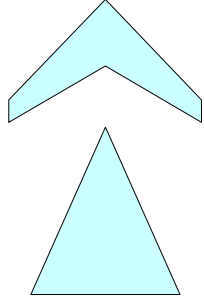
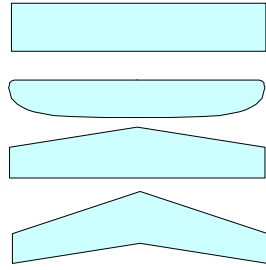


Sonlu kanat Teorisi

Açıklık oranı küçük ($AR < 4-5$) kanatlar



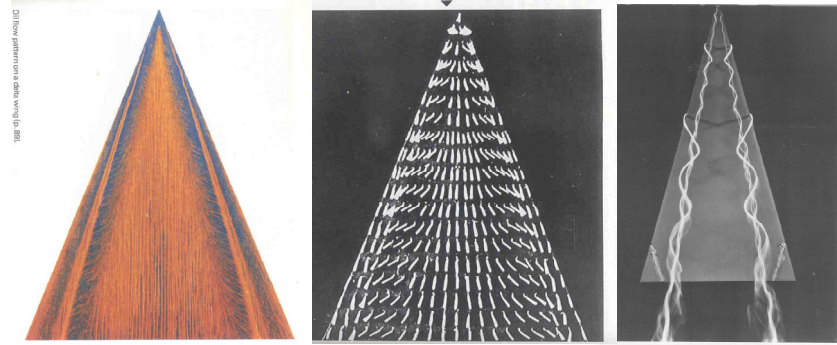
Açıklık oranı büyük ($AR > 4-5$) kanatlar



UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

1

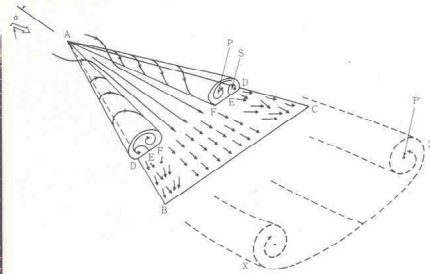
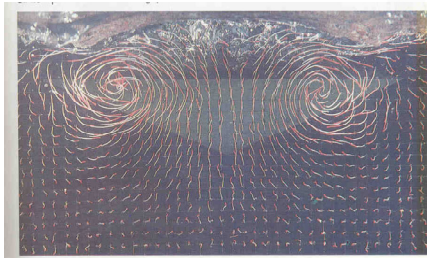
Açıklık oranı küçük kanatlar etrafındaki akımın fiziksel yapısı



UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

2

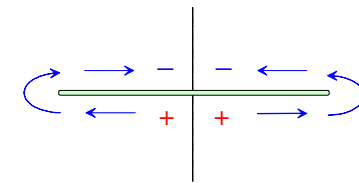
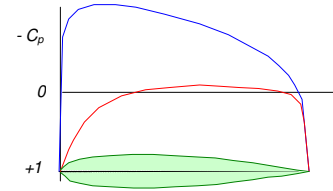
Açıklık oranı küçük kanatlar etrafındaki akımın fiziksel yapısı



UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

3

Açıklık oranı yüksek sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



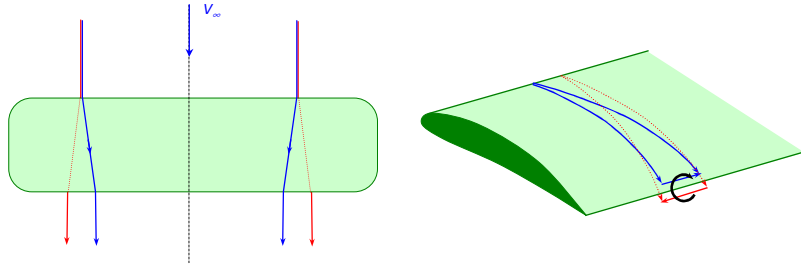
Taşıma kuvveti oluşturan bir kanadın üst yüzeyindeki basınç genel olarak serbest akım basıncından düşük, alt yüzeyindeki basınç ise kısmen serbest akım basıncından düşük ve kısmen de büyük olmakla birlikte genel olarak üst yüzeydeki basınçtan büyüktür.

Bu nedenle bir kanat etrafından geçmekte olan akımda, basıncın daha büyük olduğu alt yüzeyden üst yüzeye doğru kanat açıklığı doğrultusunda ikincil bir akım oluşur.

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

4

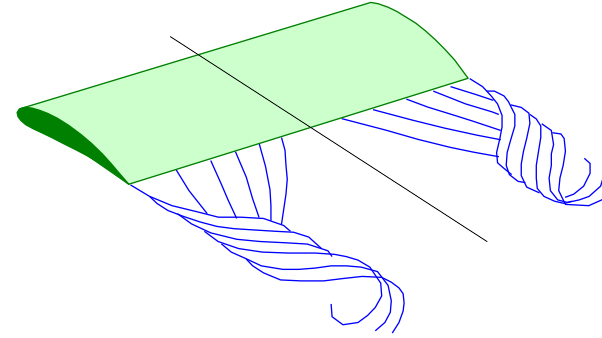
Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



Yanal doğrultudaki bu ikincil akım, kanat etrafından geçmekte olan akımın alt yüzeyde kanat uçlarına doğru, üst yüzeyde ise kanat köküne doğru sapsmasına neden olur.

