Bölüm 7.2: Matrisler

- Bugünkü dersimizde matris teorisini tekrar edeceğiz.
- Matris **A,** *m* x *n* boyutunda dikdörtgen elemanlardan oluşan bir elemandır (*m* satır ve *n* sütun)

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Bazı örnek matrisler aşağıdadır:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3-2i \\ 4+5i & 6-7i \end{pmatrix}$$

Transpoz

- $\mathbf{A} = (a_{ij})$ nın **transpozu** $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$ dır.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Konjuge

- $\mathbf{A} = (a_{ij})$ nın **Konjugesi** $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a}_{ij})$ dır.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

- Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 3-4i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i \\ 3+4i & 4 \end{pmatrix}$$

Adjoint

- **A** nın **adjointi** $\overline{\mathbf{A}}^T$ dır, ve $\mathbf{A}^*$ *ile gösterilir.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{m1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

- Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 3-4i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3+4i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}$$

Kare matrisler

- Bir **kare matris A** aynı satırlar ve sütun sayısına sahip matristir. Yani, **A** *n* x *n dir*. Bu durumda, **A** matrisi n. mertebedir.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Vektörler

- **Sütun vektör x,** bir *n* x 1 matristir. Örnek,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Bir **satır vektör x,** 1 x *n* matristir. Örnek,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Dikkat edilmelidir ki, $\mathbf{y} = \mathbf{x}^T$ dir. Eğer **x** sütun vektör ise, $\mathbf{x}^T$ satır vektördür.

Sıfır matris

- **Sıfır matris** şu şekilde tanımlanır **0** = (0), boyutları değişken olabilir. Örnek,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Matris eşitliği

- İki matris $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ve $\mathbf{B} = (b_{ij})$ **eşit** ise o zaman tüm *i* ve *j* için $a_{ij} = b_{ij}$ *dir*. Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Matris – skaler Çarpımı

- $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ve k bir sabit olmak üzere, matrisin skaler ile çarpımı, $k\mathbf{A} = (ka_{ij})$ dır. Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow -5\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ -20 & -25 & -30 \end{pmatrix}$$

Matris Toplama ve Çıkarma

- m x n boyutunda $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ve $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrislerinin toplamı $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$ dır. Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- m x n boyutunda $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ve $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrislerinin farkı $\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij} - b_{ij})$ dır. Örnek,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Matris Çarpımı

- m x n matris $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ve n x r matris $\mathbf{B} = (b_{ij})$ nin **çarpımı** matris $\mathbf{C} = (c_{ij})$ dir, burada

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

- örnekler (Dikkat: **AB** ve **BA** eşit olmak zorunda değil):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+8 \\ 3+8 & 9+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+12 \\ 2+12 & 4+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 3+2+0 & 0+4-3 \\ 12+5+0 & 0+10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 17 & 4 \end{pmatrix}$$

Vektör Çarpımı

- n x 1 boyutlu vektörler **x** & **y** nin **noktasal çarpımı**

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_i y_j$$

- n x 1 boyutlu vektörler **x** & **y** nin **iç çarpımı**

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{n} x_i \bar{y}_j$$

- örnek:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-3i \\ 5+5i \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{y} = (1)(-1) + (2)(2-3i) + (3i)(5+5i) = -12 + 9i$$

$$\Rightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}} = (1)(-1) + (2)(2+3i) + (3i)(5-5i) = 18 + 21i$$

Vektör uzunluğu

- n x 1 vektör **x** in **uzunluğu**

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2} = \left[\sum_{k=1}^{n} x_k \bar{x}_k\right]^{1/2} = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{1/2}$$

- Dikkat edilmelidir ki, eğer $x = a + bi$, ise

$$x \cdot \bar{x} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |x|^2$$

- örnek:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3+4i \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2} = \sqrt{(1)(1)+(2)(2)+(3+4i)(3-4i)}$$

$$= \sqrt{1+4+(9+16)} = \sqrt{30}$$

Diklik

- iki n x 1 vektör **x** & **y dik** ise, **(x,y)** = 0**.**
- örnek:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}) = (1)(11) + (2)(-4) + (3)(-1) = 0$$

Birim matris

- Çarpıma göre **birim matris I**, bir n x n matristir

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Kare matris **A** için, **AI** = **IA** = **A** dır.
- Örnek,

$$\mathbf{AI} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{IB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matris Tersi

