

Deney 2:

Fark Denklemleri ve Sayısal Süzgeçlerin Geçici Davranışları

Ve

DZD Sistemlerin Frekans Yanıtının Frekans Bölgesinde Gösterilimi

Amaç

Bu deneyin amacı, doğrusal, zamanla değişmeyen (DZD) ayrık zamanlı sistemlerin fark denklemi gösterimini kullanarak ayrık zamanda sistem yanıtı konusuna bir giriş yapmaktır. Daha sonra, DZD sistemlerin ve frekans yanıtlarının frekans bölgesinde gösterilmesi amaçlanmaktadır.

BÖLÜM-1

Giriş

Daha önceki deneyde DZD sistemleri öğrenmiş ve evrişim konusunda çalışmıştık. Bu deneyde ise fark denklemlerini öğreneceğiz. Sistem yanıtının, doğrusal sabit katsayılı fark denklemlerinin özyinelemesiyle oluşturulabileceğini göstereceğiz.

Eğer bir ayrık-zamanlı DZD sistemin çıkışının o anki değeri, girişin gelecekteki değerlerine bağlı değilse, o ayrık-zaman DZD sistem “nedenseldir.” Bu özellik tüm m ve n tamsayı değerleri için aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$y(m) = \text{DZD}[x(n)] \quad n \leq m \quad (2.1)$$

Bir DZD sistemin giriş-çıkış ilişkisi birim darbe yanıtı $h(n)$ ile tanımlanır. Birim darbe fonksiyonu sadece $n = 0'$ da sıfırdan farklı olduğu için, bir nedensel sistemin birim darbe yanıtı $h(n)$, $n < 0$ değerleri için sıfır olmalıdır. Nedensel DZD sistem için evrişim toplamı (2.2)'de verilmiştir.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k) \quad (2.2)$$

$$= x(n)h(0) + x(n-1)h(1) + \dots + x(0)h(n) + x(-1)h(n+1) + \dots = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k)$$

(2.2)'de verilmiş olan bir sistemin evrişim toplamı kullanılarak gerçekleştirilmesi, sonsuz sayıda toplama, çarpma ve hafıza elemanı gerektireceğinden pratikte mümkün değildir. Evrişim yönteminin yanı sıra sonsuz birim darbe yanıtı (IIR) bir sistem, doğrusal sabit katsayılı fark denkleminin özyinelenmesi ile de çözülebilir.

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad \forall n \in Z \quad (2.3)$$

Burada $x(n)$ ve $y(n)$ sistemin giriş ve çıkış dizileri, a_k ve b_k sabit katsayılar olmak üzere bu fark denkleminin derecesi maksimum(N, M)'dir. Bu denklem, giriş değerleri ve daha önceden hesaplanmış çıkış değerleri verildiğinde, o anki çıkışı hesaplamak için döngüsel bir yaklaşım tanımlar. Çıkışı tek başına elde etmek için (2.3) $b_0=1$ olacak şekilde normalize edilirse (2.4) elde edilir.

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k), \quad \forall n \in Z \quad (2.4)$$

(2.4)'ü açarsak:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N) \quad (2.5)$$

O anki çıkış,

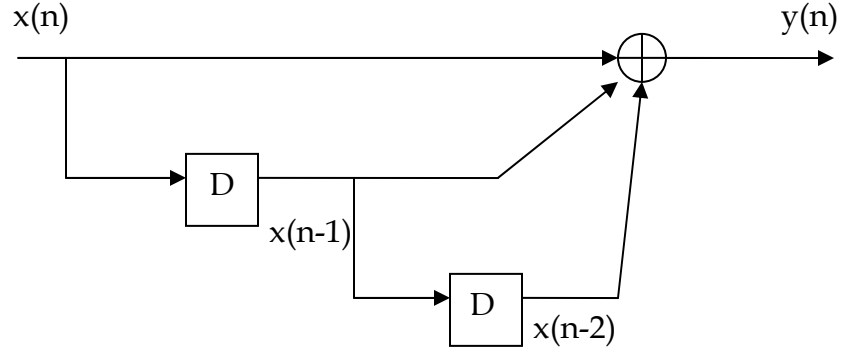
- (i) o anki giriş $b_0 x(n)$,
- (ii) daha önceki M giriş $b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M)$,
- (iii) daha önceki N çıkış $-a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N)$, değerlerine

bağlıdır.

Girişin o anki ve daha önceki terimleri “döngüsel olmayan” terimler veya “yürüyen ortalama”lı terimler olarak adlandırılır; daha önceki çıkışlara ait terimler ise “döngüsel” veya “özyineleme” li terimler olarak adlandırılır.

