren (4.19) eşitliğindeki ifadeleri (4.18) eşitliğinde yerine koyarak tekrar düzenlersek aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (4.20)$$

Bu eşitlik ikinci dereceden özyineli (IIR) bir süzgeç aktarım işlevinin genel ifadesidir. Birinci dereceden bir süzgeç elde etmek için z^{-2} terimleri yok edilir. Derecesi 2'den yüksek süzgeç elde etme için, z^{-1} 'in yüksek katlarını içeren terimler aktarım işlevinin hem payına hem de paydasına eklenir.

Özyinesiz FIR süzgeç hiçbir payda terimi içermeyen aşağıdaki basit aktarım işlevine sahiptir. a_0 katsayısı genellikle 1'e eşit alınır ve bütün diğer a katsayıları sıfırdır.

$$\frac{y(z)}{x(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \quad (4.21)$$

Sonlu Dürtü Yanıtlı Süzgeçler (FIR)

Sonlu dürtü yanıtlı süzgeçler (Finite Impulse Response) sınırlı uzunluklu olan dürtü yanıtlarına sahiptir. FIR süzgeç girişi ve çıkışı arasında ilişki aşağıdaki eşitlik ile gösterilebilir.

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + \dots + b_{M-1}x(n-M+1) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \quad (4.22)$$

Burada $b_0, b_1, \dots, b_{M-1}$ süzgeç katsayıları olup, süzgeç aktarım işlevi aşağıdaki gibidir.

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{M-1}z^{1-M} = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} \quad (4.23)$$

Sonlu dürtü yanıtlı süzgeç tasarımı için Fourier Serisi, Frekans Örnekleme ve Pencere Fonksiyonu Kullanımı gibi birçok yöntem kullanılabilir.

Pencere Fonksiyonu Kullanımı Yöntemi

Bu yöntemde ilk olarak nedensel olmayan sonsuz dürtü yanıtlı uygun bir ideal frekans seçici süzgeç belirlenir, daha sonra doğrusal fazlı ve nedensel sonlu dürtü yanıtlı bir süzgeç bulunabilmesi için başlangıçta seçilen süzgecin birim dürtü yanıtı pencerelenir. Dolayısıyla, bu yöntemde uygun bir *pencereleme işlevi* ve *ideal bir süzgeç* seçilmesi önemlidir. İdeal süzgeç, geçirme bandında birim genlik kazancı ve doğrusal faz karakteristiği, söndürme bandında ise sıfır genlik kazancı (4.24) olan bir süzgeçtir. Aktarım işlevi $H_d(e^{j\omega})$ ($\omega_c < \pi$ band genişliğinde) ω_c kesim frekansı ve a gecikme olmak üzere şu şekildedir.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (4.24)$$

$H_d(e^{j\omega})$ 'nin ters Fourier dönüşümünü alınırsa süzgecin dürtü yanıtı bulunur.

$$\begin{aligned} h_d(n) &= F^{-1}[H_d(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$h_d(n)$ a ile simetriktir, bu sebeple ideal süzgecin pencerelenmesiyle elde edilecek sonlu dürtü yanıtlı süzgeç doğrusal fazlı olacaktır. M uzunluklu nedensel ve doğrusal fazlı sonlu dürtü yanıtlı $h(n)$ süzgecini bulabilmek için aşağıdaki eşitliğin kullanımı gereklidir.

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{M-1}{2} \quad (4.26)$$

Bu işleme 'pencereleme' denir ve şu şekilde gösterilir.

$$h(n) = h_d(n)W(n) \quad (4.27)$$

Burada $W(n)$ pencere işlevi olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$W(n) = \begin{cases} \alpha' \text{ ya göre simetrik fonksiyon} & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.28)$$

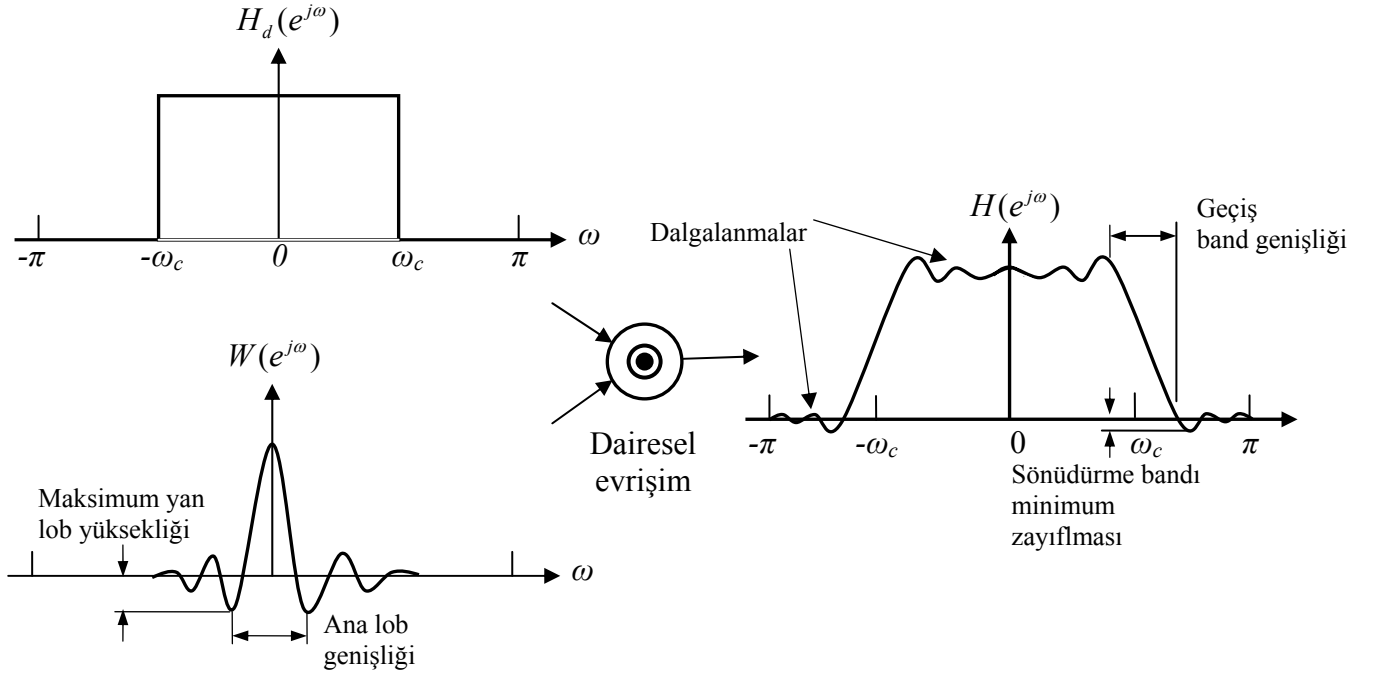
Farklı özelliklere sahip olan bir süzgeç tasarlamak için değişik $W(n)$ pencereleme işlevleri kullanılmalıdır. Aşağıda "dikdörtgen pencere" pencere işlevine örnek görülmektedir.

$$W(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} = R_M(n) \quad (4.29)$$

$H(e^{j\omega})$ nedensel sonlu dürtü yanıtı süzgeç yanıtı, $H_d(e^{j\omega})$ ve $W(e^{j\omega})$ pencere yanıtının frekans domeninde dairesel evrişimi sonucu elde edilir.

