

Deney 1:

Ayrık Zamanlı İşaretler, Ayrık Zamanlı Sistemler, Örnekleme Kuramı ve Evrişim

Amaç

Bu deneyin amacı ayrık zamanlı işaret ve sistemlerin tanıtılması ve örnekleme işleminin iki temel özelliği olan *örtüşme* ve *geri-çatma* problemlerinin incelenmesi ve ayrıca evrişim toplamı hesabı ile ayrık zamanda sistem yanıtı konusuna bir giriş yapmaktır.

Giriş

Ayrık zamanlı işaretler

Bir ya da birden fazla değişkene bağlı olarak değişen ve bilgi taşıyan işlevlere (fonksiyonlara) işaret denir. İşaretler analog ve sayısal olmak üzere iki sınıfa ayrılırlar. Sürekli zamanlı ve sürekli genlikli işaretlere (hız, ivme, basınç, elektriksel alan vs..) *analog işaretler* adı verilir. Bir analog işaret, t fiziksel bir büyüklüğü göstermek üzere $x(t)$ ile gösterilebilir. Ayrık zamanlı ve ayrık genlikli işaretlere ise *sayısal işaretler* adı verilir. Bir ayrık işaret, n tamsayısı ayrık zaman örneklerini göstermek üzere, $x(n)$ ile gösterilir. Ayrık zamanlı bir işaret şöyle ifade edilir:

$$x(n) = \{ \dots, x(-1), x(0), x(1), \dots \} \quad (1.1)$$

$\uparrow$

Burada ($\uparrow$) simgesi dizinin $n = 0$ 'daki örneğini belirtmektedir.

MATLAB ortamında sonlu-süreli bir dizi, uygun değerli bir vektörle gösterilebilir. Ancak, böyle bir vektör örnek n pozisyonu hakkında herhangi bir bilgi içermemektedir. Bundan dolayı, $x(n)$ 'i iki gerçek vektörle ifade etmek gerekir. Bunlar $x(n)$ ayrık değerlerini ve n değerlerini içeren vektörlerdir. Örneğin aşağıdaki gibi bir dizi olsun,

$$x(n) = \{ x(n) \} = \{ 3, 2, -1, 2, 0, 1 \} \quad (1.2)$$

$\uparrow$

Bu dizi, $\mathbf{n} = [-2, -1, 0, 1, 2, 3]$ vektörü ve $\mathbf{x} = [3, 2, -1, 2, 0, 1]$ vektörü ile ifade edilebilir. Vektörler hem $x(n)$ in gerçek değeri, hem de o değerin pozisyonu hakkında bilgi vermektedirler. Gelişigüzel sonsuz süreli bir diziyi, bellek yetersizliğinden dolayı bilgisayarda göstermek mümkün değildir.

Bazı Dizi Örnekleri:

1. Birim darbe dizisi (Birim örnekli dizi)

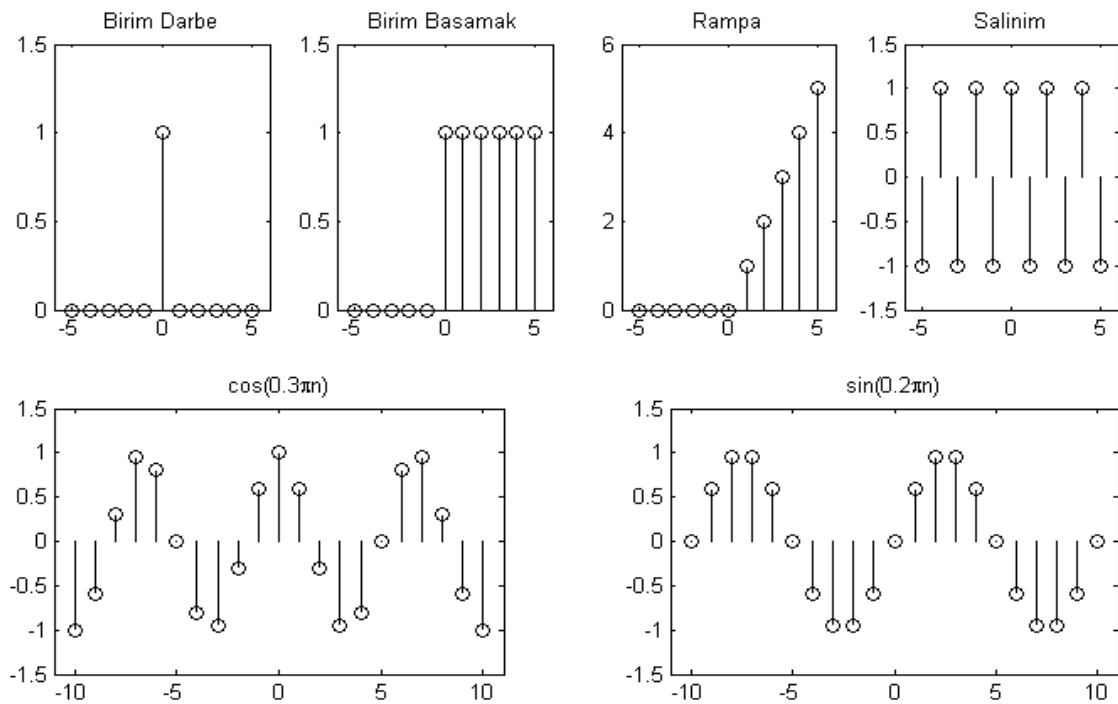
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

2. Birim basamak dizisi

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

3. Birim rampa dizisi

$$r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$



Şekil 1.1 Dizi Türleri

4. Alterne dizi

$$a(n) = \begin{cases} +1 & n \text{ çift} \\ -1 & n \text{ tek} \end{cases} \quad (1.6)$$