Örnek 2.1

Şekil 2.1 'deki gibi verilen bir sistem düşünelim. Burada D birim gecikme terimlerini ifade etmektedir.



Şekil 2.1

Sistemin fark denklemini, şekilden çıkış $y(n)$ ve giriş $x(n)$ arasındaki ilişkiyi bularak aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2).$$

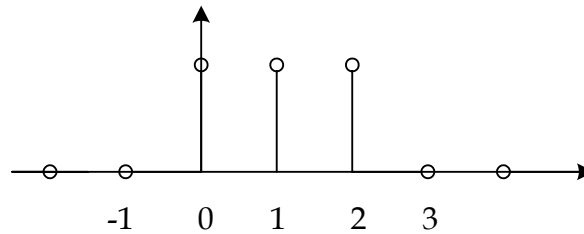
Sisteme birim darbe $\delta(n)$ 'i giriş olarak uygulayarak birim darbe yanıtı $h(n)$ 'i buluruz.

$$h(0) = \{\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)\}_{n=0} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$h(1) = \{\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)\}_{n=1} = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$h(2) = \{\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)\}_{n=2} = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$h(n) = 0, \text{ diğ}er \text{ } n \text{ değ}erleri için.$$

Şekil 2.2 Birim darbe yanıtı $h(n)$

Bu sonlu birim darbe yanıtı (FIR) bir sistemdir. Sistemin birim darbe yanıtı sonlu uzunlukta sıfır olmayan eleman içerir.

Şimdi, giriş olarak bir basamak fonksiyonuna sahip olduğumuzu düşünelim, $x(n) = u(n)$. Bu durumda, çıkış şu değerleri alır:

$$y(0) = \{u(n) + u(n-1) + u(n-2)\}_{n=0} = 1 + 0 + 0 = 1$$

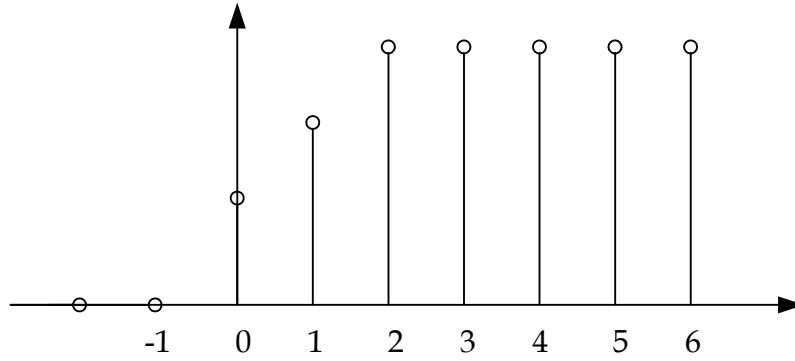
$$y(1) = \{u(n) + u(n-1) + u(n-2)\}_{n=1} = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$y(2) = \{u(n) + u(n-1) + u(n-2)\}_{n=2} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$y(3) = \{u(n) + u(n-1) + u(n-2)\}_{n=3} = 1 + 1 + 1 = 3$$

...

$$y(n) = \{u(n) + u(n-1) + u(n-2)\} = 1 + 1 + 1 = 3$$



Şekil 2.3 Basamak Yanıtı

Böylece, $x(n) = u(n)$ girişine verilen sistem yanıtını elde ettik. Şimdi, verilen giriş ile çıkışın, fark denkleminin yinelenmesiyle kolayca bulunabileceğini göreceğiz.

Örnek 2.2

Aşağıda gibi bir fark denklemi verilsin. (3 noktalı ortalama alıcı)

$$y(n) = x(n+1) + x(n) + x(n-1)$$

Eğer giriş dizisi aşağıdaki gibi ise çıkış dizisini bulun.

$$x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$$

Not : Bu sistem nedensel değildir.

Cözüm :

1) Yineleme ile çözüm

$$y(-3) = x(-3+1) + x(-3) + x(-3-1) = x(-2) + x(-3) + x(-4) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$y(-2) = x(-2+1) + x(-2) + x(-2-1) = x(-1) + x(-2) + x(-3) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$y(-1) = x(-1+1) + x(-1) + x(-1-1) = x(0) + x(-1) + x(-2) = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$y(0) = x(0+1) + x(0) + x(0-1) = x(1) + x(0) + x(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$y(1) = x(1+1) + x(1) + x(1-1) = x(2) + x(1) + x(0) = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$y(2) = x(2+1) + x(2) + x(2-1) = x(3) + x(2) + x(1) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$y(3) = x(3+1) + x(3) + x(3-1) = x(4) + x(3) + x(2) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$y(n) = 0, n \geq 3 \text{ için.}$$

2) Evrişim ile çözüm

Birim darbe yanıtını bulalım.

$$h(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$$

Şimdi girişin $x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$ olduğunu düşünün,

$$y(n) = \text{DZD} [x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

Evrişimin nasıl alındığını bir önceki deneyde (örnek 1.1) incelemiştik. Sonuçların aynı olduğunu görebiliriz.