- Bir kare matris **A** için **AB** = **BA** = **I** koşulunu sağlayan bir **B** matrisi varsa o zaman A matrisine **tekil olmayan**, veya **tersi alınabilir** denebilir. Aksi takdirde **A tekildir**.
- Matris **B** nin eğer tersi varsa tek dir ve $\mathbf{A}^{-1}$ ile gösterilir. **A** nın **tersi** olarak adlandırılır.
- $\mathbf{A}^{-1}$ vardır iff det**A** $\neq 0$, ve $\mathbf{A}^{-1}$ **satır küçültme** ile bulunabilir (ayrıca Gaussian eliminasyon olarak adlandırılır) bir sonraki yansıdaki örneğe bakın.
- Üç temel satır işlemleri:
  - İki satırın yer değiştirmesi.
  - Satırı sıfır olmayan skaler ile çarpmak.
  - Bir satırın katının diğer bir satır ile toplanması.

Örnek:

- Satır küçültmeyi kullanarak matris **A** nın tersini – eğer varsa- bulunuz.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 8\end{pmatrix}$$

- Çözüm: Temel satır işlemleri ile küçültme (**A**|**I**),

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),$$

öyle ki sol taraf birim matris haline gelsin,ve sağ taraf $\mathbf{A}^{-1}$ olsun.

Örnek devam:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2\end{pmatrix}$$

- öyle ise

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-9/2 & 7 & -3/2\\ -2 & 4 & -1\\ 3/2 & -2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Matris foksiyonları

- Matrisin elemanları reel değişkenli fonksiyonlar olabilir. Bu durumda,

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_m(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t)\end{pmatrix}$$

- Böyle bir matris bir nokta, veya bir arada (a, b) sürekli olması için her elemenın orada sürekli olması gerekir. Benzer şekilde türev alma ve integrasyon:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right),\quad \int_a^b \mathbf{A}(t)dt=\left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right)$$

örnek & türev alma kuralları

- örnek:

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix}3t^2 & \sin t\\ \cos t & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\begin{pmatrix}6t & \cos t\\ -\sin t & 0\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}\mathbf{A}(t)dt=\begin{pmatrix}\pi^3 & 0\\ -1 & 4\pi\end{pmatrix}$$

- Örnek:

$$\frac{d(\mathbf{CA})}{dt}=\mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt},\quad \mathbf{C}\text{ sabit bir matristir}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{dt}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}+\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{AB})}{dt}=\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)\mathbf{B}+\mathbf{A}\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)$$

Bölüm 7.3: Lineer denklem Sistemleri, Lineer bağımsızlık, Eigendeğerler

- n değişkenli, n lineer denklem sistemi,

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

  matris olarak ifade edilebilir: **Ax** = **b**:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- eğer **b** = **0**, ise sistem **homojen**; aksi takdirde **homojen olmayan**dır.

tekil olmayan durum

- Eğer katsayı matrisi **A** tekil değilse, tersi alınabilir ve **Ax** = **b** denkleminden **x**'i çözebiliriz:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \;\Rightarrow \mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \;\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Bu çözüm tekdir. Ayrıca, eğer **b** = **0**, bu tek çözüm **Ax** = **0** is **x** = $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{0}$ = **0**.
- Eğer **A** tekil değilse, tek çözüm to **Ax** = **0** i sağlayan adi çözüm **x** = **0** olacaktır.

örnek : tekil olmayan durum

- Şimdi homojen olmayan lineer sistem **Ax** = **b** ni, $\mathbf{A}^{-1}$ kullanarak çözelim :

$$\begin{aligned} 0x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

- Bu denklem sistemi **Ax** = **b** olarak yazılabilir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- öyle ise

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

örnek : tekil olmayan durum

- Ayrıca, homojen olmayan lineer denklem sistem **Ax** = **b** satır küçültme ile çözülebilir.

$$\begin{aligned} 0x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

- Bunun için augmente matris (**A**|**b**) oluşturulmalı ve temel satır işlemleri ile küçültme yapılmalıdır.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= 7 \end{aligned} \to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -23 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Tekil durum