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) \odot W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\lambda}) H_d(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda \quad (4.30)$$

Bu işlem Şekil 4.3'te gösterilmektedir.



Şekil 4.3 Frekans domeninde pencereleme

- (1) $W(n)$ pencere işlevi sınırlı M uzunluğuna sahip olduğundan, frekans domeni ifadesi tepe yapan ana loba ve daha küçük yükseklikli yan loblara sahip olur.
- (2) Ana lob, $H(e^{j\omega})$ 'daki geçirme band genişliğinin ortaya çıkmasını sağlar. Ana lobun büyük olması ile geçirme band genişliği de büyük olur.
- (3) Yan loblar geçirme ve söndürme bandında birbirine benzer biçimleri olan dalgalanmalar (ripples) ortaya çıkmasına sebep olur.

Pencereleme yönteminde farklı özellikleri olan çeşitli pencereler kullanılabilir: Dikdörtgen pencere, Bartlett (üçgen) penceresi, Hanning penceresi, Hamming penceresi, Blackman penceresi ve Kaiser penceresi gibi. Aşağıdaki tabloda bazı pencere işlevlerinin özellikleri verilmektedir.

Tablo 4.2 Bazı pencere işlevlerinin karakteristiklerinin özeti

Pencere adı	ΔW Geçiş genişliği		Minimum söndürme bandı zayıflatması
	Yaklaşık değerler	Tam değerler	
Dikdörtgen	$4\pi / M$	$1.8\pi / M$	21 dB
Bartlett	$8\pi / M$	$6.1\pi / M$	25 dB
Hanning	$8\pi / M$	$6.2\pi / M$	44 dB
Hamming	$8\pi / M$	$6.6\pi / M$	53 dB
Blackman	$12\pi / M$	$11\pi / M$	74 dB

Bu pencere işlevlerini MATLAB yardımıyla oluşturmak için gerekli kodlar:

→ M noktalı dikdörtgen pencere işlevi üretmek için; "boxcar(M)", diğer pencereleme fonksiyonları kullanımı: Bartlett "triang(M)", Hanning "hanning(M)", Hamming "hamming(M)", Blackman "blackman(M)" ve beta değerli M noktalı dikdörtgen "kaiser(M, beta)"

MATLAB pencereleme işlevleri kullanılarak pencereleme yöntemi ile sonlu uzunluklu dürtü yanıtı olan süzgeçler tasarlanabilir. Sonlu uzunluklu dürtü yanıtı süzgeç tasarlanırken ideal alçak geçiren birim dürtü yanıtı $h_d(n)$ kullanılacağı için $h_d(n)$ ifadesinin de elde edilmesi gerekir. Aşağıdaki kod ile $h_d(n)$ elde edilebilir.

```
function hd = ideal_lp(wc, M);
% Ideal alçak geçiren süzgeç hesaplaması
%-----
% [hd] = ideal_lp(wc, M)
% hd = 0 ile M-1 arasındaki ideal birim dürtü yanıtı
% wc = radyan cinsinden kesim frekansı
% M = ideal süzgecin uzunluğu
alpha = (M-1) / 2;
n = [0 : 1 : (M-1)];
m = n - alpha + eps; % sıfıra bölme hatasını önlemek için en küçük
sayıyı ekler
hd = sin(wc*m) ./ (pi*m);
```

MATLAB'te pencere işlevi ile sonlu dürtü yanıtı süzgeç tasarlayan **fir1** adlı komut vardır. Ayrıca, sayısal süzgeçlerin frekans bölgesindeki genlik ve faz yanıtlarını gösteren **freqz** komutu da vardır. Aşağıda **freqz** komutu kullanılarak **freqz_m** adlı fonksiyon elde edilmektedir. Bu fonksiyon (bağıl dB ölçeği ile) mutlak ölçeğe genlik yanıtını hesaplar.

```

function [dB, mag, w] = freqz_m(b, a);
% freqz komutunun değiştirilmiş hali -----
% [db, mag, w] = freqz_m(b, a);
% db = 0 - pi radyan arasında hesaplanmış dB cinsinden bağıl genlik
% mag = 0 - pi radyan arasında hesaplanmış mutlak genlik
% w = 0 - pi radyan arasında 501 frekans örneği
% b = H(z) nin pay polinomu (FIR için b = h)
% a = H(z) nin payda polinomu (FIR için a = [1])
% [H,W] = FREQZ(B,A,N,'whole') %Matlab help: uses N points around the
whole unit circle.-----
[H,w] = freqz(b, a, 1000, 'whole');
H = (H(1:1:501))'; w = (w(1:1:501))';
mag = abs(H);
db = 20*log10((mag+eps)/max(mag));

```

Örnek 4.1:

Aşağıdaki özellikleri sağlayan uygun bir pencere işlevi seçerek alçak geçiren bir süzgeç tasarlayınız. Bu süzgecin zaman domenindeki birim dürtü yanıtını ve frekans yanıtını (genlik ve faz yanıtı olmak üzere) çizdiriniz.

$$\omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 0.25 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi, \quad A_s = 50 \text{ dB}$$