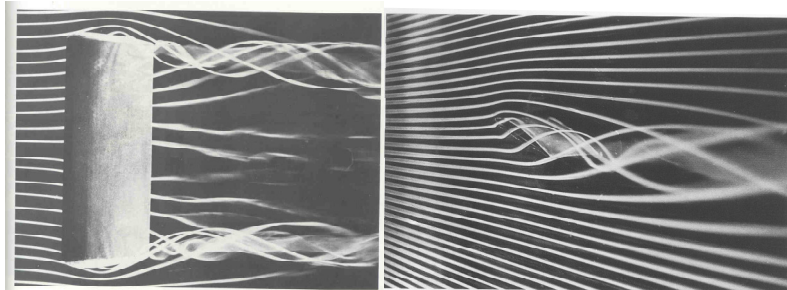
Kanat üstünden ve altından bu şekilde sapsmış olarak geçen akışkan fileleri firar kenarında birleştiğinde, firar kenarı doğrultusundaki hız bileşenleri zıt yönde olduğu için meydana gelen kayma gerilmesinin etkisiyle girdap oluştururlar. Kanadın firar kenarının her noktasından oluşan bu girdaplara "kaçma girdapları" adı verilmektedir.

Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



Açıklık boyunca oluşan çok sayıda kaçma girdabı, kanadın gerisinde belli bir uzaklıktan sonra birleşerek, kanat uçları hizasında geriye doğru uzanan iki büyük girdap oluşturur. Bu girdaplara da "kanat ucu girdabı" adı verilir .

Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



Kanat kaçma girdapları ve uç girdapları.

Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



Kanat uç girdabı.



Dryden Flight Research Center ECN 3831 Photographed 1974
B-727 vortex study NASA photo



Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



Kanat uç girdabı.

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

9

Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı

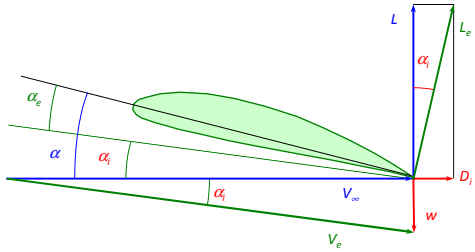


Flap tarafından oluşturulan kanat uç girdabı

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

10

Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



Kaçma girdapları kanat etrafından geçen akımın doğrultusunda genel olarak aşağı doğru sapma yaratır.

Akımın aşağı saptması da aerodinamik taşıma kuvveti doğrultusunun saptmasına neden olur.

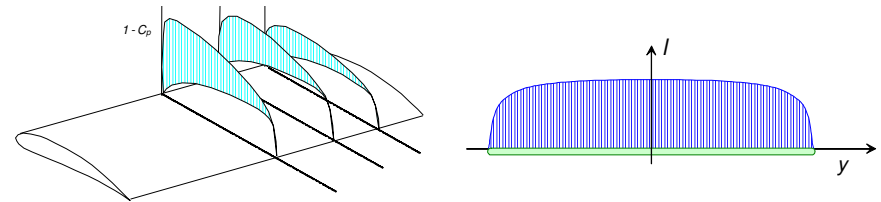
Oluşan taşıma kuvvetinin bir bileşeni kanadın uçuş doğrultusunda ama zıt yönde olup, hareketi engelleyici yöndeki bu direnç kuvvetine "indüklenmiş sürükleme" adı verilir.

Diğer bileşen ise taşıma kuvvetinin yararlı olan kısmıdır. Bu kuvvet de iki-boyutlu haldeki taşıma kuvvetinden daha küçüktür.

UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

11

Sonlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı



Kanat uçlarında alt ve üst yüzeyler arasındaki ikincil akım nedeniyle kanadın özellikle uç taraflarında taşımada önemli kayıplar oluşur.

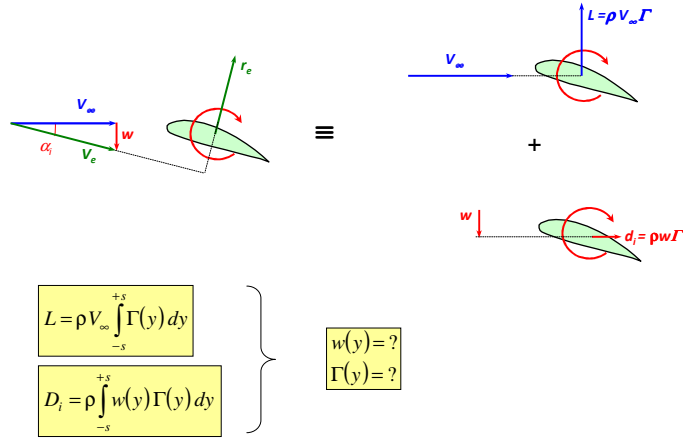
Kayıplar genellikle kanadın simetri düzlemi yakınlarında en alt seviyededir.

Sonuç olarak üç-boyutlu bir kanadın açıklığı boyunca değişen bir yük (taşıma) dağılımı söz konusudur

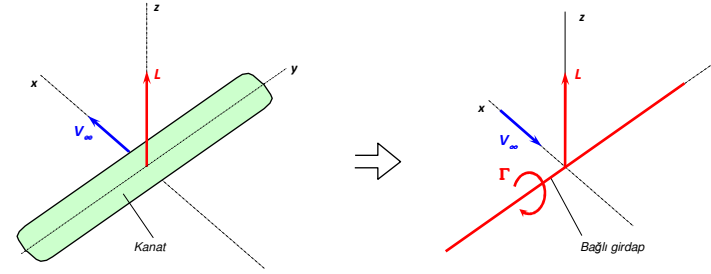
UCK351 Aerodinamik ders notları
- MAY

12

Taşıma ve indüklenmiş sürüklenme kuvvetlerinin hesaplanması



Prandtl taşıyıcı çizgi modeli Bir girdapla yer değiştirmiş kanat



Bu model yetersizdir. Bunu anlamak için girdaplarla ilgili Helmholtz teorilerine bakalım

Helmholtz girdap teorileri

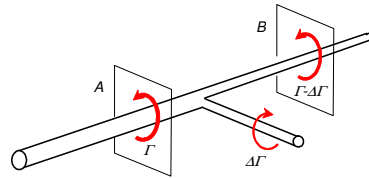
Helmholtz'un birinci teoremi akışkanın genel hareketiyle ilgilidir ve bu hareketin lineer hız, çevri ve distorsiyon olaylarından bazılarını veya hepsini birden içerebileceğini belirtir.