5. Sinüsoidal dizi

$$x(n) = \cos(\omega n + \theta) \quad (1.7)$$

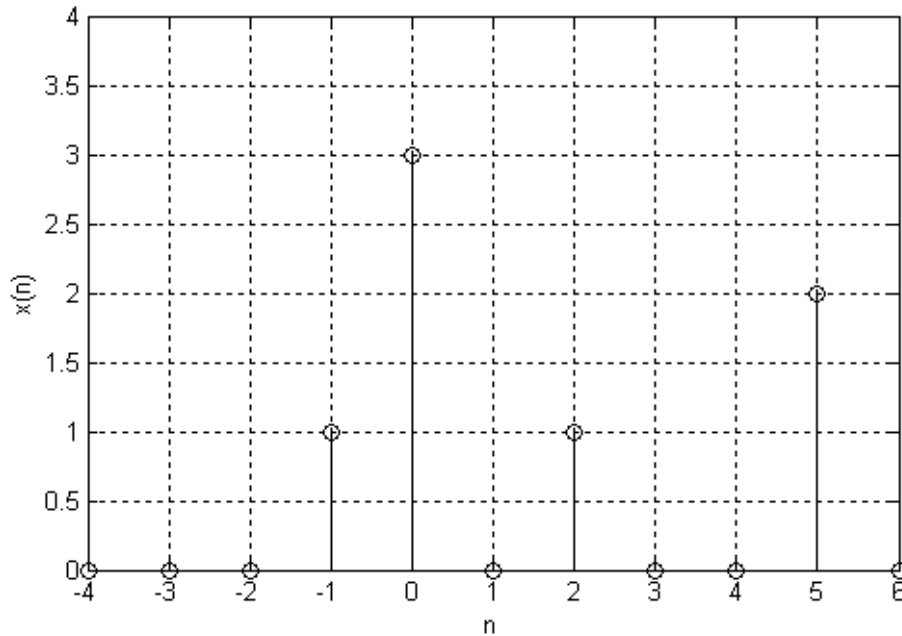
Burada ω radyan cinsinden açısal frekansı ve θ ise radyan cinsinden faz bilgisini belirtmektedir.

Herhangi bir dizi, ayrık zamanda geciktirilmiş ve ağırlıklandırılmış birim darbe dizilerinin toplamı şeklinde düşünülebilir. Bu şöyle ifade edilebilir:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.8)$$

Örneğin aşağıda verilmiş olan işaret şekildeki gibi ifade edilebilir.

$$x(n) = \delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-2) + 2\delta(n-5) \quad (1.9)$$



Şekil 1.2 $x(n)$ işareti

Diziler üzerinde yapılan işlemler

1. Toplama: Aynı pozisyonundaki örneklerin toplamı ile yapılır.

$$\{x_1(n)\} + \{x_2(n)\} = \{x_1(n) + x_2(n)\} \quad (1.10)$$

MATLAB’de iki dizinin $(x_1(n))$ ve $x_2(n))$ toplamı ‘+’ aritmetik operatörü ile gerçekleştirilir. Burada $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ ’in uzunluklarının eşit olması gerekmektedir. Eğer diziler eşit uzunlukta değilse dizilere sıfır eklemek yoluyla uzunluklar eşit hale getirilir.

2. Çarpma: Dizi elemanlarının birebir çarpımıyla gerçekleştirilmektedir.

$$\{x_1(n)\}.\{x_2(n)\} = \{x_1(n)x_2(n)\} \quad (1.11)$$

MATLAB’de bu çarpma işlevi ‘.*’ operatörü ile gerçekleştirilir. $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ uzunluklarının eşit olması gerekmektedir.

3. Ölçekleme: Bu işlevde her bir örnek değeri bir ‘ α ’ skaler değeri ile ölçeklenir.

$$a\{x(n)\} = \{ax(n)\} \quad (1.12)$$

Bu işlev MATLAB’de ‘*’ operatörü ile gerçekleştirilir. ($a * \{x(n)\}$)

4. Kaydırma: Bu işlevde her bir örnek ‘ k ’ kadar kaydırılarak, kaydırılmış $y(n)$ dizisi elde edilir.

$$y(n) = \{x(n - k)\} \quad (1.13)$$

Bu işlevin x vektörü üzerinde herhangi bir etkisi bulunmamaktadır. Fakat her elemana ‘ k ’ eklenerek n vektörü değiştirilmiştir.

5. Katlama: Bu işlevle her örnek $n = 0$ etrafında döndürülerek $y(n)$ dizisi elde edilmektedir.

$$y(n) = \{x(-n)\} \quad (1.14)$$

MATLAB’de bu işlev örnek değerler için ‘fliplr(x)’ fonksiyonu ile gerçekleştirir. Örnek pozisyonları için ise ‘-fliplr(n)’ kullanılmaktadır.

Verilen bir örnek üzerinde bu işlevlerin etkilerini inceleyelim.

Örnek 1.1

$$\begin{aligned}x_1(n) &= \delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-2) + 2\delta(n-5) \\x_2(n) &= -\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-5)\end{aligned}\tag{1.15}$$

Verilen $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ dizilerinin toplamı ve çarpımı bulunuz. Ayrıca $x_1(n)$ üzerinde ölçekleme, kaydırma ve döndürme özelliklerini gösteriniz.

Çözüm:

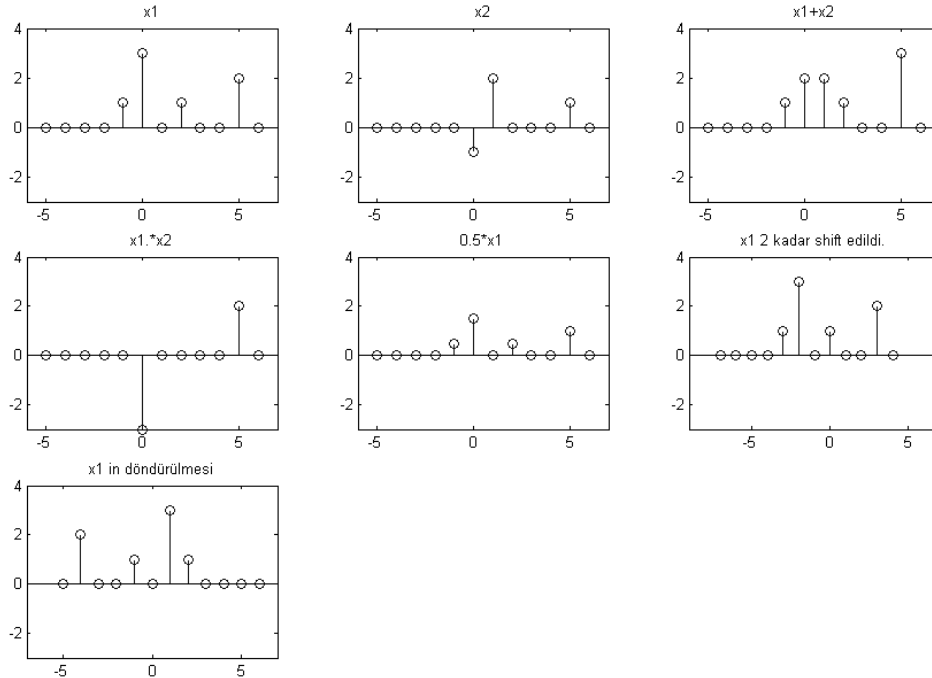
$$x_1(n) + x_2(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + 3\delta(n-5)$$

$$x_1(n)x_2(n) = -3\delta(n) + 2\delta(n-5)$$

$$0.5x_1(n) = 0.5\delta(n+1) + 1.5\delta(n) + 0.5\delta(n-2) + \delta(n-5)$$

$$x_1(n+2) = \delta(n+3) + 3\delta(n+2) + \delta(n) + 2\delta(n-3)$$

$$\begin{aligned}x_1(-n) &= \delta(-n+1) + 3\delta(-n) + \delta(-n-2) + 2\delta(-n-5) \\&= \delta(n-1) + 3\delta(n) + \delta(n+2) + 2\delta(n+5)\end{aligned}$$