Çözüm

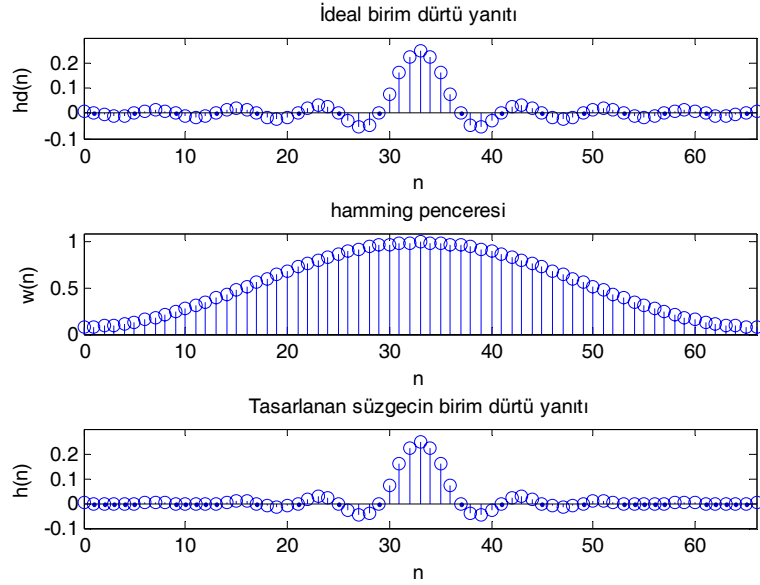
Hamming ve Blackman pencereleri söndürme bandında 50 dB'den daha fazla zayıflatma sağlar. Daha küçük geçiş bandı ve dolayısıyla daha küçük dereceye sahip olan hamming penceresini seçebiliriz. $R_p = 0.25 \text{ dB}$ geçirme bandı dalgalanma değerini kullanmamamıza rağmen tasarladığımız süzgecin ana dalgalanma değeri kontrol edilmelidir. Böylece istenilen toleransın da sağlandığı doğrulanır. Tasarım adımları aşağıdaki MATLAB kodunda görülebilir.

```

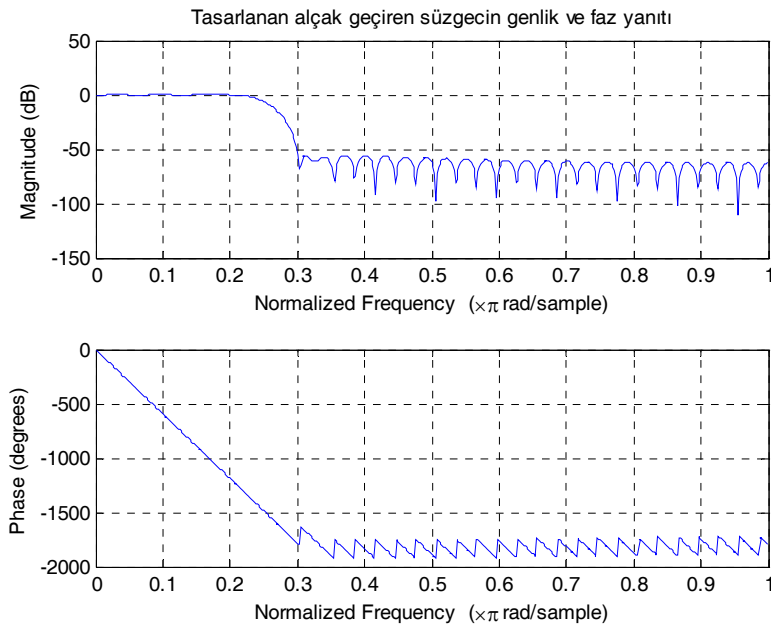
wp = 0.2*pi;
ws = 0.3*pi; tr_width = ws - wp;
M = ceil(6.6*pi / tr_width) + 1 %tabloyu kullanarak olması gereken süzgeç
derecesi bulunur.
n = [0 : 1 : M-1]; wc = ( ws+wp ) / 2 % ideal alçak geçiren süzgeç kesim
frekansı
hd = ideal_lp(wc, M); % ideal alçak geçiren süzgeç
w_ham = (hamming(M))'; %hamming penceresi
h = hd .* w_ham; [db,mag,w] = freqz_m(h,[1]); %FIR süzgeç tasarladığımız
için [1] katsayısını %kullanırız
delta_w = 2 * pi / 1000; Rp1 = -(min(db(1:1:wp/delta_w+1))) % ana iletim
bandı dalgalanması
Rp2 = (max(db(1:1:wp/delta_w+1)))
As = -round(max(db(ws/delta_w+1:1:501))) % min durdurma bandı zayıflatması
subplot(3,1,1); stem(n,hd); title('İdeal birim dürtü yanıtı')
axis([0 M-1 -0.1 0.3]); xlabel('n'); ylabel('hd(n)')
subplot(3,1,2); stem(n,w_ham); title('hamming penceresi')
axis([0 M-1 0 1.1]); xlabel('n');
ylabel('w(n)')
subplot(3,1,3); stem(n,h); title('Tasarlanan süzgecin birim dürtü yanıtı')
axis([0 M-1 -0.1 0.3]); xlabel('n'); ylabel('h(n)')
figure,
freqz(h,[1])
title('Tasarlanan alçak geçiren süzgecin genlik ve faz yanıtı')

```

Süzgeç tasarımında $M = 67$ değeri kullanılır, dolayısıyla süzgecin derecesi 67'dir. Sağlanan söndürme bandı zayıflatması 52 dB, geçirme bandı dalgalanması ise 0.0394 dB'dir. Aşağıdaki şekilde zaman ve frekans bölgesindeki süzgeç karakteristikleri verilmektedir.



Şekil 4.3 Örnek 4.1 ideal süzgeç sonuçları



Şekil 4.4 Örnek 4.1 genlik ve faz yanıtı

"fir1" MATLAB komutu ile sayısal süzgeç tasarlanması

`fir1` MATLAB komutu, pencere işlevi kullanım yöntemi ile doğrusal fazlı sayısal süzgeç tasarımını sağlar. Bu komut ile alçak geçiren, yüksek geçiren, band geçiren ve band söndüren süzgeç tasarlanabilir. En basit halinde süzgecin geçirme bandının merkez frekansındaki genlik yanıtı 0 dB'dir.

Komutun kullanım örnekleri:

→ $b = \text{fir1}(n, \omega_n)$; n -inci dereceden alçak geçiren sonlu dürtü yanıtı süzgecin $n + 1$ adet katsayısını döndürür. fir1 komutu bu örnekte Hamming penceresi kullanır ve $0 - \pi$ arasında değerler alan ω_n kesim frekansına sahiptir.

→ $b = \text{fir1}(n, \omega_n)$; komutundaki ω_n iki elemanlı bir vektör ise, fir1 komutu $\omega_1 < \omega < \omega_2$ arası geçirme bandı olan band geçiren süzgeç katsayılarını döndürür.

→ $b = \text{fir1}(n, \omega_n, \text{'ftype'})$; komutu süzgeç tipini tanımlar:

- 'high'; kesim frekansı ω_n olan yüksek geçiren süzgeç için
- 'stop'; band söndüren süzgeç için ($\omega_n = [\omega_1, \omega_2]$ ise band söndürme frekans aralığıdır).

→ $b = \text{fir1}(n, \omega_n, \text{window})$; komutu istenen pencere fonksiyonunu kullanarak alçak geçiren süzgeç katsayılarını döndürür.