İkinci teorem; bir girdabın eksenini boyunca şiddetinin sabit olduğunu belirtir. Bir girdabın şiddeti etrafındaki sirkülasyonun büyüklüğüne eşit olup, bu da girdabın S dik kesit alanı ile vortisitinin çarpımına eşittir.

$$\Gamma = \zeta \cdot S$$

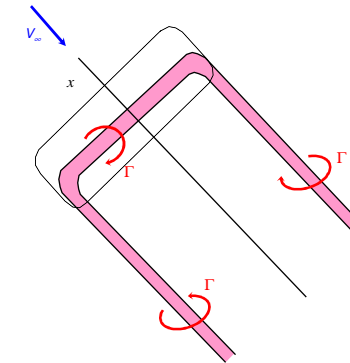
Girdabın şiddeti eksenini boyunca sabit kalacağına göre **girdabın kesit alanı azaldığında vortisite artacaktır**. Sonsuz şiddette vortisite alamayacağı için girdabın dik kesit alanı hiçbir zaman sıfır olamaz. Diğer bir deyişle **girdap akışkanın içinde son bulamaz. Ya kapalı bir halka oluşturmak, ya da bir katı yüzeyi ile son bulmak zorundadır**.

İkinci teoremden çıkartılacak bir sonuç da şu şekilde ifade edilebilir: Bir girdabın iki kesitindeki şiddetleri, bu iki kesit arasındaki bir bölgede girdabın dallanması veya girdaba bazı girdap filamanlarının katılması haricinde daima birbirine eşittir.



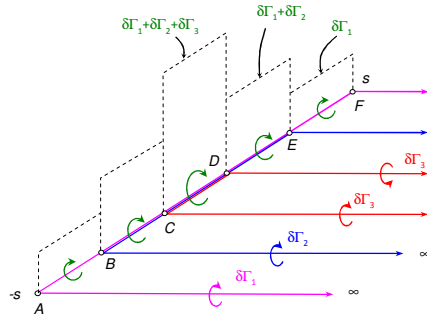
Üçüncü ve dördüncü Helmholtz teoremleri sırasıyla: a) Bir girdap tüpünün daima aynı akışkan zerrelerini ihtiva ettiğini, yani girdap tüpü ile çevresi arasında bir akışkan alışverişi olmadığını, b) akışkan içerisindeki hareketi sırasında girdabın şiddetinin daima sabit kaldığını belirtir

Prandtl taşıyıcı çizgi modeli Atnalı girdap modeli

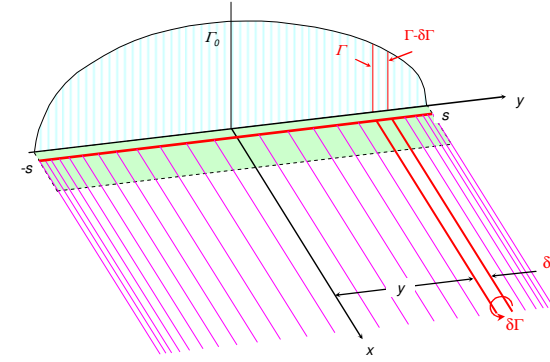


Bu model de bu haliyle yetersizdir. Zira kanat açıklığı boyunca sirkülasyon şiddeti değişmediği gibi kanat fırac kenarından çıkan kaçma girdapları modellenmemiştir.

Prandtl taşıyıcı çizgi modeli Atnalı girdaplarıyla yer değiştirmiş kanat



Prandtl taşıyıcı çizgi modeli Atnalı girdaplarıyla yer değiştirmiş kanat



$$\delta\Gamma = -\frac{d\Gamma}{dy} \delta y$$

Kaçma girdaplarının etkisi Biot-Savart kanunu yardımıyla incelenecektir.

Biot-Savart kanunu Doğrusal girdaplar için uygulanması

$$\delta\vec{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi r^3} \delta\vec{s} \wedge \vec{r}$$

$$v = \int_A^B \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin\theta \cdot ds$$

$$\sin\theta = \cos\phi$$

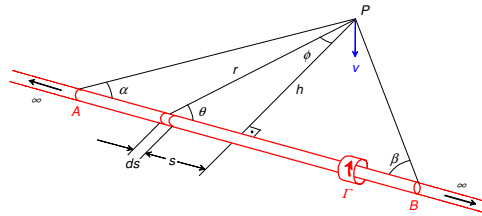
$$r = h/\cos\phi$$

$$s = h \cdot \tan\phi \rightarrow ds = (h/\cos^2\phi) \cdot d\phi$$

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\phi_A}^{\phi_B} \cos\phi \cdot d\phi = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\sin\phi_B - \sin\phi_A)$$

$$\phi_A = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \phi_B = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\beta + \cos\alpha)$$



Biot-Savart kanunu Doğrusal girdaplar için uygulanması

	<p>Yarı-sonsuz girdap çizgisi</p> <p>$\alpha < 90^\circ, \beta \rightarrow 0$</p> $v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\alpha + 1)$
	<p>Yarı-sonsuz girdap çizgisi</p> <p>$\alpha = 90^\circ, \beta \rightarrow 0$</p> $v = \frac{\Gamma}{4\pi h}$
	<p>Sonsuz uzun girdap çizgisi</p> <p>$\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$</p> $v = \frac{\Gamma}{2\pi h}$

Prandtl taşıyıcı çizgi modeli
Kaçma girdaplarının kanat önünde, civarında ve gerisinde yarattığı aşağı sapma hızları

$$\beta \rightarrow 0 \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos\alpha + 1)$$