Örnek 2.3

Aşağıdaki gibi bir fark denklemi verilsin.

$$y(n) = 0.6y(n-1) + x(n)$$

a) $x(n) = \delta(n)$ ve $y(-1) = 0$ ise, $n > 0$ için $y(n)$ ' i bulun.

b) $x(n) = u(n)$ ve $y(-1) = 0$ ise, $n > 0$ için $y(n)$ ' i bulun.

c) $x(n) = u(n)$ ve $y(-1) = 2$ ise, $n > 0$ için $y(n)$ ' i bulun.

Cözüm :

a) $y(n) = 0.6y(n-1) + x(n)$, $x(n) = \delta(n)$ ve $y(-1) = 0$ ise,

$$y(0) = 0.6y(-1) + 1 = 1$$

$$y(1) = 0.6y(1-1) + 0 = 0.6$$

$$y(2) = 0.6y(2-1) + 0 = 0.36$$

...

$$y(n) = 0.6y(n-1) + 0 = 0.6^2 * y(n-2) + 0 = \dots = (0.6)^n$$

Çıkış $y(n)$ aynı zamanda sistemin birim darbe yanıtı olarak da adlandırılır. Bu sistem yanıtının sonsuz birim darbe yanıtı (IIR) olduğunu not ediniz.

b) Aynı yol ile,

$$y(n) = 0.6y(n-1) + x(n), x(n) = u(n) \text{ ve } y(-1) = 0 \text{ ise,}$$

$$y(0) = 0.6y(0-1) + 1 = 1$$

$$y(1) = 0.6y(1-1) + 1 = 1.6$$

$$y(2) = 0.6y(2-1) + 1 = 0.6^2 + 0.6 + 1$$

...

$$y(n) = 0.6 * y(n-1) + 1 = 0.6^n + (0.6)^{n-1} + \dots + 0.6 + 1$$

Genelleştirirsek,

$$y(n) = 0.6^n + (0.6)^{n-1} + \dots + 0.6 + 1 = \sum_{k=0}^n 0.6^k = \frac{1-0.6^{n+1}}{1-0.6} = 2.5(1-0.6^{n+1})$$

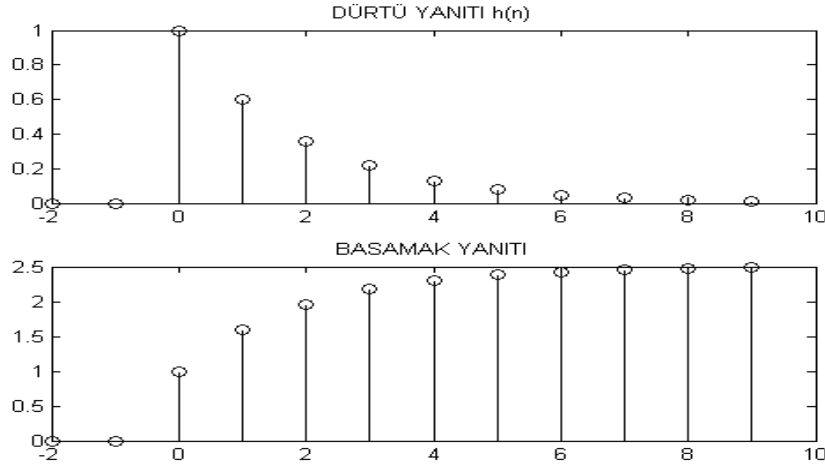
Şimdi b) şıkkını evrişim toplamını kullanarak çözelim.

Elimizde birim darbe yanıtı $h(n) = 0.6^n$, $x(n) = u(n)$ var. Öyleyse,

$$y(n) = \text{DZD}[x(n)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u(n-k)0.6^k = \sum_{k=0}^n 0.6^k = \frac{1-0.6^{n+1}}{1-0.6} = 2.5(1-0.6^{n+1})$$

İki yöntemin de aynı sonucu verdiğini görebiliriz. Birim darbe yanıtı ve basamak yanıtına ait çizimler aşağıda verilmektedir.