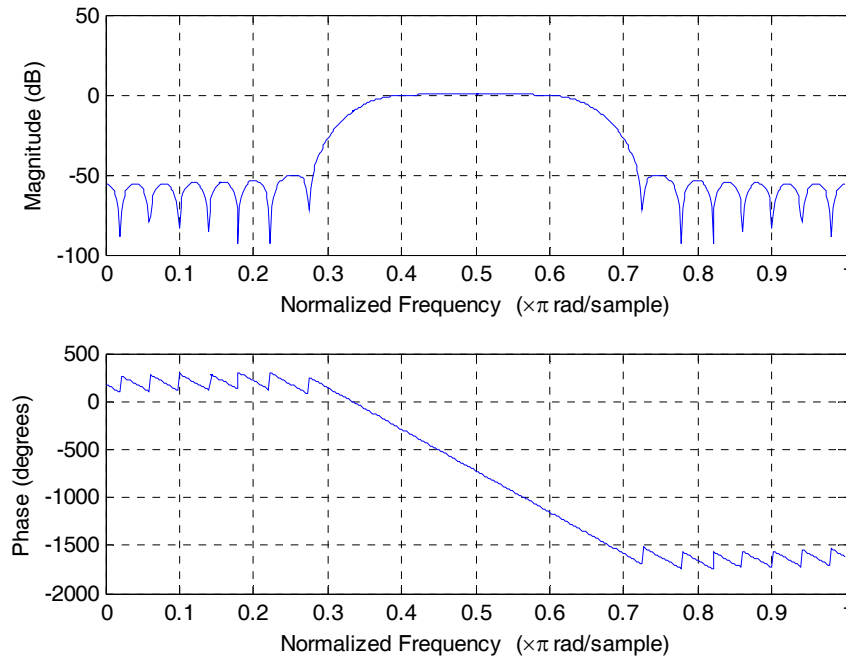
→ $b = \text{fir1}(n, \omega_n, \text{'ftype'}, \text{window})$; komutu istenen pencere fonksiyonunu ve süzgeç türünü kabul eder.

Örnek 4.2

48. derece sonlu dürtü yanıtı $0.35 < \omega < 0.65$ frekansları arasında geçirme bandına sahip olan bir süzgeç tasarlayınız.

Çözüm

```
b = fir1(48,[0.35 0.65]);
freqz(b,1,512)
```



Şekil 4.5 Örnek 4.2 genlik ve faz yanıtı

Sonsuz Dürtü Yanıtlı Süzgeçler (IIR)

Dürtü yanıtı sonsuz uzunluklu olarak tanımlanan sayısal süzgeçlere IIR (Infinite Impulse Response) süzgeçler denir. Bir IIR süzgeç $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ dürtü yanıtı, fark denklemi veya aktarım işlevi ile tanımlanır. IIR süzgeç aktarım işlevi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (4.31)$$

Burada $M \leq N$ olup $b_i, i = 1, 2, \dots, N$ katsayıları sıfırdan farklıdır. Tasarımın amacı a_i ve b_i katsayılarının bulunması ve $H(z)$ 'in istenilen özellikleri sağlamasıdır. Sonsuz dürtü yanıtlı sayısal süzgeç tasarımı için iki genel yaklaşım mevcuttur. En çok kullanılan yöntemde, başlangıçta analog bir örnek IIR süzgeç tasarlanır, daha sonra eşdeğer bir sayısal süzgeç analog süzgeçten elde edilir. Bu yöntem IIR süzgeç tasarımı yapmak için basit bir yaklaşımdır. İkinci yöntemde ise, doğrusal veya doğrusal olmayan bir denklem takımının çözümü için bilgisayar kullanımı gerektiren algoritmik tasarım süreci ile süzgeç tasarlanır. İkinci yöntem hiçbir analog süzgeç örneğinin mevcut olmadığı durumda keyfi bir frekans yanıtı karakteristiği olan sayısal süzgeçlerin tasarımında kullanılır. Deneyde ilk yaklaşım (analog prototip süzgeç) ile IIR süzgeç tasarımı yapılacaktır.

IIR süzgeç tasarım adımları

- 1) Analog alçak geçiren süzgeç tasarımı
- 2) Sayısal alçak geçiren süzgeç elde etmek için $s \rightarrow z$ ile süzgeç dönüşümü uygulanması
- 3) Sayısal alçak geçiren süzgeçten diğer sayısal süzgeçlerin elde edilmesi için frekans-bandı dönüşümlerinin uygulanması

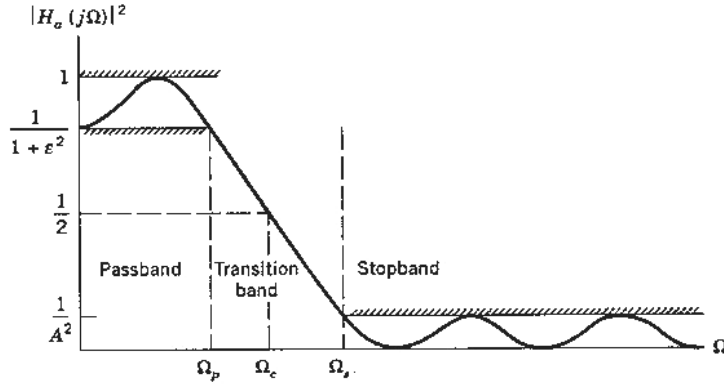
IIR süzgeç tasarımında FIR süzgeç tasarımına göre daha düşük dereceli süzgeçler kullanarak frekans yanıtına yaklaşılr. IIR süzgeç frekans yanıtı geçiş bandı daha dardır. IIR süzgeçler FIR süzgeçler gibi doğrusal fazlı tasarlanamazlar. IIR süzgeçlerin sıfırı (zero) olduğu kadar kutbu (pole) da mevcuttur. Öncelikle analog süzgeç ve genlik yanıtı karesi özelliklerini inceleyelim. Analog süzgecin frekans yanıtını $H_a(j\Omega)$ ile gösterelim. Genlik yanıtının karesi üzerindeki alçak geçiren süzgeç özellikleri aşağıdaki eşitlikte görülmektedir.