- Kanadın önünde sonsuzda: $\alpha = \pi$

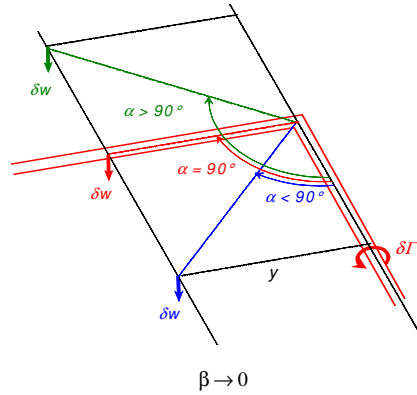
$$\delta w = 0$$

- Kanadın bulunduğu konumda: $\alpha = \pi/2$

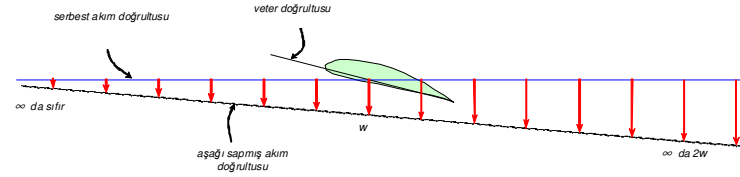
$$\delta w = \frac{\delta\Gamma}{4\pi y}$$

- Kanadın gerisinde sonsuzda: $\alpha = 0$

$$\delta w = 2 \frac{\delta\Gamma}{4\pi y}$$



Prandtl taşıyıcı çizgi modeli
Kaçma girdaplarının kanat önünde, civarında ve gerisinde yarattığı aşağı sapma hızları



Kanadın civarındaki aşağı sapma hızı w olmak üzere aşağı sapma açısı

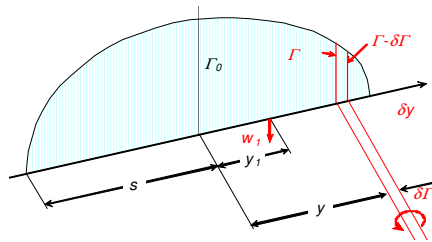
$$\alpha_i = \tan^{-1} \left(\frac{w}{V_\infty} \right) \cong \frac{w}{V_\infty}$$

Prandtl taşıyıcı çizgi modeli
Kaçma girdaplarının yarattığı aşağı sapma hızının hesaplanması

$$\delta w_{y_1} = \frac{\delta\Gamma}{4\pi(y-y_1)} \delta y$$

$$w_{y_1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{\delta\Gamma(y)}{y-y_1} dy$$

$$w_{y_1} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma/dy}{y-y_1} dy$$



Sonlu-kanat için problem

$$L = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy$$

$$w_{y_1} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma/dy}{y-y_1} dy$$

$$D_i = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) dy$$

$\Gamma(y) = ?$ Geometri-sirkülasyon ilişkisinden hesaplanacak

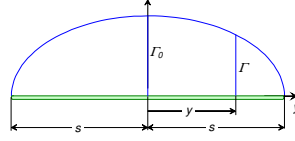
Ancak önce, öngörülen bazı sirkülasyon dağılımlarının sağladığı performansa göz atmak yararlı olacaktır.

Basit simetrik yük dağılımları

Eliptik yük dağılımı

$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1 \rightarrow \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{s^2}}$$

$$L = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma_0 \sqrt{1 - y^2/s^2} dy$$



$$y = -s \cos \theta \quad dy = s \sin \theta d\theta \quad \text{Değişken dönüşümü ile}$$

$$L = \rho V_\infty \Gamma_0 s \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \rightarrow \boxed{L = \rho V_\infty \Gamma_0 s \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{aşığı sapma hızları açısıl koordinat sisteminde} \quad w_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma/dy}{y - y_i} dy = \frac{1}{4\pi s} \int_0^\pi \frac{d\Gamma/d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} d\theta$$

$$\text{Ve ayrıca} \quad \Gamma = \Gamma_0 \sin \theta \rightarrow \frac{d\Gamma}{d\theta} = \Gamma_0 \cos \theta \quad \text{olup}$$

$$w_i = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} G_1 = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \pi \rightarrow \boxed{w_i = \frac{\Gamma_0}{4s} = sb}$$

Basit simetrik yük dağılımları

Eliptik yük dağılımı

İndüklenmiş sürüklenme

$$D_i = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) dy = \frac{\Gamma_0}{4s} \frac{L}{V_\infty} \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \frac{\Gamma_0}{4s} \frac{L}{V_\infty}$$

$$\boxed{L = \rho V_\infty \Gamma_0 s \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \Gamma_0 = \frac{2L}{\rho V_\infty \pi s} \Rightarrow D_i = \frac{L^2}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \pi 4s^2}$$

$$L = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S C_L \quad D_i = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S C_{D_i} = \frac{(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2)^2 S^2 C_L^2}{(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2) \pi 4s^2} \rightarrow C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi (4s^2/S)}$$

$$\text{Burada} \quad \frac{4s^2}{S} = AR \quad \text{olup} \quad \boxed{C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}}$$

Basit simetrik yük dağılımları

Değiştirilmiş eliptik yük dağılımı

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - (y/s)^2} \cdot [1 + 4\lambda (y/s)^2]$$

$$y = -s \cos \theta \Rightarrow \Gamma = \Gamma_0 \sin \theta \cdot (1 + 4\lambda \cos^2 \theta) = \Gamma_0 [(1 + \lambda) \sin \theta + \lambda \sin 3\theta]$$