Şekil 1.3 Diziler ve operatörler

Ayrık Sistemler

İşaretleri, üzerlerinde değişiklikler yaparak yeni işaretlere dönüştüren her türlü yapıya “*sistem*” adı verilir. Matematiksel olarak ayrık bir sistem $T[\cdot]$ işlevi ile ifade edilebilir. Bu işlev, girişteki $x(n)$ dizisini başka bir dizi olan $y(n)$ ’e dönüştürür. Burada $y(n)$ sistem cevabı olarak adlandırılır.

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1.16)$$

Ayrık sistemler doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler olarak sınıflandırılabilir. Ancak, burada daha çok doğrusal sistemlerle ilgilenilecektir.

Doğrusal Sistemler

Bir ayrık $T[\cdot]$ sistemi, ancak ve ancak aşağıdaki süperpozisyon ilkesini sağlıyorsa doğrusal bir operatördür:

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] \quad (1.17)$$

Burada a_1 ve a_2 sabit ölçekleme katsayılarıdır.

Doğrusal, Zamanla Değişmeyen (DZD) Sistemler

Giriş-çıkış çifti sırasıyla $x(n)$ ve $y(n)$ olan bir sistemde, giriş işareti belli bir miktar ötelendiğinde çıkış işareti de aynı miktarda ötelenirse böyle bir sistem doğrusal, zamanla değişmeyen (DZD) sistem olarak adlandırılır. Böyle bir sistemde doğrusal dönüşüm veya öteleme sırasının önemi yoktur.

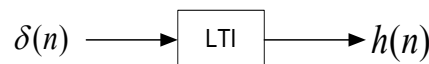
$$x(n) \rightarrow T[\cdot] \rightarrow y(n) \rightarrow “k” \text{ ile öteleme } \rightarrow y(n-k)$$

$$x(n) \rightarrow “k” \text{ ile öteleme } \rightarrow x(n-k) \rightarrow T[\cdot] \rightarrow y(n-k)$$

Doğrusal zamanla-değişmeyen bir sistem LTI $[\cdot]$ operatörü ile gösterilir.

Birim Darbe (Dürtü) Yanıtı

Bir DZD sistemin girişine birim darbe işlevi uygulandığında elde edilen çıkış DZD sistemin “Birim Darbe Yanıtı” adını alır. Bu şu şekilde ifade edilebilir:



Burada $h(n)$ sistemin birim darbe yanıtıdır. Sistemin doğrusal olduğu kabul edilerek giriş bir sabit a sayısı ile ölçeklendiğinde çıkışın da aynı oranda ölçeklendiği görülmektedir:



Aynı şekilde süperpozisyon ilkesi de geçerlidir:



Eğer sistem zamanla-değişmeyen sistem ise giriş darbe işareti k kadar ötelendiğinde çıkış işareti de k kadar ötelenecektir:



Doğrusallık ve zamanla-değişmezlik ilkeleri birleştirilirse aşağıdaki blok diyagramı elde edilir.



Örnekleme Kuramı

Sürekli zamanlı işaretlerden ayrık zamanlı işaretleri elde etmek için örnekleme yaparız. Deneyin bu kısmında örnekleme işleminin iki temel özelliği olan *örtüşme* ve *orijinal işaretin tekrar elde edilmesi* işlemleri incelenecektir.

1. Örtüşmenin incelenmesi

Sürekli-zamanlı işaretten ayrık-zamanlı işaret elde etmek için sürekli-zamanlı bir işaretin örneklenmesi gerekmektedir. Eğer örnekleme frekansı ile işaretin maksimum frekansı arasında Nyquist oranı sağlanmazsa örneklenen işarete örtüşme meydana gelir ve örneklenmiş işareten orijinal işaret tekrar geri elde edilemez. f_0 işaretin en yüksek frekansı olmak üzere Nyquist oranı $f_N = 2f_0$ olmalıdır. Bu durumda örnekleme frekansı $f_s \geq f_N$ olmalıdır. Sürekli-zamanlı bir sinüs işareti,

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi) \quad (1.18)$$

ile verilir. $x(t)$ işareti $f_s = 1/T_s$ örnekleme frekansı ile örneklenirse

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = x(t)|_{t=n/f_s} = \sin(2\pi(f_0 / f_s)n + \phi) \quad (1.19)$$

ayrık-zamanlı işareti elde edilir. $x[n]$ 'deki n değeri tamsayı değerlerini göstermektedir. Eğer f_0 ve f_s 'nin farklı değerleri için $x[n]$ işareti çizdirilecek olursa örtüşme problemi kolaylıkla görülebilir.

$f_s = 8kHz$ ve $\phi = 0$ için ayrık-zamanlı işaretin 10ms zaman aralığında çizdirilmesi istendiğine göre,

$$t = \frac{n}{f_s} \Rightarrow 10 \times 10^{-3} = \frac{n}{8 \times 10^3} \Rightarrow n = 80 \quad (1.20)$$

olarak elde edilir. Yani (1.19) ile verilen işaret $n = 0, 1, \dots, 80$ değerleri için çizdirilecektir.

