

1. (a) Örnek Uzay S_1 16 sıralı ikili içermektedir. ilk sayı ilk çekilişi göstermek üzere (i, j) , $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$, olduğundan,

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{cccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) \end{array} \right\}$$

- (b) Örnek Uzay S_2 12 sıralı ikili içermektedir. ilk sayı ilk çekilişi göstermek üzere (i, j) , $i \neq j$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$, olduğundan,

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) \\ (2, 1) & (2, 3) & (2, 4) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 4) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) \end{array} \right\}$$

2.

$$\bar{A} = \{k: k \text{ çift sayı} \} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$\bar{B} = \{k: k = 1, 2, 3 \text{ or } k \geq 8\}$$

$$\bar{C} = \{k: k \geq 11\}$$

$$A \cup B = \{k: k \text{ tek sayı yada } k = 4, 6\}$$

$$B \cup C = C$$

$$A \cap B = \{5, 7\}$$

$$A \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B \cap C = B$$

$$\bar{A} \cap B = \{4, 6\}$$

3.

$B = A_2 \cup A_3$ olsun,

$$P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) - P(A_1 \cap B)$$

Dağılım kuralından:

$$A_1 \cap B = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

(*) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P[(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)] \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

$$P(B) = P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\ &\quad - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[A \cap (B \cup C)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (*)$$

4.

(a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

$P(A \cap B) \geq 0$. buradan,

$$P(A|B) \geq 0$$

(b)

$S \cap B = B$. buradan,

$$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

(c)

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)}$$

$$(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{ve,} \quad (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset. \quad \text{buradan,}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 | B) &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) \quad (\text{eğer } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ ise}) \end{aligned}$$

5. Seçilen parçanın hatalı olması olayına B ve seçilen parçanın birinci fabrikadan gelmesi olayına da A dersek, bu durumda $A \cap B$ olayı parçanın hatalı olması ve birinci fabrikadan gelmesi anlamına gelecektir. Parça rastgele seçildiğinden,

$$P(A \cap B) = \frac{100}{3000} = \frac{1}{30}$$

Aynı şekilde 3000 parçadan 250 tanesi hatalı olduğundan,

$$P(B) = \frac{250}{3000} = \frac{1}{12}$$

Sonuç olarak,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{12}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Alternatif Çözüm:

250 adet hatalı parça vardır ve 100 tanesi birinci fabrikadan gelmiştir. Bu yüzden hatalı parçanın birinci fabrikadan gelme olasılığı,

$$\frac{100}{250} = 0.4.$$

6.

(a)

$$P(x_1) = 1 - P(x_0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$P(y_0 | x_0) = q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$P(y_1 | x_1) = q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i) \text{ olduğundan buradan,}$$

$$P(y_0) = P(y_0 | x_0)P(x_0) + P(y_0 | x_1)P(x_1) = 0.9(0.5) + 0.2(0.5) = 0.55$$

$$P(y_1) = P(y_1 | x_0)P(x_0) + P(y_1 | x_1)P(x_1) = 0.1(0.5) + 0.8(0.5) = 0.45$$

(b) Bayes kuralını uygularsak:

$$P(x_0 | y_0) = \frac{P(x_0)P(y_0 | x_0)}{P(y_0)} = \frac{(0.5)(0.9)}{0.55} = 0.818$$

(c) Aynı şekilde:

$$P(x_1 | y_1) = \frac{P(x_1)P(y_1 | x_1)}{P(y_1)} = \frac{(0.5)(0.8)}{0.45} = 0.889$$

(d) Buradan toplam hata:

$$P_e = P(y_1 | x_0)P(x_0) + P(y_0 | x_1)P(x_1) = 0.1(0.5) + 0.2(0.5) = 0.15.$$

7. Tümevarımdan hareketle, verilen deklemin $n=k$ için doğru olduğunu varsayalım:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

Her iki tarafı $P(A_{k+1} | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$ ile çarparsak:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)P(A_{k+1} | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k+1})$$

ve

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_{k+1} | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$

Soruda verilen deklemin $n=k+1$ için de doğru olduğundan,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

eşitliğinden, soruda verilen denklemin $n=2$ için de doğru olduğunu söyleyebiliriz. Bu sebeple verilen denklem $n \geq 2$ için de doğrudur.