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq 1, \quad |\Omega| \leq \Omega_p \quad (4.32)$$

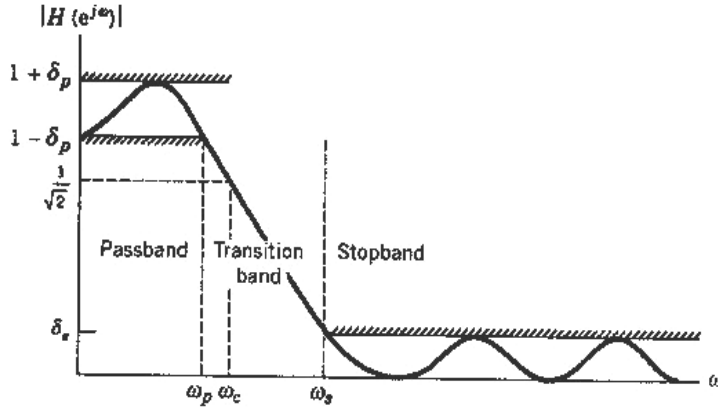
$$0 \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq \frac{1}{A^2}, \quad \Omega_s \leq |\Omega|$$

ε geçirme bandı dalgalanmasıdır. Ω_p geçirme bandı kesim frekansdır (rad/sn). A söndürme bandı zayıflaması ve Ω_s söndürme bandı kesim frekansdır (rad/sn). Analog alçak geçiren süzgecin genlik yanıtının karesi şekil 4.6'da gösterilmiştir. Ω_c 3-dB kesim frekansını gösterir. Şekil 4.6 sayısal alçak geçiren süzgeç uygulaması için düzenlenirse, analog frekanslar Ω_c, Ω_s ve Ω_p normalize edilmiş sayısal frekanslar (ω_c, ω_s ve ω_p) ile yer değiştirir. ω_c, ω_s ve ω_p birimleri radyan olup 0 ile

π arasında değerler alırlar. Sayısal alçak geçiren süzgecin frekans yanıtının genliği şekil 4.7'de görülmektedir. δ_p geçirme bandı maksimum dalgalanmasını ve δ_s ise söndürme bandı zayıflatmasını göstermektedir.



Şekil 4.6 Analog süzgeç genlik yanıtının karesi



Şekil 4.7 Sayısal süzgecin genlik yanıtı

ϵ ve A parametreleri sırasıyla dB cinsinden olan R_p (geçirme bandı dalgalanması) ve A_s (söndürme bandı zayıflatması) parametreleriyle aşağıdaki gibi ilişkilidir.

$$\begin{aligned} R_p &= -10 \log_{10} \frac{1}{1 + \epsilon^2} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} \\ A_s &= -10 \log_{10} \frac{1}{A^2} \Rightarrow A = 10^{A_s/10} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$H(e^{j\omega})$ 'nın maksimum geçirme bandı genliği 1'e normalize edilirse (4.33) eşitliğindeki δ_p ve δ_s parametreleri A ve ϵ ile ilişkilendirebilir.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} &= \sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon^2}} \Rightarrow \epsilon = \frac{2\sqrt{\delta_p}}{1 - \delta_p} \\ \frac{\delta_s}{1 + \delta_p} &= \frac{1}{A} \Rightarrow A = \frac{1 + \delta_p}{\delta_s} \end{aligned}$$

$H_a(s)$ s domeni sistem fonksiyonu şu şekilde gösterilir.

$$H_a(j\Omega) = H_a(s) \Big|_{s=j\Omega} \quad (4.34)$$

Buradan

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=s/j} \quad (4.35)$$

elde edilir.

Genlik yanıtı işlevinin karesinin sıfır ve kutupları, $j\Omega$ eksenine simetrik olacak şekilde yerleşirler. $H_a(s)H_a(-s)$ 'in sıfır-kutup diyagramından analog süzgecin sistem fonksiyonu $H_a(s)$ çıkarılır. $H_a(s)$ kararlı ve nedensel bir süzgeçtir. Böylece $H_a(s)$ kutupları $H_a(s)H_a(-s)$ 'in bütün sol yarı düzlemdeki kutuplarından oluşur. $H_a(s)$ 'in sıfırları s düzleminde herhangi bir yerde olabilir.

Analog Prototip (ilk örnek) Süzgeç Tasarımı

Bu yöntem ile IIR sayısal süzgeç tasarlamak için örnek bir analog süzgeç kullanılacağından alçak geçiren örnek analog süzgecin nasıl tasarlanacağını bilmesi gereklidir. Frekans dönüşümleri kullanılarak alçak geçiren örnek bir analog süzgeç, yüksek geçiren, band geçiren veya band söndüren süzgece dönüştürülebilir.

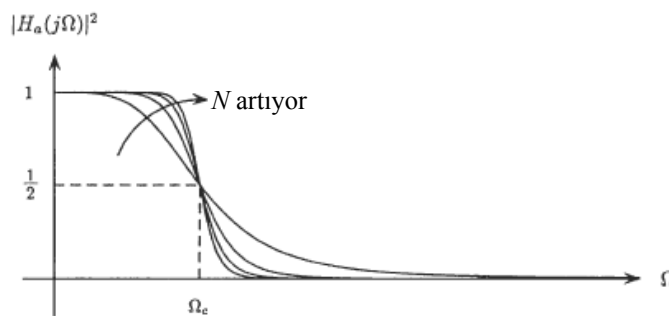
MATLAB'te 4 adet analog ilk örnek (prototip) süzgeç vardır. Bunlar Butterworth, Chebyshev tip 1, Chebyshev tip 2 ve eliptik süzgeçleridir. Butterworth süzgeçler maksimum düz geçirme bandı ve söndürme bandına sahip olup, Chebyshev tip 1 süzgeci geçirme bandında, Chebyshev tip 2 süzgeci söndürme bandında ve eliptik süzgeçte ise her iki banda da dalgalanma vardır.

Butterworth Analog Örnek Süzgeç

Bu süzgeç genlik yanıtının hem geçirme bandı hem de söndürme bandında düz olmasıyla nitelenir. N . dereceden alçak geçiren Butterworth süzgeç genlik yanıtının karesi şu şekildedir.

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (4.36)$$

N süzgecin derecesini ve Ω_c de rad/sn cinsinden süzgeç kesim frekansını gösterir. Analog alçak geçiren Butterworth süzgecin genlik yanıtının karesi aşağıdaki şekilde görülmektedir.



Şekil 4.8 Butterworth süzgeci genlik cevabının karesi

Bu şekilden şu özellikler çıkarılır:

$\Omega = 0$ da $|H_a(j0)|^2 = 1$ ve $\Omega = \Omega_c$ de $|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$ dir. $|H_a(j\Omega)|^2$ artan Ω 'ye bağlı olarak monoton azalan bir işlevdir. $|H_a(j\Omega)|^2 N \rightarrow \infty$ için ideal alçak geçiren süzgece yaklaşır. $|H_a(j\Omega)|^2 \Omega = 0$ da maksimum düzdür. Süzgeç derecesi N arttıkça geçiş bandı daralır ve geçirme bandından söndürme bandına hızlı değişir.