Örtüşmeyi hem zaman hem frekans bölgelerinde gözlemleyebiliriz. Zaman bölgesinde örtüşmeyi incelemek frekans bölgesine göre daha zordur. Örtüşmeyi incelemek için daha çok frekans bölgesine bakılır. Örneklerle örtüşme açıklanmaya çalışılmıştır:

Örnek 1.2

$$x(t) = 3 + 4\cos(2\pi \cdot 10 \cdot t) + 2\cos(2\pi \cdot 20 \cdot t) \quad (1.21)$$

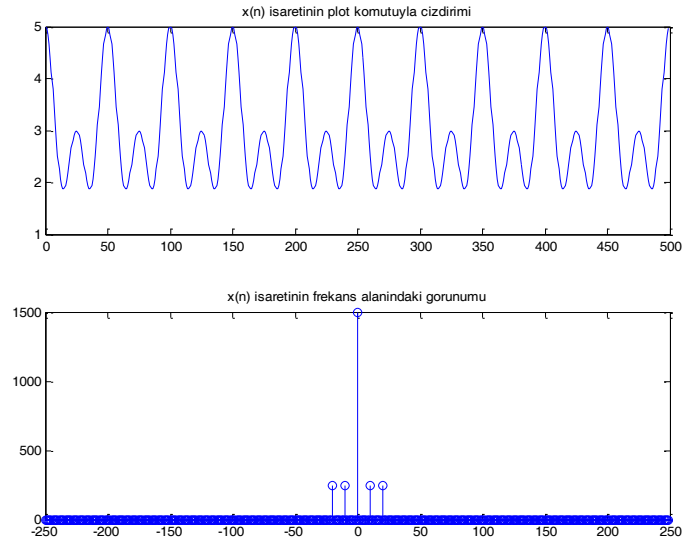
- Verilen $x(t)$ işareti için Nyquist örnekleme hızı nedir?
- $x(t)$ işaretini $t=1sn$ ve örnekleme frekansı $f_s=500Hz$ için zaman domeni ifadesini ayrık olarak çizerek, ayrık işareten yararlanıp frekans spektrumunu çiziniz.
- $x(t)$ işaretinin 20Hz olan frekans bileşenini 400Hz alarak $f_s = 500Hz$ için $x(t)$ 'yi örnekleyiniz ve çiziniz, çizdirdiğiniz örneklenmiş işaretin temel banttaki en yüksek frekans bileşeni nedir?

Çözüm:

a. Nyquist örnekleme frekansı işaretin maksimum frekans bileşeninin 2 katıdır, bu işaretle maksimum frekans bileşeni 20 Hz olduğundan Nyquist örnekleme frekansı 40 Hz'dır.

b. MATLAB Kodu:

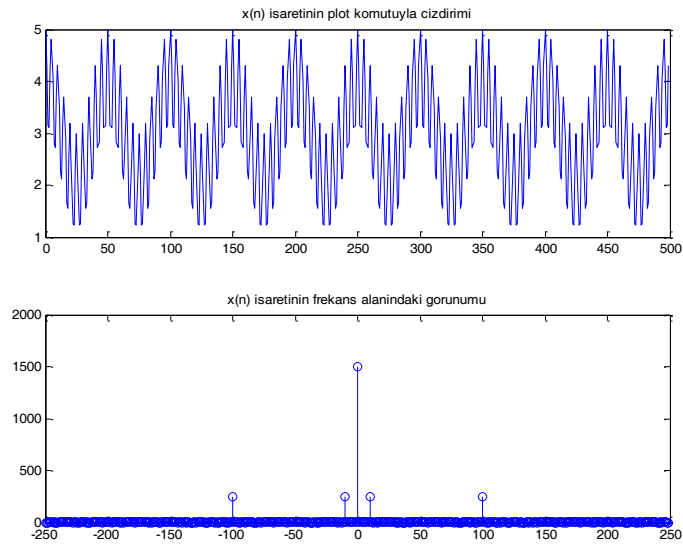
```
N = 500;  
n = 0 : N - 1;  
f1 = 10;  
f2 = 20;  
fs = N;  
%n=0,1,2,...,N-1 için x(n) dizisinin değerlerinin hesaplanması  
x = 3 + cos(2 * pi * n * (f1 / fs)) + cos(2 * pi * n * (f2 / fs));  
subplot(211),plot(n,x),title('x(n) işaretinin plot komutuyla çizdirimi')  
%x(n) Frekans Bölgesi Gösterimi  
fx = fft(x);  
y = abs(fftshift(fx));  
f = -N / 2 : N / 2 - 1;  
subplot(212),stem(f, y), title('x(n) işaretinin frekans alanındaki görünümü')
```



Şekil 1.4 $x(n)$ işaretinin frekans bölgesindeki görünümü

c. MATLAB Kodu

```
N = 500;  
n = 0 : N - 1;  
f1 = 10;  
f2 = 400;  
fs = N;  
x = 3 + cos(2 * pi * n * (f1 / fs)) + cos(2 * pi * n * (f2 / fs));  
subplot(211),plot(n,x),title('x(n) isaretinin plot komutuyla cizdirimi')  
fx = fft(x);  
y = abs(fftshift(fx));  
f = -N / 2 : N / 2 - 1;  
subplot(212),stem(f,y),title('x(n) işaretinin frekans alanındaki  
görünümü')
```



Şekil 1.5 $x(n)$ işaretinin zaman ve frekans bölgesindeki görünümü

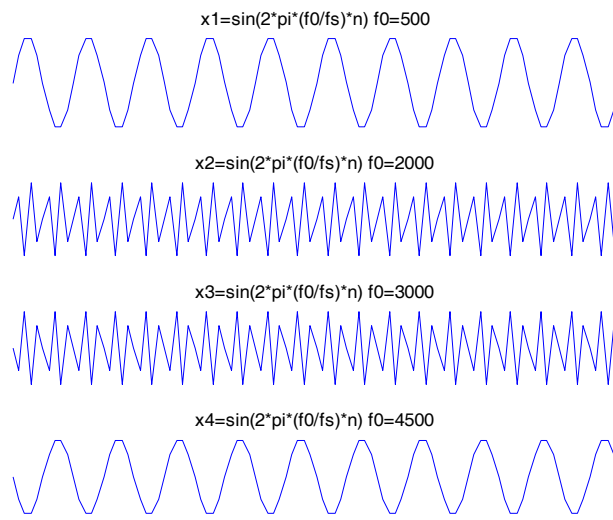
Örnek 1.3

$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ sürekli bir sinüs işareti için örnekleme frekansı $f_s = 5kHz$ olsun,

(a) $f_0 = 0.5kHz, 2kHz, 3kHz, 4.5kHz$ değerlerini sırasıyla alırken bu değerlere uygun düşen işaretlerin zaman bölgesi ifadeleri şöyledir.