- Eğer katsayı matris **A** tekilse, $\mathbf{A}^{-1}$ yoktur, ya **Ax** = **b** çözümü bulunmaz, veya birden fazla çözüm vardır (tek değil).
- Dahası, homojen sistem **Ax** = **0** birden fazla çözüme sahiptir. Yani, adi çözüm **x** = **0** e ek olarak, sonsuz sayıda çözüm vardır.
- Homojen olmayan durum **Ax** = **b, (b, y)** = 0 olmazsa çözümsüzdür, $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ denklemini sağlayan tüm **y** vektörleri, ($\mathbf{A}^*$, **A** nın adjointi).
- Bu durumda, **Ax** = **b** sonsuz çözüme sahiptir, her bir çözüm $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \xi$, şeklindedir ve burada $\mathbf{x}^{(0)}$ **Ax** = **b** nin bir özel çözümü, ve ξ, **Ax** = **0** in bir homojen çözümüdür.

örnek 2: tekil durum (1 of 3)

- Homojen olmayan lineer denklem sistemi **Ax** = **b** satır küçültme ile çözelim.

$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 - 1x_3 &= 1 \\ -1x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

- Augmented matris (**A**|**b**) yi oluşturup, temel satır işlemleri ile küçültelim.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{aligned} x_1 \; -2x_2 \; - x_3 &= 1 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 1 \to \textit{çözümü\_yok} \\ 0x_3 &= 1 \end{aligned}$$

örnek 2: tekil durum (2 of 3)

- Homojen olmayan lineer denklem sistemi **Ax** = **b** satır küçültme ile çözelim.

$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 - 1x_3 &= b_1 \\ -1x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= b_2 \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -1 & 5 & 6 & b_2 \\ 5 & -4 & 5 & b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 3 & 5 & b_2 + b_1 \\ 0 & 6 & 10 & b_3 - 5b_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 3 & 5 & b_2 + b_1 \\ 0 & 3 & 5 & \frac{1}{2}b_3 - \frac{5}{2}b_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 3 & 5 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_3 - b_2 - \frac{7}{2}b_1 \end{pmatrix} \to b_3 - 2b_2 - 7b_1 = 0$$

örnek 2: tekil durum (3 of 3)

- Önceki yansıdan,

$$b_3 - 2b_2 - 7b_1 = 0$$

- varsayalım

$$b_1 = 1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 5$$

- öyle ise küçültülmüş augmented matris (**A**|**b**):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 3 & 5 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_3 - b_2 - \frac{7}{2}b_1 \end{pmatrix} \to \begin{aligned} x_1 \; - 2x_2 \; - 1x_3 &= 1 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 - 7x_3/3 \\ -5x_3/3 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -7/3 \\ -5/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{(0)} + \xi$$

Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

- Vektörler $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ **lineer bağımlı** olmaları için gereken şart, aşağıdaki denklemi sağlayan ve hepsi sıfır olmayan skalerler $c_1, c_2, \ldots, c_n$, lerin var olmasıdır.

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0}$$

- Eğer tek çözüm

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0}$$

is $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, öyle ise $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ **lineer bağımsızdır.**

örnek 3: lineer bağımsızlık (1 of 2)

- Aşağıdaki vektörlerin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olduklarını bulunuz.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- Çözmeliyiz

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + c_3\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$$

veya

$$c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

örnek 3: lineer bağımsızlık (2 of 2)

- Augmented matrisi yazalım.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rcl} c_1 \quad + 3c_3 & = & 0 \\ c_2 + 2c_3 & = & 0 \\ c_3 & = & 0 \end{array} \rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- öyle ise tek çözüm $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ dir, ve bu yüzden orjinal vektörler lineer bağımsızdıe.

örnek 4: lineer Bağımlılık (1 of 2)

- Aşağıdaki vektörlerin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olduklarını bulunuz.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Çözmeliyiz

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + c_3\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$$

veya

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

örnek 4: lineer Bağımlılık (2 of 2)

- Augmente matrisi yazalım.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{array}{rl} c_1 \; -2c_2 \; -1c_3 & = 0 \\ 3c_2 \; +5c_3 & = 0 \\ 0c_3 & = 0 \end{array} \to \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -7c_3/3 \\ -5c_3/3 \\ c_3 \end{pmatrix} \to \mathbf{c} = k\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- öyle ise orjinal vektörler lineer bağımlıdır.

$$7\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineer bağımsızlık ve Dönüştürülebilirlik