Şekil 3.4 Birim darbe yanıtı ve Basamak Yanıtı

c) Aynı yol kullanılarak,

$$y(n) = 0.6y(n-1) + x(n), x(n) = u(n) \text{ ve } y(-1) = 2 \text{ ise,}$$

$$y(0) = 0.6y(0-1) + 1 = 0.6 * 2 + 1$$

$$y(1) = 0.6y(1-1) + 1 = 0.6(0.6 * 2 + 1) = 0.6^2 * 2 + 0.6 + 1$$

$$y(2) = 0.6y(2-1) + 1 = 0.6^3 * 2 + 0.6^2 + 0.6 + 1$$

...

$$y(n) = 0.6 * y(n-1) + 1 = 0.6^{n+1} * 2 + (0.6)^n + 0.6^{n-1} + \dots + 0.6 + 1$$

Genelleştirirsek,

$$y(n) = 0.6^{n+1} * 2 + (0.6)^n + 0.6^{n-1} + \dots + 0.6 + 1$$

$$= 0.6^{n+1} * 2 + \sum_{k=0}^n 0.6^k = 0.6^{n+1} * 2 + \frac{1-0.6^{n+1}}{1-0.6}$$

$$= 0.6^{n+1} * 2 + 2.5(1 - 0.6^{n+1})$$

Sistem çıkışının 2 parçadan oluştuğunu gözlemliyoruz; birincisi $0.6^{n+1} * 2$,

başlangıç koşullarından gelir, ikinci terim $2.5(1 - 0.6^{n+1})$ ise girişten gelmektedir.

n sonsuza yaklaştığında $0.6^{n+1} * 2$ terimi yok olur, bu durum sistemin “geçici

yanıtı” olarak adlandırılır. $2.5(1 - 0.6^{n+1})$ terimi ise n sonsuza yaklaştığında sifıra

yaklaşmaz. Bu ise sistemin “kalıcı-durum yanıtı” olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.

Aşağıda fark denklemi verilen sistem için toplam çözümü $(y(n), n \geq 0)$ bulunuz. Giriş birim basamak dizisidir ve başlangıç koşulları $y(-1) = -2$ ve $y(-2) = 3$ olarak verilmiştir.

$$y(n) - 2y(n-1) - 3y(n-2) = x(n)$$

Çözüm

Sabit katsayılı fark denklemlerinin çözülmesinde bu sefer sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümüne benzer bir yöntem izleyeceğiz. Burada elde edeceğimiz çözüm iki bileşenden oluşur: sistemin *doğal yanıtı* ve *zorlanmış yanıtı*. Bu bileşenlerden ilki sadece ilk koşullara bağlı iken ikincisi sadece giriş işaretine bağlıdır. Öncelikle doğal yanıtı, yani $y_d(n)$ 'i bulalım.

Diferansiyel Denklemler dersinde görmüş olduğunuz gibi çözümün λ^n şeklinde olduğu varsayılır. O halde,

$$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} - 3\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = \lambda^{n-2}(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Buradan çözümün $y_d(n) = c_1(3)^n + c_2(-1)^n$ olduğu görülür. Şimdi de ilk koşulları kullanarak katsayıları bulalım.

$$y_d(0) = 2y(-1) + 3y(-2) = 2(-2) + 3(3) = 5 = c_1 + c_2$$

$$y_d(1) = 2y(0) + 3y(-1) = 2(5) + 3(-2) = 4 = 3c_1 - c_2$$

$$y_d(0) = c_1 + c_2 = 5 \quad \text{olduğu için} \quad c_1 = \frac{9}{4} \quad \text{ve} \quad c_2 = \frac{11}{4} \quad \text{bulunur. Şimdi de zorlanmış}$$

çözümü bulalım. Zorlanmış çözüm de iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım olan $y_o(n)$, giriş işaretiyle aynı biçime sahiptir.

$$y_o(n) = Ku(n) \Rightarrow Ku(n) - 2Ku(n-1) - 3Ku(n-2) = u(n)$$

Buradan $K = -1/4$ olarak bulunur ve nihayetinde $y_o(n) = -1/4 u(n)$ olur. Zorlanmış çözümün ikinci kısmı ise doğal yanıtla aynı biçimdedir. Dolayısıyla zorlanmış yanıt $y_z(n)$ şöyle yazılabilir:

$$y_z(n) = c_3(3)^n + c_4(-1)^n - \frac{1}{4}, \quad n \geq 0$$

Hatırlayacağınız gibi zorlanmış yanıt sadece giriş işaretine bağlı olan çözümdü. Bu nedenden ötürüdür ki yukarıdaki denklemi sıfır ilk koşulu ile çözerek c_3 ve c_4 değerlerini bulabiliriz.