$H_a(s)$ sistem işlevini elde etmek için (4.36) eşitliği (4.35) eşitliğindeki biçime dönüştürülür ve

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (4.37)$$

bulunur. $H_a(s)H_a(-s)$ $2N$ tane kutbu Ω_c yarıçaplı birim daire üzerinde eşit uzaklıklarda, π/N radyan açısal aralıklarla dizilir. (4.38) eşitliğinde $H_a(s)H_a(-s)$ kutupları görülmektedir. Bütün kutuplar $j\Omega$ eksenine göre simetrik yerleştirilmiştir. Kararlı ve nedensel süzgeç $H_a(s)$, $H_a(s)H_a(-s)$ in sol yarı düzlemdeki N tane kutbu seçilerek oluşturulur. $p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)}$ $k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$

$H_a(s)$ süzgeci aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir.

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{\text{Sol kutuplar}} (s - p_k)} \quad (4.38)$$

Geçirme bandı sınırı Ω_p , söndürme bandı sınırı Ω_s , geçirme bandı dalgalanması R_p (dB) ve söndürme bandı zayıflaması A_s (dB) verilen bir Butterworth süzgecin tasarım adımları.

1) Süzgeç derecesi N elde edilir.

$$N = \frac{\log_{10}[(10^{R_p/10} - 1)/(10^{A_s/10} - 1)]}{2 \log_{10}(\Omega_p / \Omega_s)}$$

N değerini tamsayı olması gerektiği için sonuç yukarı yuvarlanır.

2) 3-dB Ω_c kesim frekansı için istenilen aralıkta bir değer seçilir.

$$\Omega = \Omega_p \text{ de } \Omega_c = \frac{\Omega_p}{2N \sqrt{(10^{R_p/10} - 1)}} \quad \Omega = \Omega_s \text{ de } \Omega_c = \frac{\Omega_s}{2N \sqrt{(10^{A_s/10} - 1)}} \Omega_c$$

Ω_c ikisi arasında bir değer almalıdır.

3) Bulunan N ve Ω_c ile Butterworth süzgecin aktarım işlevi $H_a(s)$, $|H_a(j\Omega)|^2$ kullanılarak elde edilir. s düzleminin sol tarafındaki kutuplarından $H_a(s)$ elde edilir.

$[Z, P, K] = \text{butter}(N)$

butter(N) işlevi N . dereceden Butterworth analog örnek süzgecin sıfırlarını (Z), kutuplarını (P) ve K kazanç değerini hesaplar. Sonuçta elde edilen süzgecin birim çemberin sol yarı düzleminde N tane kutbu olup, sıfırı yoktur ve K kazanç değeri de 1'dir. $[b,a] = \text{zp2tf}(z,p,k)$ komutu sıfır-kutup değerlerini aktarım işlevine dönüştürür. b ve a pay ve paydadaki aktarım işlevi katsayılarıdır. Butterworth Süzgecinde b değeri 1 dir.

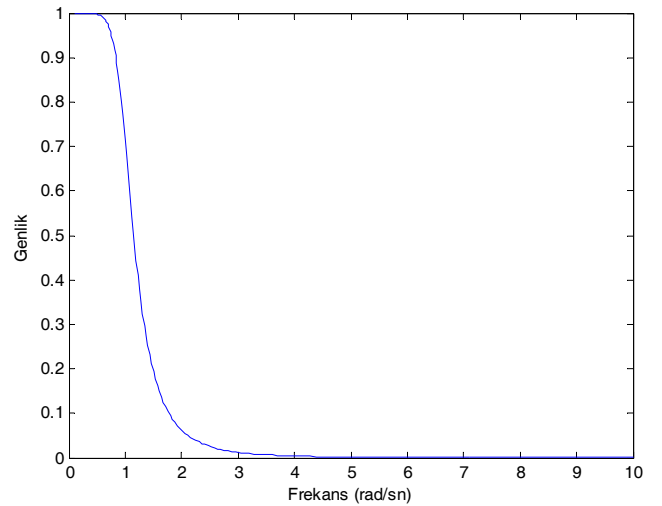
Örnek 4.3

$N = 4$. dereceden Butterworth analog süzgecin genlik yanıtını çizdiriniz ($\Omega_c = 1$).

Çözüm

Freqs fonksiyonu s -domeninde frekans yanıtını verir ve otomatik olarak 200 tane ω rad/sn frekansı seçip, frekans yanıtını hesaplar.

```
[z,p,k]=butter(4);%4. dereceden
Butterworth süzgeci sıfır (Z),
kutup (P) ve kaz (K)
[b,a]=zp2tf(z,p,k);%b, a filtre
katsayı dizileri elde edilir
[H,w]=freqs(b,a); % s domeni
transfer fonksiyonu, elde edilir.
H otomatik 200 w değeri için
hesaplanır.
plot(w, abs(H));
ylabel('Genlik');
xlabel('Frekans (rad/sn)');
```



Şekil 4.9 Örnek 4.3 süzgeç genlik yanıtı

$[N, Wn] = \text{buttord}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s)$

buttord komutu geçirme bandında R_p dB'den az ve söndürme bandında R_s dB'den fazla kadar zayıflatma yapan en düşük sayısal butterworth süzgeci derecesini verir. ω_p ve ω_s değeri 0 ile 1 arasında olan normalize edilmiş geçirme ve söndürme bandlarının sınır frekans değerleridir. Burada 1 değeri π radian örnek sonucuna karşılık gelmektedir.

$[N, Wn] = \text{buttord}(\omega_p, \omega_s, R_p, R_s, 's')$ komutu W_p ve W_s [radyan/saniye] biriminde olmak üzere, analog bir süzgeç için hesaplama yapar.

$[b, a] = \text{butter}(N, Wn, 's')$ komutu N . derece alçak geçiren Wn [rad/sn] açısal kesim frekanslı bir analog Butterworth süzgeç tasarlar. $Wn = [\omega_{n1} \ \omega_{nu}]$ ise **butter** komutu $2n$. derece band geçiren ve geçirme bandı $\omega_{n1} \ \omega_{nu}$ sınır frekansları olan süzgeç tasarlar. Benzer şekilde **cheby1**, **cheby2** ve **ellip** komutları da vardır.

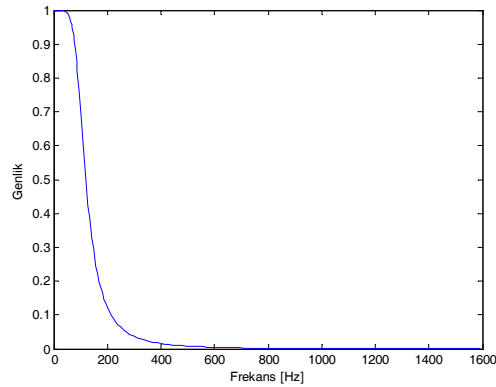
$[b, a] = \text{butter}(n, Wn)$ **butter** komutu ile ($0.0 < Wn < 1.0$) kesim frekanslı N . dereceden $N+1$ uzunluklu sayısal Butterworth süzgeç katsayıları elde edilir.