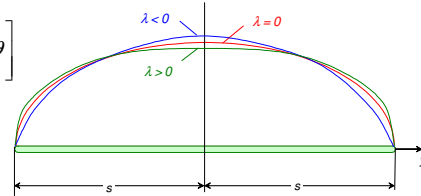
Taşıma

$$L = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \rho V_\infty \int_0^\pi \Gamma(\theta) s \sin \theta d\theta = \rho V_\infty s \int_0^\pi \Gamma_0 [(1 + \lambda) \sin \theta + \lambda \sin 3\theta] \sin \theta d\theta$$

$$L = \rho V_\infty \Gamma_0 s \left[(1 + \lambda) \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta + 4\lambda \int_0^\pi \sin 3\theta \cdot \sin \theta d\theta \right]$$

$$L = \rho V_\infty \Gamma_0 s (1 + \lambda) \pi / 2$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} \Rightarrow C_L = \frac{\pi s \Gamma_0}{V_\infty S} (1 + \lambda)$$



$$L_E = L_{DE} \rightarrow \rho V_\infty \Gamma_E s \frac{\pi}{2} = \rho V_\infty \Gamma_{DE} s (1 + \lambda) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Gamma_{DE} = \frac{\Gamma_E}{1 + \lambda}$$

Basit simetrik yük dağılımları

Değiştirilmiş eliptik yük dağılımı

$$\text{Aşığı sapma hızı} \quad w_{y_i} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma/dy}{y - y_i} dy \rightarrow w_{\theta_i} = -\frac{1}{4\pi s} \int_0^\pi \frac{d\Gamma/d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} d\theta$$

$$\Gamma = \Gamma_0 [(1 + \lambda) \sin \theta + \lambda \sin 3\theta] \Rightarrow \frac{d\Gamma}{d\theta} = \Gamma_0 [(1 + \lambda) \cos \theta + 3\lambda \cos 3\theta]$$

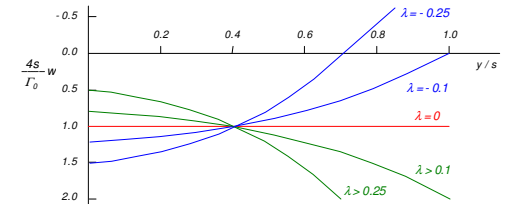
$$w_{\theta_i} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \left[(1 + \lambda) \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} d\theta + 3\lambda \int_0^\pi \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta - \cos \theta_i} d\theta \right] = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} [(1 + \lambda) G_1 + 3\lambda G_3]$$

$$w_{\theta_i} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \left[(1 + \lambda) \pi + 3\lambda \frac{\sin 3\theta_i \pi}{\sin \theta_i \pi} \right]$$

$$\frac{\sin 3\theta_i}{\sin \theta_i} = \frac{\sin 2\theta_i \sin \theta_i + \cos 2\theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_i} = 4 \cos^2 \theta_i - 1$$

$$w_{\theta_i} = \frac{\Gamma_0}{4s} [(1 + \lambda) + 3\lambda (4 \cos^2 \theta_i - 1)]$$

$$\boxed{w_{y_i} = \frac{\Gamma_0}{4s} [1 - 2\lambda + 12\lambda (y_i/s)^2]}$$



Basit simetrik yük dağılımları

Değiştirilmiş eliptik yük dağılımı

İndüklenmiş sürüklenme $D_i = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) dy = \rho s \int_0^\pi w(\theta) \Gamma(\theta) \sin \theta d\theta$

$w_{\theta_i} = \frac{\Gamma_0}{4s} [(I + \lambda) + 3\lambda (4 \cos^2 \theta_i - I)]$ Yukarıda kullanılarak

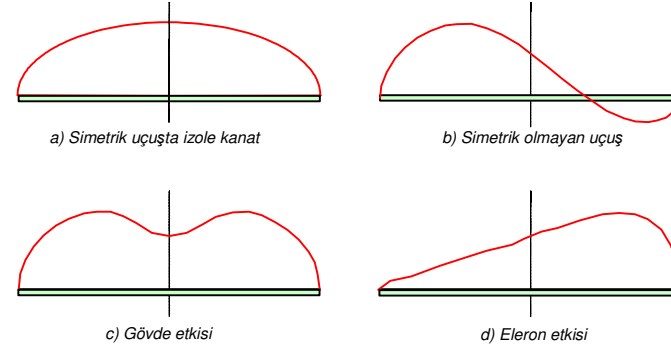
$D_i = \frac{\rho \Gamma_0^2}{4} \int_0^\pi [(I + \lambda) + 3\lambda (4 \cos^2 \theta - I)] \cdot [1 + 4\lambda \cos^2 \theta] \sin^2 \theta d\theta = \frac{\rho \Gamma_0^2}{8} \pi [1 + 2\lambda + 4\lambda^2]$

$C_{D_i} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \frac{\pi \Gamma_0^2}{4 V_\infty^2 S} [1 + 2\lambda + 4\lambda^2]$

$C_{D_i} = \frac{C_L^2 S}{4\pi s^2} \frac{1 + 2\lambda + 4\lambda^2}{(I + \lambda)^2} = \frac{C_L^2}{\pi (2s)^2 / S} \left[1 + \frac{3\lambda^2}{(I + \lambda)^2} \right]$

$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} [1 + \delta] \quad \delta = 3 \left[\frac{\lambda}{I + \lambda} \right]^2 > 0$

En genel yük dağılımı



Bu yük dağılımları genel bir bağıntıyla nasıl temsil edilebilir?