$$y_z(0) - 2y(-1) - 3y(-2) = x(0) \Rightarrow y_z(0) - 2(0) - 3(0) = 1$$

$$y_z(1) - 2y(0) - 3y(-1) = x(1) \Rightarrow y_z(1) - 2(1) - 3(0) = 1$$

$$\begin{aligned} y_z(0) &= c_3 + c_4 - \frac{1}{4} = 1 \\ y_z(1) &= 3c_3 - c_4 - \frac{1}{4} = 3 \end{aligned} \quad \text{olduğu için } c_3 = \frac{9}{8}, c_4 = \frac{1}{8} \text{ değerleri bulunur. Zorlanmış}$$

yanıt ise şöyle olur:

$$y_z(n) = \frac{9}{8}(3)^n + \frac{1}{8}(-1)^n - \frac{1}{4}, \quad n \geq 0$$

Toplam çözüm ise doğal yanıtın ve zorlanmış yanıtın toplamından oluştuğu için aşağıdaki denklemdeki sonuç elde edilir.

$$y(n) = \frac{27}{8}(3)^n + \frac{23}{8}(-1)^n - \frac{1}{4}, \quad n \geq 0$$

MATLAB Uygulaması

Fark denklemleri, giriş ve fark denklemi katsayıları verildiğinde, “filter” komutu kullanılarak sayısal olarak çözülebilir.

Çalışma-1: Örnek 2.2 için çıkış dizisini MATLAB yardımıyla bulunuz.:

Dikkat:

- Burada, a_0 katsayısının sıfırdan farklı olduğuna emin olunmalıdır.
- Çıkış dizisinin içeriği dikkatle incelenmelidir, çünkü MATLAB uygulaması sistemin nedensel olduğunu kabul eder.

Çalışma-2: Örnek 2.3 ‘de verilen sistem için birim darbe yanıtını ve basamak yanıtını filter() fonksiyonu yardımıyla bulunuz.

Çalışma-3: Örnek 2.4. ise içeriğinde ilk koşul barındırması nedeniyle diğer örneklerden ayrılmaktadır. İlk koşulların “filter” komutuna nasıl yerleştirildiğini

inceleyiniz. Örnek 2.4’de verilen ilk koşulları “filter” komutuna uygun hale getiriniz. Bu durumda filter komutu içine Örnek 2.4’de verilen ilk koşulları da uygun şekilde yerleştirerek birim basamak yanıtını bulunuz.

BÖLÜM-2

Giriş

Önceki bölümde DZD sistemleri ve girişe verilen sistem yanıtlarını zaman bölgesinde inceledik. Şimdi bir DZD sistemin frekans bölgesinde gösterilimini inceleyelim.

Önce, tanımları gözden geçirelim:

Tanım 1: Ayırık-Zamanlı Fourier Dönüşümü (DTFT)

Eğer $x(n)$ mutlak olarak toplanabilir ise, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, Ayırık-Zamanlı Fourier Dönüşümü (DTFT) şöyle ifade edilir:

$$X(e^{j\omega}) = F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2.6a)$$

burada ω radyan cinsinden açısal frekansı, $F\{\}$ Fourier dönüşüm işlemini gösterir. $F\{\}$ operatörü bir ayırık $x(n)$ işaretini, karmaşık değerli sürekli $X(e^{j\omega})$ fonksiyonuna dönüştürür.

$X(e^{j\omega})$ ’in ters ayırık-zamanlı Fourier dönüşümü (IDTFT) aşağıda görülmektedir.

$$x(n) = F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.6b)$$

$x(n) = e^{j\omega_0 n}$ değeri ile, $h(n)$ darbe yanıtı bir DZD sisteme giriş olsun.

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega_0 (n-k)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega_0 k} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$= \left[F \{h(n)\} \Big|_{\omega=\omega_0} \right] e^{j\omega_0 n}$$

Yukarıdaki sonuç (4.2) sayesinde, Fourier dönüşümü ifadesi DZD sistemlerin en kullanışlı işaret gösterilimidir.