Örnek 4.4

100 Hz kesim frekanslı 3. dereceden bir Butterworth analog süzgeç tasarlayınız.

Cözüm

```
[b,a]=butter(3,2*pi*100,'s');
[H,w]=freqs(b,a);
plot(w/(2*pi),abs(H));
xlabel('Frekans [Hz]');
ylabel('Genlik');
```



Şekil 4.10 Örnek 4.4 süzgeç genlik yanıtı

Analog - Sayısal Süzgeç Dönüşümleri

İlk olarak uygun bir örnek analog süzgeç üretilir ve daha sonra sayısal dönüşüm yapılarak sayısal süzgeç elde edilir. Bu dönüşüm genellikle s ve z düzleminde yapılır.

İdeal dönüşümün özellikleri:

- 1) Kararlı ve nedensel bir analog süzgeci kararlı ve nedensel sayısal bir süzgece dönüştürme
- 2) Analog süzgecin genlik ve faz yanıtı karakteristiklerinin korunması

1. özelliğin sağlanması için sol yarı s düzlemi z düzleminde birim çemberin içine, sağ yarı s düzlemi de z düzleminde birim çember dışına aktarılmalıdır. 2. özellik sağlanırken analog süzgecin frekans yanıtı karakteristiklerini korumak için $j\Omega$ eksenini birebir (one to one) birim çembere, $|z|=1$ dönüştürmelidir

IIR sayısal süzgeçler, analog süzgeç yaklaşıklarından aşağıdaki yöntemler ile elde edilebilir.

- 1) Değişmez-dürtü yanıtı yöntemi
- 2) 1. yöntemin değiştirilmiş hali
- 3) Uygunlaştırılmış- z dönüşümü
- 4) Bilineer dönüşüm

Bilineer dönüşüm

Değişmez dürtü yanıtı yönteminde ortaya çıkan frekans yanıtı örtüşmesini önlemek için s düzleminde z düzlemine birebir bir dönüşüme ihtiyaç duyulur. Bu problemi çözebilmek için önce $s \rightarrow s'$ birebir dönüşümü kullanılır. Daha sonra, örtüşme etkisi olmadan s' düzleminde z düzlemine dönüşüm gerçekleştirilir. s düzleminde z düzlemine olan bu geçiş şu şekildedir.

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2} \quad (4.39)$$

Bilineer dönüşüm yardımıyla analog süzgeç transfer fonksiyonundan $H_a(s)$ sayısal süzgeci tasarlanabilir. Önce örnek bir analog süzgeç tasarlanır ve bilineer dönüşüm

$H(z) = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$ uygulanarak sayısal süzgeç elde edilir.

Bilineer Dönüşümün Özellikleri

- 1) Sağ-yarı s -düzlem bölgesi, z düzleminde $|z|=1$ birim dairesi dışındaki noktalara karşı düşer.
- 2) s -düzleminde $j\Omega$ eksenindeki noktalar z -düzleminde $|z|=1$ birim dairesi üzerine karşı düşer.
- 3) Sol-yarı s düzlem bölgesi z düzleminde $|z|=1$ birim dairesi içindeki noktalara karşı düşer. Kararlı bir analog süzgecin nedenselliği korunurken kararlı bir sayısal süzgeç aktarım işlevi vereceği görülmektedir. Dürtü yanıtının korunamaması bilineer dönüşümün bir dezavantajıdır.
 $j\Omega$ ekseninde birim çember arasındaki ilişki doğrusal değildir. Analog frekans Ω doğrusal olmayan sayısal frekans ω ($-\pi, \pi$) eksenine sıkıştırılmıştır. Ω ile ω arasındaki doğrusal olmayan ilişkiyi elde edebiliriz.

$$s = \left(\frac{2}{T} \right) \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \left(\frac{2}{T} \right) j \tan(\omega/2) = j\Omega \quad \text{ifadesi ile}$$

$$\Omega = \left(\frac{2}{T} \right) \tan(\omega/2) \quad (4.40)$$

(4.40) eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte düşük frekanslar için sayısal süzgecin genlik yanıtı yaklaşık olarak analog süzgecin genlik yanıtıyla aynı olup geçiş yaklaşık doğrusal olur. Yüksek frekanslarda geçiş doğrusal olmayıp sayısal süzgeçte frekansa bağlı bozulma olur. Bu bozulmaya sarma (wrapping) etkisi denir. Sarma etkisi analog süzgece önsarma yapılarak giderilir. Örneğin geçirme ve söndürme band sınırları ω_p ve ω_s olan sayısal süzgeç tasarımı için bu değerlere aşağıdaki gibi bir önsarma uygulanır. Buradaki amaç elde edilmek istenen sayısal frekansları verecek Ω_s ve Ω_p analog kesim frekanslarını bulmaktır.

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \quad \Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \quad (4.41)$$

Tasarım Süreci: Sayısal süzgecin ω_p , ω_s , R_p ve A_s parametreleri verildiği durumda $H(z)$ transfer fonksiyonunu elde etmek istiyoruz.

- 1) T için bir değer seçilir.
- 2) ω_p ve ω_s kesim frekansları önsarmalanır, daha sonra (4.41) eşitliğini kullanılarak Ω_s ve Ω_p hesaplanır.
- 3) Ω_s , Ω_p , R_p ve A_s özellikleri olan $H_a(s)$ analog örnek süzgeç tasarlanır.
- 4) $H(z) = H_a\left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$ bileener dönüşümü uygulanır ve sayısal süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$ elde edilir.

Örnek 4.5

Aşağıdaki verilen özelliklere göre bir sayısal alçak geçiren Butterworth süzgeç tasarlayıp genlik yanıtını çizdiriniz.