Matlab Kodu

<pre>n=0:100; fs=5000; x1=sin(2*pi*(500/fs)*n); x2=sin(2*pi*(2000/fs)*n); x3=sin(2*pi*(3000/fs)*n); x4=sin(2*pi*(4500/fs)*n); figure; subplot(4,1,1); plot(n,x1); title('x1=sin(2*pi*(f0/fs)*n) f0=500');axis off;</pre>	<pre>subplot(4,1,2); plot(n,x2); title('x2=sin(2*pi*(f0/fs)*n) f0=2000');axis off; subplot(4,1,3); plot(n,x3); title('x3=sin(2*pi*(f0/fs)*n) f0=3000'); axis off; subplot(4,1,4); plot(n,x4); title('x4=sin(2*pi*(f0/fs)*n) f0=4500'); axis off;</pre>
--	--



Şekil 1.6 x_1 , x_2 , x_3 ve x_4 işaretlerinin zaman bölgesindeki görünümü

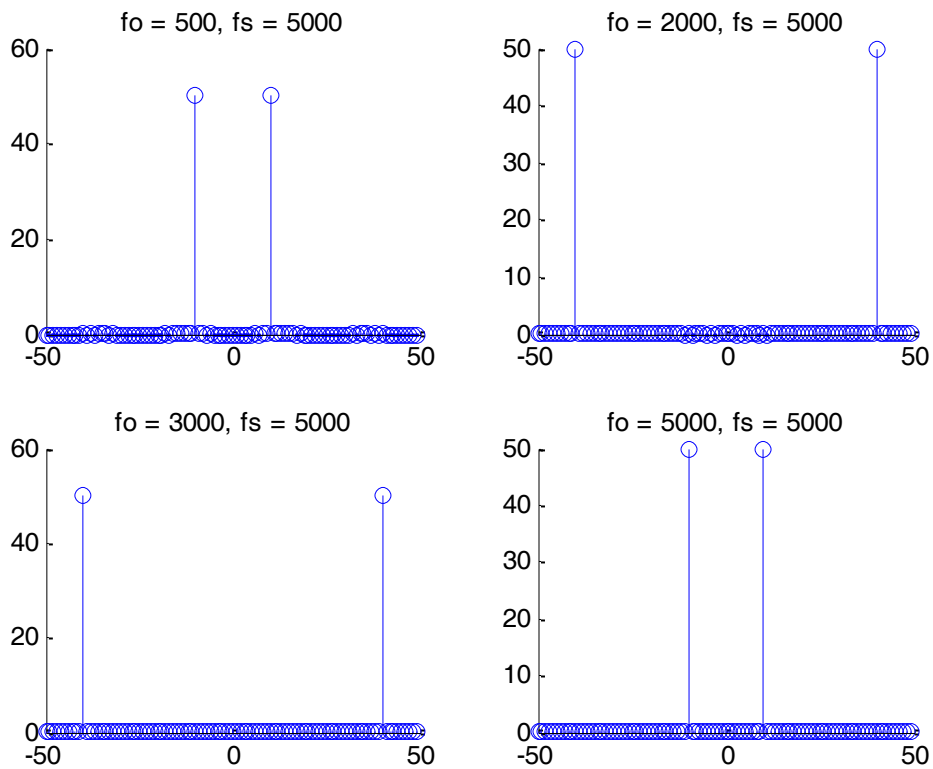
(b) Yukarıdaki şekilde ilk işaret ile son işaret neden aynı frekansa sahip gibi görünmektedir?

Not: Örnekleme teoreminden, 5kHz'lik örnekleme frekansı için gösterilebilecek maksimum frekans bileşeni 2.5 kHz'dir. Bundan dolayı, 4.5 kHz'lik işaret ile 3 kHz'lik işaretler de örneklendikten sonra örtüşme meydana gelir.

(c) Aynı frekans değerleri için işaretlerde örtüşme olup olmadığını şekil üzerinde gösteriniz.

Matlab Kodu

<pre>n=1:100; N=100; Fs=5000; f = -N / 2 : N / 2 - 1; x1=sin(2*pi*(500/Fs)*n); y1 = abs(fftshift(fft(x1))); subplot(221),stem(f,y1),title('fo = 500, fs = 5000') x2=sin(2*pi*(2000/Fs)*n); y2 = abs(fftshift(fft(x2))); subplot(222),stem(f,y2),title('fo = 2000, fs = 5000')</pre>	<pre>x3=sin(2*pi*(3000/Fs)*n); y3 = abs(fftshift(fft(x3))); subplot(223),stem(f,y3),title('fo = 3000, fs = 5000') x4=sin(2*pi*(4500/Fs)*n); y4 = abs(fftshift(fft(x4))); subplot(224),stem(f,y4),title('fo = 5000, fs = 5000')</pre>
---	--



Şekil 1.7 İşaretlerdeki örtüşmenin incelenmesi

İşaretin Örneklerinden Tekrar Geri Elde Edilmesi

Sayısal işaret işlemede, sayısal örneklerden analog işaretin tekrar elde edilmesi önemli bir işlemdir. Analog bir $x(t)$ işaretine ilişkin sayısal örnekler,

$x(0) = 2$, $x(1) = 1$, $x(-1) = x(t)|_{t=-1} = -1$ olarak verilmektedir. Ancak bu örnekleri

üreten analog işaretin ne olduğu hakkında bir bilgi mevcut değildir. Buna göre bu örnekleri üretebilecek birçok analog işaret mevcuttur diyebiliriz. Analog $x(t)$ işaretinin elde edilmesi, yapılan varsayımlara ve kullanılan tekrar elde edilme (geri-

çatma) yöntemlerine bağlıdır. Yukarıda verilen bu örnek değerleri, bir polinoma veya bir sinüs işareti eşlenebilir veya doğrusal interpolasyon (aradeğerleme) kullanarak bu örnek değerlerini üreten analog $x(t)$ işareti yeniden elde edilebilir.

Örnek 1.4 Sinüs İşaretine Eşleme

Varsayalım ki yukarıda verilen örnek değerleri aşağıdaki gibi sinüsoidal formda verilen bir işareten üretilmiş olsun:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.22)$$

Elimizde bilgi olarak $x(0), x(1)$, ve $x(-1)$ değerleri mevcuttur. Bu bilgiler, (1.6) ile tanımlanan analog $x(t)$ işaretindeki A, ω ve ϕ 'yi tanımlamak için yeterli midir? Bu değerlerle ilişkili denklemler oluşturulabilir mi? Eğer oluşturulabilirse bu denklemlerin daima çözümü mevcut mudur? Eğer çözüm her zaman mümkün değilse bunu sayısal örneklerle gösteriniz.

Çözüm:

Verilen bilgilere göre oluşturulabilecek denklemler;

$$\begin{aligned} 1 - & \quad x(0) = 2 = A \cos(\phi) \\ 2 - & \quad x(1) = 1 = A \cos(\omega + \phi) = A \cos(\omega) \cos(\phi) - A \sin(\omega) \sin(\phi) \\ 3 - & \quad x(-1) = -1 = A \cos(-\omega + \phi) = A \cos(\omega) \cos(\phi) + A \sin(\omega) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (1.23)$$

(1.23)'deki 2) ve 3) toplanırsa $\omega = \frac{\pi}{2}(2k-1)$, $k = 1, 2, \dots$ olarak elde edilir. Benzer

şekilde 2)'den 3) çıkartılırsa;

$$4) \quad -1 = A \sin(\omega) \sin(\phi) \quad (1.24)$$

ifadesi elde edilir. 1) ve 4)'ün ayrı ayrı karesi alınıp elde edilen sonuçlar toplanırsa;

$$5) \quad 5 = A^2 (\cos^2(\phi) + \sin^2(\omega) \sin^2(\phi)) \quad (1.25)$$

elde edilir. $\sin^2(\omega)$ her durumda 1'e eşit olacağından dolayı $A = \sqrt{5}$ olarak elde edilir.