En genel yük dağılımı

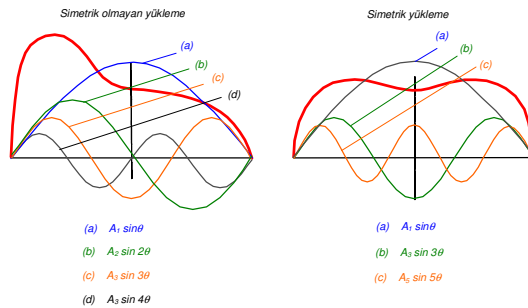
Lokal taşıma-sirkülasyon ilişkisi $\left. \begin{aligned} l &= \rho V_\infty \Gamma \\ l &= c_l \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2} c_l V_\infty c = 4s V_\infty m(y)$

$m(y) = \frac{1}{8} c_l(y) \cdot \frac{c(y)}{s}$

$y = -s \cos \theta \Rightarrow \Gamma = 4s V_\infty \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \right]$

$B_n \equiv 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$

$\Gamma = 4s U_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)$



En genel yük dağılımı - taşıma

$\Gamma = 4s U_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)$

$L = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \rho V_\infty \int_0^\pi \Gamma(\theta) s \sin \theta d\theta = 4s^2 \rho V_\infty^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \cdot \sin \theta d\theta$

$\int_0^\pi \sin n\theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right]_0^\pi$

$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta \cos(n-1)\theta}{1} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

$L = 2s^2 \rho V_\infty^2 A_1 \pi$

Taşıma katsayısı $C_L = \frac{2L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \pi A_1 \frac{4s^2}{S} \rightarrow \boxed{C_L = \pi AR A_1}$

En genel yük dağılımı – aşağı sapma hızı

$$\Gamma = 4sU_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Gamma}{d\theta} = 4sV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta$$

$$w_{\theta_1} = \frac{V_\infty}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} = \frac{V_\infty}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n G_n = \frac{V_\infty}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \pi \frac{\sin n\theta_1}{\sin \theta_1}$$

$$w_{\theta_1} = \frac{V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta_1}{\sin \theta_1}$$

En genel yük dağılımı – indüklenmiş sürüklenme

$$\begin{aligned} D_i &= \rho V_\infty \int_{-s}^s w(y)\Gamma(y) dy = \rho V_\infty \int_0^\pi w(\theta)\Gamma(\theta) s \sin \theta d\theta = \rho V_\infty \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta}{\sin \theta} \cdot (4sV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta) \cdot s \sin \theta d\theta \\ &= 4s^2 \rho V_\infty^2 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) d\theta \\ &= 4s^2 \rho V_\infty^2 \int_0^\pi (A_1 \sin \theta + 2A_2 \sin 2\theta + 3A_3 \sin 3\theta + \dots) \cdot (A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta + \dots) d\theta \\ D_i &= 4s^2 \rho V_\infty^2 \left\{ \int_0^\pi (A_1^2 \sin^2 \theta + 2A_2^2 \sin^2 2\theta + 3A_3^2 \sin^2 3\theta + \dots) d\theta \right. \\ &\quad + \int_0^\pi (3A_1 A_2 \sin \theta \sin 2\theta + 4A_1 A_3 \sin \theta \sin 3\theta + \dots) d\theta \\ &\quad + \int_0^\pi (5A_2 A_3 \sin 2\theta \sin 3\theta + 6A_2 A_4 \sin 2\theta \sin 4\theta + \dots) d\theta \\ &\quad \left. + \dots \right\} \\ &= 4s^2 \rho V_\infty^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+2}^{\infty} (n+m)A_n A_m \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta \right\} \end{aligned}$$

En genel yük dağılımı – indüklenmiş sürüklenme

$$D_i = 4s^2 \rho V_\infty^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+2}^{\infty} (n+m)A_n A_m \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta \right\}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2n\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$D_i = 2s^2 \rho V_\infty^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2$$

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \frac{4s^2}{S} \pi \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2 = \pi AR \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2$$

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)$$

$$\delta = \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = 2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + 3 \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + 4 \left(\frac{A_4}{A_1} \right)^2 + \dots \geq 0$$

Simetrik olmayan yük dağılımı halinde – Yalpa momenti

$$\delta M_x = -l y \delta y \quad \Rightarrow \quad M_x = -\rho V_\infty \int_{-s}^s \Gamma(y) y dy$$

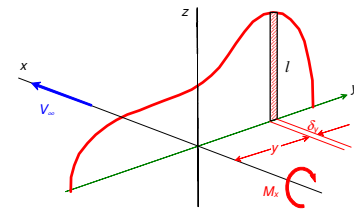
$$M_x = 4\rho V_\infty^2 s^3 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$M_x = 2\rho V_\infty^2 s^3 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin 2\theta d\theta$$

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-2)\theta - \cos(n+2)\theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-2)\theta}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\theta}{n+2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$M_x = \rho V_\infty^2 s^3 A_2 \pi$$

$$C_{M_x} = \frac{M_x}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S \bar{c}} = \frac{2s^3}{S \bar{c}} \pi A_2 = \frac{4s^2}{S} \frac{2s}{\bar{c}} \frac{\pi}{4} A_2 \quad \rightarrow$$



$$C_{M_x} = \frac{\pi}{4} (AR)^2 A_2$$

Simetrik olmayan yük dağılımı halinde – Sapma momenti

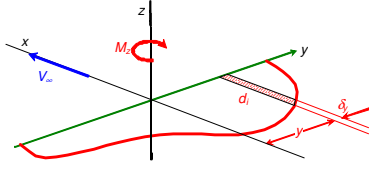
$$\delta M_z = d_i y \delta y \Rightarrow M_z = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) y dy$$

$$M_z = -4\rho V_\infty^2 s^3 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty n A_n \sin n\theta \right) \left(\sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \right) \cos \theta d\theta$$

$$M_z = 4\rho V_\infty^2 s^3 \left\{ \sum_{n=1}^\infty n A_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\theta \cos \theta d\theta + \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=n+1}^\infty (n+m) A_n A_m \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \cos \theta d\theta \right\}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 n\theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2n\theta) \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2n\theta \cos \theta d\theta$$

$$= 0 - \frac{1}{4} \int_0^\pi [\cos(2n-1)\theta + \cos(2n+1)\theta] d\theta = -\frac{1}{4} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right]_0^\pi$$