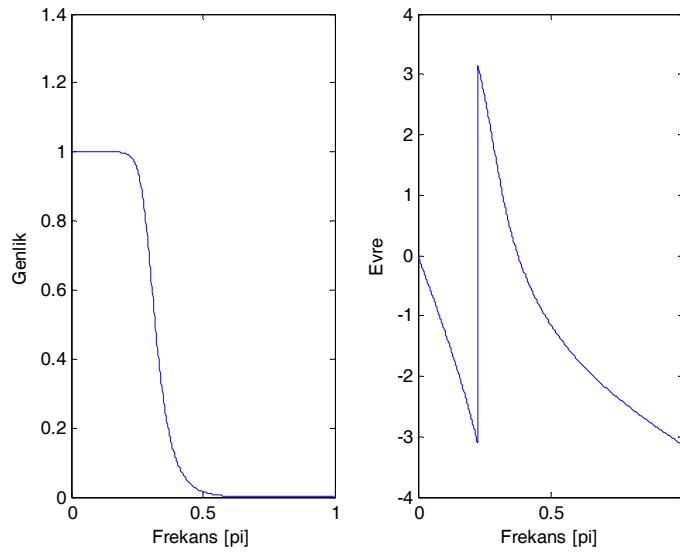
$$\omega_p = 0.2\pi \quad R_p = 1 \text{ dB} \quad \omega_s = 0.3\pi \quad A_s = 15 \text{ dB}$$

Cözüm

```

wp=0.2*pi;ws=0.3*pi;
Rp=1;As=15;T=1;Fs=1/T;
OmegaP=(2/T)*tan(wp/2);
OmegaS=(2/T)*tan(ws/2);
[N,Wn]=buttord(OmegaP, OmegaS, 1, 15, 's');
[z,p,k]=buttapp(N);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
[bt, at]=bilinear(b,a,Fs);
[H,w]=freqz(bt, at);
subplot(121); plot(w/pi, abs(H));xlabel('Frekans [pi]');ylabel('Genlik');
subplot(122); plot(w/pi, angle(H));xlabel('Frekans [pi]');ylabel('Evre');

```



Şekil 4.11 Örnek 4.5 süzgeç genlik ve faz yanıtı

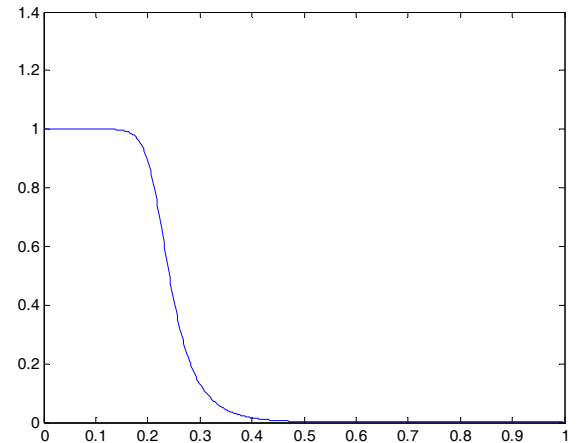
Örnek 4.6

$[b,a]=\text{butter}(N, w_n)$ komutu ile N . derece alçak geçiren sayısal butterworth süzgeci tasarlanabilir. $w_n [\pi]$ kesim frekansı önsarmalama ile elde edilir.

```

wp=0.2*pi;
ws=0.3*pi;
Rp=1;
As=15;
T=1;
Fs=1/T;
OmegaP=(2/T)*tan(wp/2);
OmegaS=(2/T)*tan(ws/2);
N=ceil((log10((10^(Rp/10)-1)/(10^(As/10)-1)))/(2*log10(OmegaP/OmegaS)));
OmegaC=OmegaP/((10^(Rp/10)-1)^(1/(2*N)));
wn=2*atan(OmegaC*T)/2;
[b,a]=butter(N,wn/pi);
[H,W]=freqz(b,a);
plot(W/pi, abs(H));

```



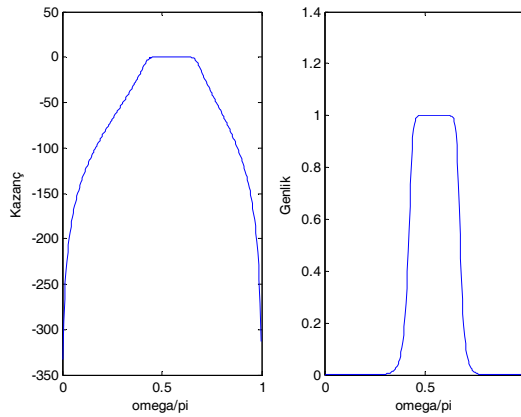
Şekil 4.12 Örnek 4.6 süzgeç genlik yanıtı

Örnek 4.7

Normalize geçirme bandı sınırları 0.45 ve 0.65, normalize söndürme bandı sınırları 0.3 ve 0.75, geçirme bandı dalgalanması 1 dB ve minimum söndürme bandı zayıflaması 40 dB olan IIR butterworth band geçiren süzgeç tasarlayınız.

Çözüm

```
Wp=[0.45 0.65];Ws=[0.3 0.75];
Rp=1; As=40;
[N,Wn]=buttord(Wp, Ws, Rp, As);
[b,a]=butter(N,Wn);[h,omega]=freqz(b, a, 256);
gain=20*log10(abs(h));
subplot(121); plot(omega/pi,gain);
xlabel('omega/pi'); ylabel('Kazanç');
subplot(122); plot(omega/pi,abs(h));
xlabel('omega/pi'); ylabel('Genlik');
```



Şekil 4.13 Örnek 4.7 süzgeç genlik yanıtı

Ödev

1. 400 Hz ile 600 Hz söndürme bandında en az 25dB zayıflatma yapan, $\omega \leq 100$ ve $\omega \geq 900$ için geçirme bandı dalgalanması (R_p) en fazla 3dB olan analog bir band söndüren süzgeç tasarlayınız.

2. Aşağıda verilen özelliklere göre band geçiren sayısal bir süzgeç tasarlayarak birim dürtü yanıtını ve frekans yanıtını (genlik ve faz yanıtları olarak) çizdiriniz.

Alt söndürme köşesi: $w_{1s} = 0.2\pi$, $A_s = 60$ dB

Alt geçirme köşesi: $w_{1p} = 0.35\pi$, $R_p = 1$ dB

Üst geçirme köşesi: $w_{2p} = 0.65\pi$, $A_s = 1$ dB

Üst söndürme köşesi: $w_{2s} = 0.8\pi$, $R_p = 60$ dB

Not: Bu süzgecin tasarımında iki geçirme bandı vardır, süzgecin derecesini bulmak için bunlardan küçük olanı seçilir. Ayrıca, band geçiren süzgeç kesim frekansları iki ayrı alçak geçiren süzgecin farkı olarak ifade edilebilir.

3. Geçirme bandı kesim frekansı Ω_p 0.2π , söndürme bandı kesim frekansı Ω_s 0.3π , geçirme bandı dalgalanması R_p 7dB ve söndürme bandı zayıflatması A_s 16dB olan alçak geçiren analog bir butterworth süzgeç tasarlayıp frekans yanıtını çizdiriniz.

4. Aşağıdaki özelliklere sahip sayısal alçak geçiren Butterworth süzgeç tasarlayıp genlik yanıtını çizdiriniz. $\omega_p = 0.4\pi$ $R_p = 0.5$ dB $\omega_s = 0.6\pi$ $A_s = 50$ dB