Tanım 2: Frekans Yanıtı

Bir birim darbe yanıtının ayırık-zamanlı Fourier dönüşümüne DZD sistemin frekans yanıtı denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (2.8)$$

Genellikle, frekans yanıtı karmaşık bir fonksiyondur. $|H(e^{j\omega})|$ 'e genlik yanıtı ve $\angle H(e^{j\omega})$ açısına faz yanıtı denir. Frekans yanıtı (4.4) ifadesinde görülen sabit katsayılı bir fark denkleminde kolaylıkla elde edilebilir.

Fark Denkleminde Frekans Yanıtının Elde Edilmesi

Bir DZD sistem fark denklemi ile gösterildiği zaman,

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \quad (2.9)$$

basitçe $x(n) = \delta(n)$ yaparak, veya (4.2) ifadesini kullanarak $h(n)$ birim darbe yanıtını elde edebiliriz. Örneğin, $x(n) = e^{j\omega n}$ için, $y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ (4.4) de yerine konularak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n} + \sum_{k=1}^N a_k H(e^{j\omega})e^{j\omega(n-k)} = \sum_{m=0}^M b_m e^{j\omega(n-m)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m e^{-j\omega m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (2.10)$$

DTFT nin Özellikleri

Özellikler burada tanıt yapılmadan verilmiştir. $X(e^{j\omega})$, $x(n)$ 'in ayrık-zamanlı Fourier dönüşümü olsun.

1. Doğrusallık:

$$F\{a.x(n) + b.y(n)\} = a.F\{x(n)\} + b.F\{y(n)\} \quad \text{tüm } a, b, x(n), y(n) \text{ için} \quad (2.11)$$

2. Zamanda Öteleme: Zaman bölgesinde öteleme frekans bölgesinde faz ötelemesine yol açar.

$$F\{x(n-k)\} = X(e^{j\omega})e^{-j\omega k} \quad (2.12)$$

3. Frekansta Öteleme: Karmaşık bir üstel ifade ile çarpma frekans bölgesinde öteleme sağlar.

$$F\{x(n)e^{j\omega_0 n}\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \quad (2.13)$$

4. Eşleniklik: Zaman bölgesinde eşleniklik frekans bölgeinde katlama ve eşlenikliğe yol açar.

$$F\{x^*(n)\} = X^*(e^{-j\omega}) \quad (2.14)$$

5. Katlama: Zaman bölgesinde katlama frekans bölgeinde katlamaya yol açar.

$$F\{x(-n)\} = X(e^{-j\omega}) \quad (2.15)$$

6. Gerçel dizilerde simetri:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \quad x_o[n] = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

ardından

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (2.16)$$

ve

$$F\{x_e(n)\} = \text{Re}[X(e^{j\omega})], F\{x_o(n)\} = j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$$

7. Evrişim: Frekans bölgesinde sistem analizini uygun hale getiren en kullanışlı özelliklerden biridir.

$$F\{x_1(n) * x_2(n)\} = F\{x_1(n)\}F\{x_2(n)\} = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \quad (2.17)$$

8. Çarpma: Evrişim özelliğinin dualidir.

$$F\{x_1(n)x_2(n)\} = F\{x_1(n)\} * F\{x_2(n)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (2.18)$$

Burada * periyodik evrişim işlemini gösterir.

9. Enerji: $x[n]$ dizisinin enerjisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.19)$$

Bu ifadeye Parseval teoremi de denir.

Örnek 2.5

$y(n) - 0.6y(n-1) = x(n)$ ile karakterize edilen sistemin $H(e^{j\omega})$ frekans yanıtını belirleyin. Genlik ve faz yanıtlarını MATLAB yardımı ile çizdirin. (İpucu: Bu yanıtları çizdirmek için $|H(e^{j\omega})|$ ve $\angle H(e^{j\omega})$ ifadelerini kullanabilir veya $H(e^{j\omega})$ frekans yanıtı ifadesini ve ardından genlik ve fazı hesaplanabilir.)

Çözüm:

Sistem $h(n) = 0.6^n u(n)$ birim darbe yanıtına sahiptir. (2.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.6^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (0.6e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - 0.6e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Böylece,