$$= 0$$


Simetrik olmayan yük dağılımı halinde – Sapma momenti

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \cos \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos(m-n)\theta - \cos(m+n)\theta}{2} \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{\cos(m-n)\theta \cos \theta - \cos(m+n)\theta \cos \theta}{2} d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{\cos(m-n-l)\theta + \cos(m-n+l)\theta}{4} - \frac{\cos(m+n-l)\theta + \cos(m+n+l)\theta}{4} \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(m-n-l)\theta}{m-n-l} - \frac{\sin(m-n+l)\theta}{m-n+l} - \frac{\sin(m+n-l)\theta}{m+n-l} - \frac{\sin(m+n+l)\theta}{m+n+l} \right]_0^\pi$$

integraller sadece $m=n+1$ için $\pi/4$ sonucunu verir

$$M_z = \rho V_\infty^2 s^3 \pi \sum_{n=1}^\infty (2n+1) A_n A_{n+1}$$

$$C_{M_z} = \frac{\pi}{4} (AR)^2 \sum_{n=1}^\infty (2n+1) A_n A_{n+1}$$

Üç boyutlu kanat için geometri-yük dağılımı ilişkisi

Üç boyutlu kanadın performansını (taşıma, indüklenmiş sürükleme) belirlemek için $\Gamma(y)$ yük dağılımının bilinmesi gerekmektedir.

Yük dağılımı kanat geometrisinin (üst-görünüm geometrisi, açıklık boyunca burulma, açıklık boyunca kesit profillerinin değişimi) direkt bir sonucudur.

Dolayısıyla, geometri ile – yük dağılımı arasında bir ilişki kurulması gerekir.

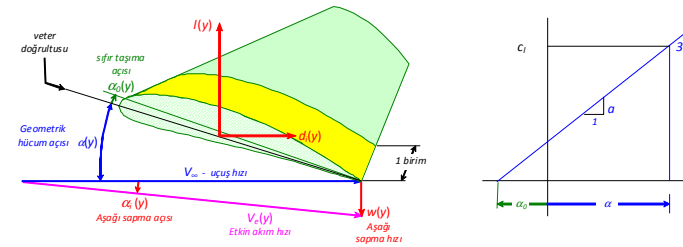
Prandtl taşıyıcı çizgi teorisinde kanadı açıklık boyunca küçük dilimlerden ibaret olarak, sanki-iki-boyutlu bir yaklaşımla, her bir dilimin iki-boyutlu bir akıma maruz gibi dikkate alınabileceğini önermiştir.

Öyle ki;

Her bir dilime gelen serbest akım kanadın uçuş doğrultusunda olmayıp, aşağı sapma hızlarıyla uçuş hızının bileşkesi olan bir etkin akım hızı doğrultusunda göz önüne alınmaktadır.

Üç boyutlu kanat için geometri-yük dağılımı ilişkisi

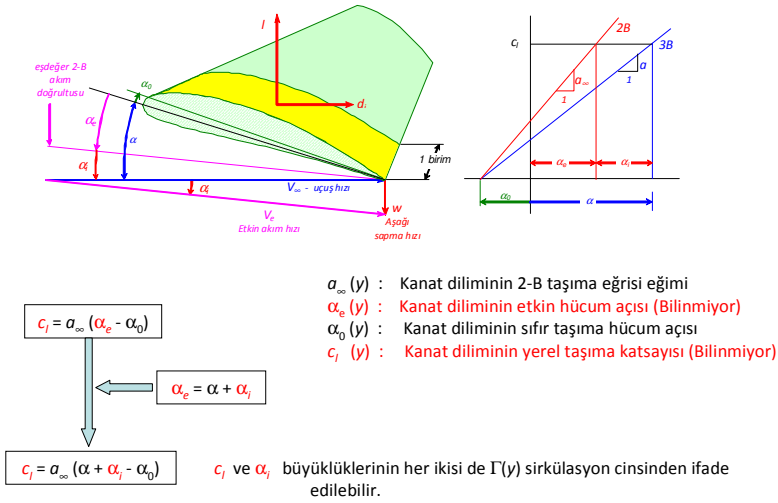
Kanadın 1 birimlik bir diliminin üç-boyutlu yerel performansı



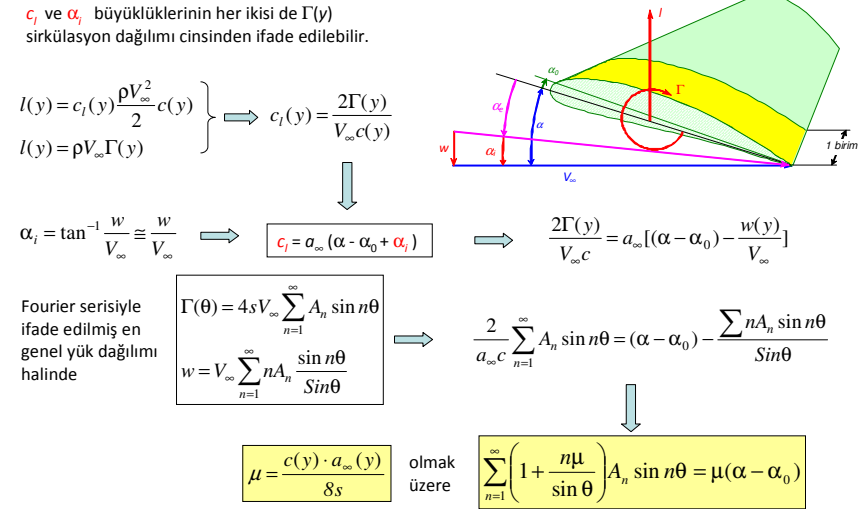
$$c_l = a (\alpha - \alpha_0)$$

- $a(y)$: Kanat diliminin 3-B taşıma eğrisi eğimi (Bilinmiyor)
- $\alpha(y)$: Kanat diliminin geometrik hücum açısı
- $\alpha_0(y)$: Kanat diliminin sıfır taşıma hücum açısı
- $c_l(y)$: Kanat diliminin yerel taşıma katsayısı (Bilinmiyor)