Bu bilgi 1)'de yerine konduğunda $\phi \cong 26.568$ olarak elde edilir.

Ancak dikkat edilirse ω 'nin değeri k 'ya bağlı olarak değişmektedir. Yani k 'nın çift değerleri için $x(1)$, tek değerleri için de $x(-1)$ örnekleri sağlanmaktadır. Sonuçta k 'ya göre bir değişim mevcuttur. Ancak her zaman bu şekilde sonuca ulaşmak mümkün olmayabilir. Örneğin $x(-1)$ örneğinin yerine $x(2)$ veya daha başka örnek değerleri verilmiş olsaydı çözüme ulaşmak zorlaşırdı ve birden fazla çözüm mümkün olabilirdi.

Evrişim

Giriş

Doğrusallık koşulunu sağlayan her ayrık $L[.]$ işlemi üstdüşüm (süperpozisyon) özelliğini (toplamsallık ve çarpımsallık) sağlamaktadır.

$$L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)] \quad (1.26)$$

Herhangi bir rastgele dizi $x(n)$, ölçeklenmiş ve gecikmiş birim darbe dizilerinin ağırlıklı toplamı şeklinde oluşturulabilir;

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.27)$$

(1.26) ve (1.27) kullanılarak, bir doğrusal sistemin girişine rastgele bir $x(n)$ dizisi uygulandığında, bu sistemin çıkışı

$$y(n) = L[x(n)] = L\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L[\delta(n-k)] \quad (1.28)$$

$y(n)$ ile ifade edilebilir. Burada $L[\delta(n-k)]$ yanıtı, k zamanındaki birim örneğe bağlı olarak n zamanındaki doğrusal sistemin yanıtı olarak açıklanabilir. $L[\delta(n-k)]$ birim darbe yanıtı olarak adlandırılır ve $h(n,k)$ ile gösterilir. Böylece sistemin çıkışı

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k) \quad (1.29)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade zamanla değişen bir birim darbe yanıtı $h(n,k)$ gerektirmektedir, ancak bu pratikte kolaylıkla ulaşılabilecek bir durum değildir. Bu yüzden DSP’de zamanla değişmeyen sistemler geniş bir kullanım alanına sahiptirler.

Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) Sistemler

Giriş bölümünde açıklandığı gibi, bir doğrusal sistemin $x(n)$ ve $y(n)$ giriş-çıkış çiftinin zamandaki öteleme ile değişmemesine doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) sistem denir. Bir DZD sistem için

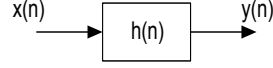
$$\begin{aligned} x(n) &\rightarrow L[.] \rightarrow y(n) \rightarrow k \text{ öteleme ile } \rightarrow y(n-k) \\ x(n) &\rightarrow k \text{ öteleme ile } \rightarrow x(n-k) \rightarrow L[.] \rightarrow y(n-k) \end{aligned}$$

matematiksel özelliklerin sağlanması gerekir. DZD sistemin işlemini LTI[.] şeklinde gösterelim. Yine $x(n)$ ve $y(n)$ DZD sistemin giriş-çıkış çifti olsun. Bu durumda zamanla değişen birim darbe yanıtı $h(n,k)$ zamanla değişmeyen birim darbe yanıtı $h(n-k)$ haline gelir. (1.29)’daki çıkış işareti

$$y(n) = LTI[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.30)$$

şeklinde olur. Bir DZD sistemin birim darbe yanıtı $h(n)$ ile verilir. (1.30)'daki matematiksel ifade doğrusal evrişim toplamı olarak adlandırılır ve

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (1.31)$$



şeklinde gösterilir. Bazı belirli zamanlarda ($n = n_0$) sistemin çıkışı (1.30)'dan yararlanılarak

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) \quad (1.32)$$

şeklinde hesaplanabilir. Döndürülmüş ve ötelenmiş birim darbe yanıtı $h(n_0 - k)$ ve giriş işareti $x(k)$, toplam işleminin değişkeni k 'nın fonksiyonlarıdır. Aynı zamanda $x(k)$ ve $h(n_0 - k)$ dizilerinin çarpımları da bir çarpım dizisi oluştururlar. $h(k)$ 'dan elde edilen $h(n_0 - k)$ dizisi, $k = 0$ zaman başlangıcına göre $h(k)$ 'yı ters çevirerek $h(-k)$ dizisinin elde edilmesi ve bu dizinin n_0 kadar ötelenmesiyle elde edilir. $y(n_0)$ çıkışı çarpım dizisinin bütün değerleri üzerinden bir toplam yardımıyla bulunabilir.

Evrişim işlemini 4 adım ile özetleyebiliriz:

1. Ters çevirme: $k = 0$ zaman başlangıcına göre $h(k)$ 'yı ters çevirerek $h(-k)$ elde edilir.
2. Öteleme: n_0 pozitif ise sağa doğru, n_0 negatif ise sola doğru $h(-k)$ ötelenerek $h(n_0 - k)$ elde edilir.
3. Çarpma: $x(k)h(n_0 - k)$ çarpım dizisini elde etmek için $x(k)$ ve $h(n_0 - k)$ dizileri çarpılır.
4. Toplama: $n = n_0$ zamanındaki çıkışı elde etmek için çarpım dizisinin bütün değerleri toplanır.

Bu adımlar sonucunda, $n = n_0$ anındaki sistem yanıtı elde edilecektir. Genelde, sistem yanıtının tüm zamanlar için ne olacağı ile ilgilenilir. Sonuç olarak tüm olası zaman ötelemeleri için 2.-4. arası adımlar tekrar edilmelidir.