- Önceki iki örneği inceleyelim:
  - ilk matris tekil olmayan, ve sütun vektörleri lineer bağımsızdır.
  - ikinci matris tekil, ve sütun vektörleri lineer bağımlıdır.
- **A** nın sütunları (veya satırları) lineer bağımsız iff **A** tekil olmayan iff $\mathbf{A}^{-1}$ vardır.
- Ayrıca, **A** tekil olmayan iff det**A** $\neq 0$.
- Dahası, eğer **A** = **BC**, ise det(**C**) = det(**A**)det(**B**). Öyle ise eğer **A** ve **B** nin sütunları (veya satırları) lineer bağımsız ise, **C** nin sütunları (veya satırları) da lineer bağımsızdır.

Lineer Bağımlılık & vektör foksiyonları

- Şimdi vektör foksiyonlarını inceleyelim $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t),\ldots,$ $\mathbf{x}^{(n)}(t)$,

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(k)}(t) \\ x_2^{(k)}(t) \\ \vdots \\ x_m^{(k)}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad t \in I = (\alpha, \beta)$$

- $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t),\ldots,$ $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ I aralığında **lineer bağımlı** olması için gerekli koşul hepsi sıfır olmayan skalerler $c_1, c_2,\ldots, c_n$, lerin var olmasıdır.

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}, \text{ for all } t \in I$$

- aksi takdirde $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t),\ldots,$ $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ **lineer bağımsızdır**.

Eigendeğerler ve Eigenvektörler

- Denklem **Ax** = **y** bir lineer dönüşüm olarak düşünülebilir (**x** in yeni bir vektör **y** ye dönüşmesi**)**.
- öyle ise şu denklemi çözelim: **Ax** = λ**x** veya, (**A**-λ**I**)**x** = **0**.
- Bu denklem sıfır olmayan çözüme sahiptir olması için λ nin şu şekilde seçimi gereklidir det(**A**-λ**I**) = 0.
- Bu tip λ değerlerine **A** nın **eigendeğerleri**, ve sıfır olmayan **x** çözümlerine de **eigenvektörler** denir.

örnek 5: eigendeğerler (1 of 3)

- Matris **A** nın eigendeğerler ve eigenvektörlerini bulun.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}$$

- çözüm: λ yi det(**A**-λ**I**) = 0 olacak şekilde seçelim.

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\left(\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$
$$=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -6-\lambda\end{pmatrix}$$
$$=(2-\lambda)(-6-\lambda)-(3)(3)$$
$$=\lambda^2+4\lambda-21=(\lambda-3)(\lambda+7)$$
$$\Rightarrow\ \lambda=3,\ \lambda=-7$$

örnek 5: ilk Eigenvektör (2 of 3)

- Eigenvektörleri bulmak için (**A**-λ**I**)**x** = **0** denklemini çözmeliyiz.
- λ = 3 ve λ = -7 değerleri için.
- Eigenvektör için λ = 3: çözelim

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}2-3 & 3\\ 3 & -6-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

satır küçültme ile:

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -9 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 3 & -9 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{matrix}1x_1 & -3x_2 & =0\\ & 0x_2 & =0\end{matrix}$$

$$\to\mathbf{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}3x_2\\ x_2\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix},\ c\ \text{arbitrary}\to\text{choose}\ \mathbf{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

örnek 5: ikinci Eigenvektör (3 of 3)

- Eigenvektör için λ = -7: çözelim

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}2+7 & 3\\ 3 & -6+7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}9 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

satır küçültme ile:

$$\begin{pmatrix}9 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{matrix}1x_1 & +1/3x_2 & =0\\ & 0x_2 & =0\end{matrix}$$

$$\to\mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}-1/3x_2\\ x_2\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1/3\\ 1\end{pmatrix},\ c\ \text{rastgele}\to\text{seç}\ \mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$$

Normalize edilmiş Eigenvektörler

- Önceki örnekte gördüğümüz gibi, eigenvektörler sıfır olmayan çarpan bir sabitle yazıldılar.
- Eğer bu sabit belirlenmiş ise eigenvektör **Normalize edilmiş** denir.
- Örnek, eigenvektörler bazen $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{½} = 1$ denkleminin sağlanması ile normalize edilirler.