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{1}{(1 - 0.6 \cos \omega)^2 + (0.6 \sin \omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1.36 - 1.2 \cos \omega}}$$

ve

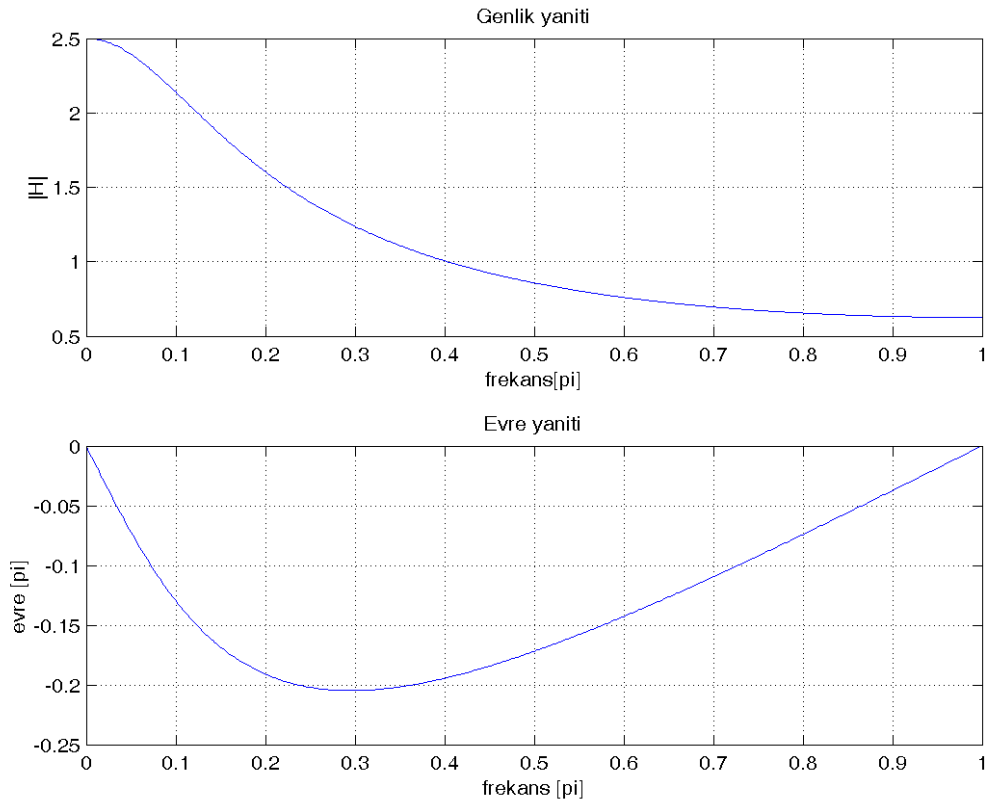
$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctan \left[\frac{0.6 \sin \omega}{1 - 0.6 \cos \omega} \right]$$

elde edilir.

```

>> w=[0:500]*pi/500; %[0,pi] eksenini 501 noktaya böldü
>> H=exp(j*w)./(exp(j*w)-0.6*ones(1,501));
>> magH=abs(H);angH=angle(H);
>> subplot(211);plot(w/pi,magH);grid;
>> xlabel('frekans[pi]');ylabel(' | H | ');
>> title('genlik yaniti');
>> subplot(212);plot(w/pi,angH/pi);grid;
>> xlabel('frekans [pi]');ylabel('faz [pi]');

```



Şekil 4.1 Frekans yanıtı

Örnek 2.6

Aşağıdaki fark denkleminin verildiğini varsayalım

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + a_3 y(n-3) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_3 x(n-3)$$

burada

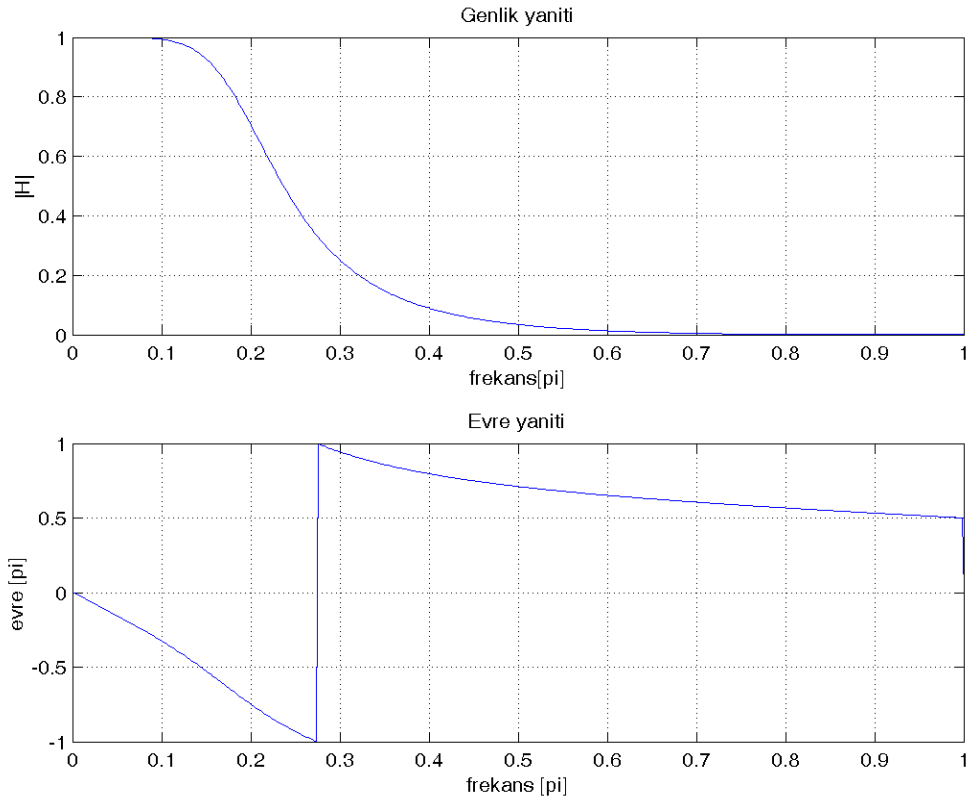
$$a_1 = -1.76, \quad a_2 = 1.1829, \quad a_3 = -0.2781$$