Örnek 1.5

Aşağıda verilen iki dizinin evrişimini alalım $y(n) = x(n) * h(n)$.

$$x(n) = \begin{cases} 1 & -1 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} 1 & -1 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Çözüm:

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k)$$

$x(n)$ ve $h(n)$ dizileri sonlu dizilerdir (sonlu dizi: sonlu sayıda değeri sıfırdan farklı olan dizi). Bu nedenle $y(n)$ 'de sonlu bir dizi olacaktır. Kolayca görülebilir ki, $n \geq 3$ veya $n \leq -3$ için $y(n)$ sıfırdır. Sıfırdan farklı terimleri ise:

$$y(0) = \sum_k x(k)h(0-k) = x(-1)h(1) + x(0)h(0) + x(1)h(-1) = 3$$

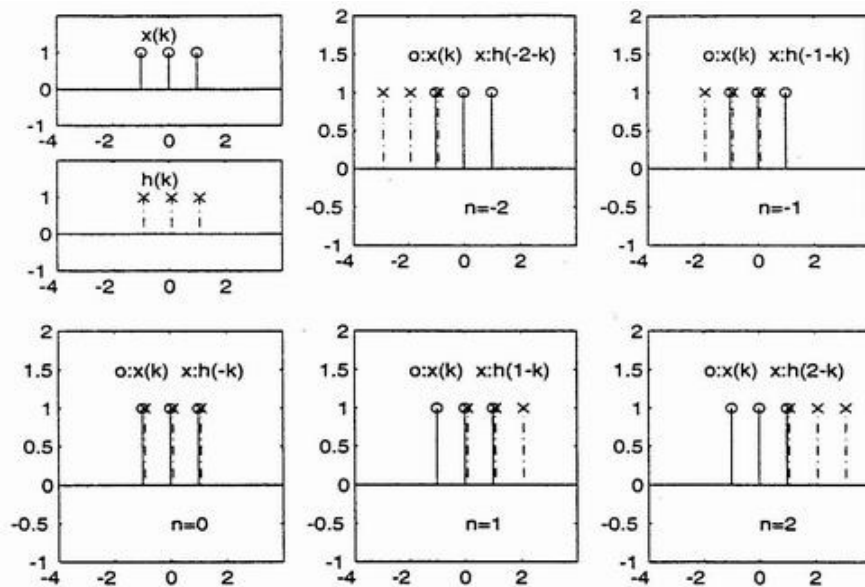
$$y(-1) = \sum_k x(k)h(-1-k) = x(-1)h(0) + x(0)h(-1) + x(1)h(-2) = 2$$

$$y(1) = \sum_k x(k)h(1-k) = x(-1)h(2) + x(0)h(1) + x(1)h(0) = 2$$

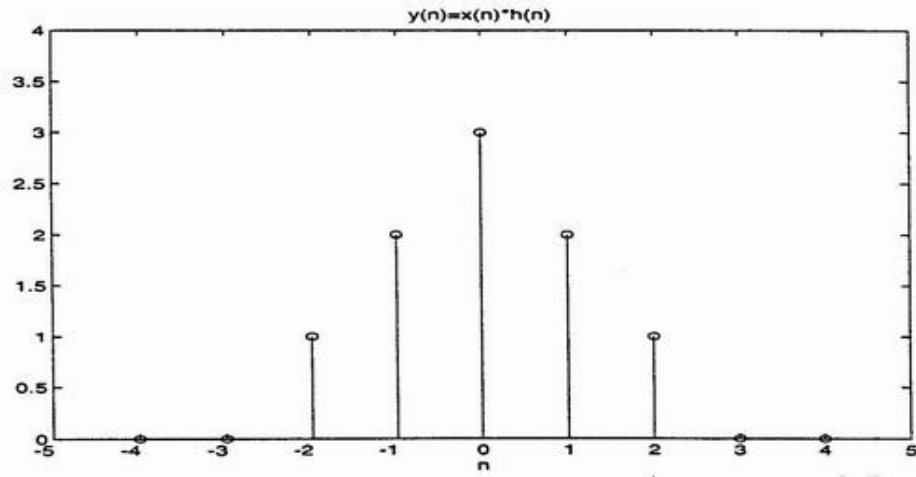
$$y(-2) = \sum_k x(k)h(-2-k) = x(-1)h(-1) + x(0)h(-2) + x(1)h(0) = 1$$

$$y(2) = \sum_k x(k)h(2-k) = x(-1)h(3) + x(0)h(2) + x(1)h(1) = 1$$

Ayrıca evrişim toplamının hesabını çizimler yardımıyla da gösterebiliriz. $x(k)$, $h(k)$ ve tüm olası n değerleri için ötelenmiş $h(n-k)$ işaretleri Şekil 1.8'de görülebilmektedir. Sonuçta elde edilen $y(n)$ dizisi ise Şekil 1.9'da görülebilir.



Şekil 1.8 Örnek 1.5 için evrişim çizimleri



Şekil 1.9 $y(n) = x(n) * h(n)$

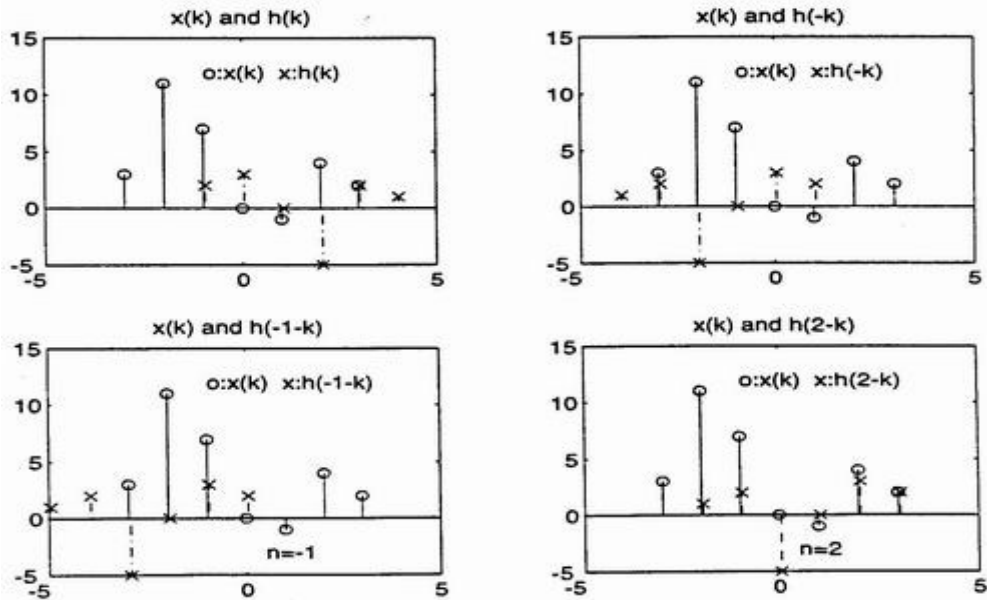
Örnek 1.6

Aşağıda verilen iki dizi için evrişim alın.