Cebirsel ve Geometrik Çarpan

- n x n matris **A** nın eigendeğerler λ larını bulmak için, det(**A**-λ**I**) = 0 denklemini çözeriz.
- Ancak bu n x n matrisin determinantını bulmayı, n.ci derece bir polinomun köklerini bulmayı gerektirir.
- Bu eigendeğerlere, λ_1, λ_2, …, λ_n diyelim.
- Eğer bir eigendeğer m kere tekrarlıyorsa,onun **cebirsel çarpanı** m dir.
- Eğer eigendeğer en az bir eigenvektöre sahip, ve bir eigendeğerin çebirsel çarpanı m, q lineer bağımsız eigevektörlere sahip ise, $1 \le q \le m$, q ya eigendeğerin **geometrik çarpanı** denir.

Eigenvektörler ve lineer bağımsızlık

- Eğer bir eigendeğerin λ cebirsel çarpanı 1 ise, o zaman **basitdir**, ve geometrik çarpanı da 1 dir.
- Eğer n x n matris **A** nın her eigendeğeri basit ise, **A** n birbirinden farklı eigendeğerlere sahiptir. Ayrıca bu n eigendeğerler karşılık gelen n eigenvektör lineer bağımsızdır.
- Eğer bir eigendeğer bir veya daha fazla tekrarlı eigendeğere sahip ise, n den daha az lineer bağımsız eigenvektörler var olabilir. Bu diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde sorun yaratabilir.

örnek 6: eigendeğerler (1 of 5)

- Matris **A** nın eigendeğer ve eigenvektörlerini bulun.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- çözüm: det(**A**-λ**I**) = 0.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_2 = -1$$

örnek 6: ilk Eigenvektör (2 of 5)

- Eigenvektör $\lambda = 2$: çöz (**A**-λ**I**)**x** = **0**.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{aligned} 1x_1 \quad & -1x_3 = 0 \\ 1x_2 \; & -1x_3 = 0 \\ & 0x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\to \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \text{ rastgele} \to \text{seç } \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

örnek 6: 2^{nci} ve $3^{ncü}$ Eigenvektörler (3 of 5)

- Eigenvektör λ = -1: çöz (**A**-λ**I**)**x** = **0**.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{matrix}1x_1&+1x_2&+1x_3&=0\\&0x_2&&=0\\&&0x_3&=0\end{matrix}$$

$$\to\mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}-x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\text{ where } x_2,x_3 \text{ rastgele}$$

$$\to\text{seç } \mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

örnek 6: Eigenvektörler (4 of 5)

- öyle ise **A** nın üç eigenvektörü

$$\mathbf{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

burada $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$ karşılık gelen çift eigendeğer λ = - 1.

- $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$ are lineer bağımsızdır.
- **A** 3 real eigendeğerli ve 3 lineer bağımsız eigenvektörlü bir 3 x 3 **simetrik matrisdir** (**A** = $\mathbf{A}^T$) .

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

örnek 6: Eigenvektörler (5 of 5)

- Aynı zamanda şu da seçilebilirdi.

$$\mathbf{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

- öyle ise eigenvektörler diktir, çünkü

$$\left(\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}\right)=0,\ \left(\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(3)}\right)=0,\ \left(\mathbf{x}^{(2)},\mathbf{x}^{(3)}\right)=0$$

- öyle ise **A** 3 real eigendeğerli ve 3 lineer bağımsız dik eigenvektörlü bir 3 x 3 simetrik matristir.

Hermitian matrisler

- Bir **Hermitian** matris, **A** = $\bar{\mathbf{A}}^*$, denklemini sağlar. ($\mathbf{A}^*$ = $\mathbf{A}^T$).
- öyle ise Hermitian matris için, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.
- Eğer **A** reel elemanlara sahip ve simetrik ise, **A** Hermitian dır.
- Bir n x n Hermitian matris **A** aşağıdaki özelliklere sahiptir:
  - Tüm eigendeğerleri reeldir.
  - n lineer bağımsız eigenvektörleri vardır.
  - Eğer $\mathbf{x}^{(1)}$ ve $\mathbf{x}^{(2)}$ farklı eigendeğerlere karşılık gelen eigenvektörler ise $\mathbf{x}^{(1)}$ ve $\mathbf{x}^{(2)}$ diktir.
  - Cebirsel çarpanı m olan bir eigendeğer için, m birbirine dik eigenvektörler seçmek mümkündür, ve A n lineer bağımsız dik eigenvektörlere sahiptir.