$$b_0 = b_3 = 0.0181, \quad b_1 = b_2 = 0.0543$$

değerleri veriliyor.

Genlik ve faz yanıtlarını çizdirin.(Not: (2.10)'u kullanarak genlik ve faz yanıtını çizdiriniz.)

Çözüm:



Şekil 4.2 Frekans yanıtı

MATLAB Uygulaması

MATLAB' de, 'freqz' komutu, fark denklemleri katsayıları verildiğinde frekans yanıtını bulmak için kullanılabilir. Örnek 2.5 ve örnek 2.6'yı 'freqz' komutunu kullanarak genlik ve faz yanıtlarını çizdiriniz.

Dikkat:

- Fonksiyon genlik ve faz yanıtlarını çizdirecektir.
- a_0 değerinin sıfır olmadığından emin olunmalıdır.
- Genlik yanıtı desibel biriminde olup ve frekans eksenini de normalizedir.

Ödev-Bölüm-1:

1. Sistem fonksiyonu $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ ve giriş $x(n)$,

- Birim darbe dizisi $\delta(n)$,
 - Birim basamak dizisi $u(n)$,
 - Sinüzoidal dizi $\cos(2\pi fn)$,
- olarak verilmektedir.

Başlangıç koşullarını sıfır ve $y(-1) = 2$ olarak, fark denklemleri yardımıyla çıkışı hesaplayın. Hesaplamaları, $a = \pm 0.1, \pm 0.5$, veya ± 0.9 ve $f = 0.1, 0.3$, veya 0.5 için yapın.

2. Problem 1'i, 'filter' fonksiyonunu kullanarak tekrarlayın.

Ek Puan

1. Üstteki problem için, hangi a değerlerinde sistem alçak frekans alçak-geçiren süzgeç (AGS), hangi a değerlerinde yüksek geçiren süzgeç (YGS) davranışı gösterir? Farklı a 'lar ve farklı başlangıç değerleri için süzgecin geçici davranışlarını gözlemleyin.

2. Fark denklemleri aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$y(n) = y(n-1) + 0.9y(n-2) = x(n)$$

Başlangıç koşulları,

$$y(-1) = y(-2) = 0$$

Giriş $x(n)$ aşağıdaki gibi verildiğinde çıkışı elde edecek bir MATLAB fonksiyonu yazın.

- a) Birim darbe dizisi $\delta(n)$,
- b) Birim basamak dizisi $u(n)$,
- c) Sinüzoidal dizi $\cos(2\pi fn)$. Frekans değerleri olarak yine $f = 0.1, 0.3$ veya 0.5 i kullanın.

3. Fibonacci dizisini verecek fark denklemini ilk koşulları ve giriş dizisini belirterek oluşturunuz ve bu sistemi “filter” komutu ile gerçekleyiniz.

Ödev-Bölüm-2:

1. Aşağıdaki sistem fonksiyonu verilmiştir,

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

frekans yanıtını hesaplayın. $a = 0.05, 0.45, 0.95$ $a = -0.05, 0.45, -0.95$ değerlerini kullanarak genlik ve faz yanıtlarını çizdirin.

2. Problem 1’i ‘freqz’ fonksiyonunu kullanarak çözün ve sonuçlarınızı karşılaştırın.

3. Aşağıdaki fark denkleminin frekans (genlik ve faz) yanıtlarını çizdirin.

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.8y(n-2) = x(n)$$