$$x(n) = \{3, 1, 7, 0, -1, 4, 2\}, \quad -3 \leq n \leq 3$$

$$h(n) = \{2, 3, 0, -5, 2, 1\}, \quad -1 \leq n \leq 4$$

Çözüm:



Şekil 1.10 Örnek 1.6 için evrişim çizimleri

Şekil 1.10'da dört çizim görmekteyiz. Bunlardan sol yukarıda orjinal dizileri, $x(k)$ ve $h(k)$, diğer çizimlerde ise sırasıyla $n_0 = \{0, -1, 2\}$ için $x(k)$ ve $h(n_0 - k)$ dizileri gösterilmektedir. Evrişim toplam hesabını bu çizimler için ayrıntılı olarak yapalım.

$$y(-1) = \sum_k x(k)h(-1-k) = 3 * (-5) + 11 * 0 + 7 * 3 + 0 * 2 = 6$$

$$y(2) = \sum_k x(k)h(2-k) = 11 * 1 + 7 * 2 + 0 * (-5) + (-1) * 0 + 4 * 3 + 2 * 2 = 41$$

$$y(0) = \sum_k x(k)h(0-k) = 3 * 2 + 11 * (-5) + 7 * 0 + 0 * 3 + (-1) * 2 = -51$$

Benzer hesaplamalar ile $y(n)$ dizisinin diğer değerleri de elde edilebilir. Burada $y(n)$ dizisinin ilk sıfırdan farklı değerinin $n = -3 + (-1) = -4$ için, son sıfırdan farklı değerinin de $n = 3 + 4 = 7$ için elde edildiğine dikkat edilmelidir. Bütün değerleriyle $y(n)$ dizisi

$$y(n) = \{6, 31, 47, 6, -51, -5, 41, 18, -22, -3, 8, 2\}$$

şeklindedir. Bu örnekten de görülebileceği gibi çıkış dizisi $y(n)$ 'nin uzunluğu (eleman sayısı), $x(n)$ ve $h(n)$ dizilerinin ikisinden de fazladır. $x(n)$ 'nin uzunluğu L_x , $h(n)$ 'in uzunluğu ise L_h olarak kabul edersek, $y(n)$ 'nin uzunluğu $L_y = L_x + L_h - 1$ olur.

MATLAB Uygulaması

1. Örnek 1.1'deki fonksiyonların MATLAB kodlarını yazarak Şekil 1.3'te verilen sonuçları doğrulayınız.
2. Örnek 1.2 ve 1.3'te verilen sonuçları doğrulayınız.
3. Eğer evrişim kısmında giriş ve darbe yanıtı dizileri sonsuz uzunluğa sahip ise MATLAB ile doğrudan evrişim toplamı hesabı yapılamaz. MATLAB, 'conv' fonksiyonu yardımıyla iki sonlu uzunluktaki dizi için evrişim toplamını hesaplayabilmektedir. Bu fonksiyon, iki dizinin ilk değerlerinin sıfır indisli terimler olduğunu kabul eder.

Evrişim MATLAB'teki gösterilimi ile

```
>>y=conv(x,h);
```

şeklindedir. Örnek 1.6'daki evrişimi MATLAB yardımıyla alalım.

```
>>x=[3,11,7,0,-1,4,2];
```

```
>>h=[2,3,0,-5,2,1];
```

```
>> y=conv(x,h);
```

y=

```
6 31 47 6 -51 -5 41 18 -22 -3 8 2
```

'conv' fonksiyonu herhangi bir zaman bilgisi sağlamamasına ya da kabul etmemesine rağmen, $y(n)$ dizisinin değerleri doğru olarak elde edilebilmiştir. $y(n)$ dizisinin başlangıç ve bitiş noktalarının zaman indislerinin belirlenmesi için

$$\{x(n); n_{xb} \leq n \leq n_{xs}\}, \quad \{h(n); n_{hb} \leq n \leq n_{hs}\} \quad \text{ve} \quad \{y(n); n_{yb} \leq n \leq n_{ys}\} \text{ ise}$$

$$n_{yb} = n_{xb} + n_{hb} \quad n_{ys} = n_{xs} + n_{hs}$$

şeklinde bir yöntem izlenebilir. Bu yöntem, Örnek 1.5 ve 1.6 ile kolayca desteklenebilir.

Ödev:

1. Aşağıdaki işaretlerin MATLAB kodlarını oluşturup verilen aralık için çizdirin.

a. $x_1(n) = 2\delta(n+2) - \delta(n-4), \quad -5 \leq n \leq 5.$

b. $x_3(n) = \cos(0.04\pi n) + 0.2\eta(n), \quad 0 \leq n \leq 50.$ Burada $\eta(n)$, sıfır ortalamalı birim varyanslı Gauss rastgele dizisini göstermektedir.

c. $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ işaretini göz önüne alarak $x_1(n) = x(n)e^{0.5n} + x(2-n)\cos(0.01\pi n)$ işaretini elde edin.

2. $x(t) = 3 + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 200 \cdot t)$

a) Bu analog işareti $t = 1sn$ aralığında çizdirin. (örnekleme frekansı, f_s , 2kHz alınacak).

b) Frekans bölgesine geçerek örtüşme olup olmadığını gözlemleyin, örtüşme varsa frekans bölgesinde hangi bileşenin örtüşmeyi gösterdiğini söyleyin.

3. Yukarıdaki soruda örnekleme frekansını $f_s = 200$ Hz olarak aynı işlemleri tekrarlayın. Bulduğunuz şekillere bakarak örtüşme olup olmadığını söyleyin. Örtüşme varsa hangi bileşenin örtüşmeyi gösterdiğini frekans bölgesi şekline bakarak söyleyin.

4. $x(t) = 10\text{sinc}(10t)$ analog işaretini,

a) $f_s = 5\text{Hz}$ kullanarak elde edilen örmeklenmiş işaretin spektrumunu çizin. Örtüşme olup olmadığını nedenleriyle belirtiniz.

b) $f_s = 20\text{Hz}$ için a) yı tekrarlayınız.

5. Örnek 1.6'da verilen $x(n)$ ve $h(n)$ dizileri için, kendi MATLAB kodunuzu yazarak, (1.30) uyarınca evrişim toplamını hesaplayın. MATLAB'te vektör indislerinin 1'den başladığına dikkat edin.

6. 'conv' fonksiyonunu kullanarak 4. sorudaki evrişimi alın ve sonuçlarınızı, kendi kodunuzla elde ettiğiniz sonuçlarla karşılaştırın. Yazdığınız kodun 'conv' fonksiyonuna göre eksiklik ya da üstünlükleri varsa belirtin.