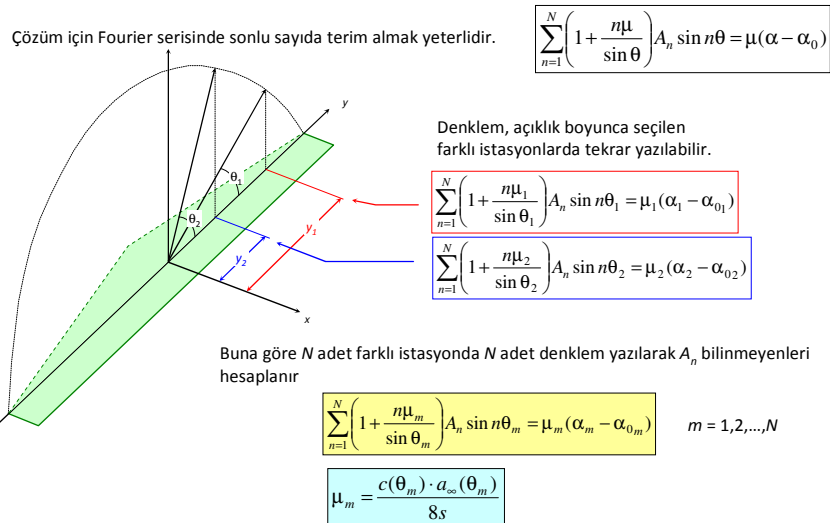
Üç boyutlu kanat için geometri-yük dağılımı ilişkisi



Üç boyutlu kanat için geometri-yük dağılımı ilişkisi

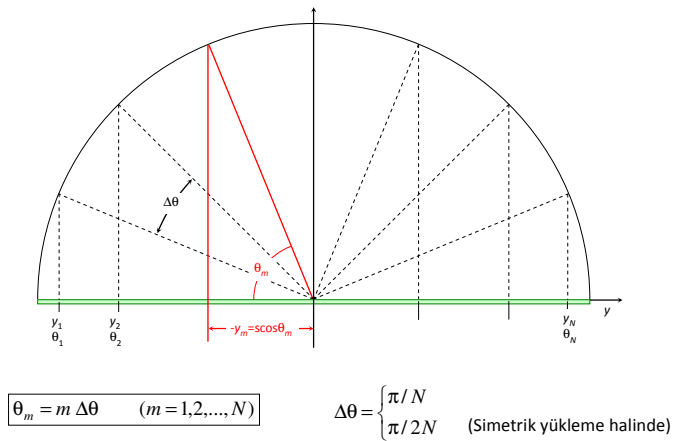


3B kanat geometri-yük dağılımı denkleminin sayısal çözümü



Sayısal çözüm için istasyonların uygun seçimi

Çözüm için açıklık boyunca istasyonların en uygun dağılımı "Cosinus" dağılımıdır.



Örnek problem

Açıklığı 10 m ve açıklık oranı 8 olan dikdörtgen üst-görünümlü bir kanadın kesit profili düz levha olduğuna göre 5° hücum açısındaki taşıma katsayısını ve indüklenmiş sürüklenme katsayısını hesaplayınız. (Yükleme simetrik olup çözüm kanadın bir yarısında, sadece 2 denklem kullanarak yapılacaktır).

Çözüm

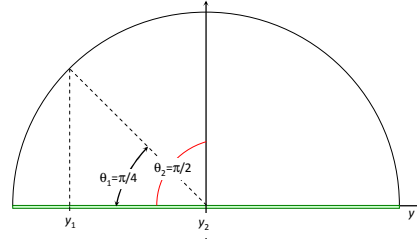
$$N = 2$$

$$\text{Simetrik yüklemeye olduğundan } \Delta\theta = \frac{\pi}{2N} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Hesap istasyonları } \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Düz levha için : } \alpha_\infty = 2\pi, \quad \alpha_0 = 0$$

$$\text{Veter uzunluğu : } c = \frac{b}{AR} = \frac{10}{8} = 1.25 \text{ m}$$



$$\mu = \frac{a_\infty c}{8s} = \frac{2\pi \times 1.25}{8 \times 5} = 0.19635$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(1 + \frac{1 \times \mu}{\sin \theta_1}\right) \sin(1 \times \theta_1) A_1 + \left(1 + \frac{3 \times \mu}{\sin \theta_1}\right) \sin(3 \times \theta_1) A_3 = \mu(\alpha - \alpha_0)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(1 + \frac{1 \times \mu}{\sin \theta_2}\right) \sin(1 \times \theta_2) A_1 + \left(1 + \frac{3 \times \mu}{\sin \theta_2}\right) \sin(3 \times \theta_2) A_3 = \mu(\alpha - \alpha_0)$$

Örnek problem

Açıklığı 10 m ve açıklık oranı 8 olan trapez üst görünümlü kanadın sivrilme oranı 0.5 olup, açıklık boyunca aynı NACA 4412 kesit profili kullanılmıştır. Kanadın 2° hücum açısındaki taşıma katsayısını ve indüklenmiş sürüklenme katsayısını hesaplayınız. (Yükleme simetrik olup çözüm kanadın bir yarısında, sadece 3 denklem kullanarak yapılacaktır).

Çözüm

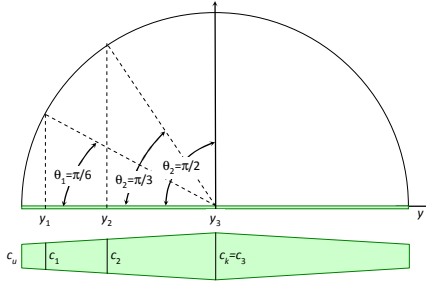
$$N = 3$$

$$\text{Simetrik yüklemeye } \Delta\theta = \frac{\pi}{2N} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Hesap istasyonları } \theta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{NACA 4412 için : } \alpha_\infty \cong 6, \quad \alpha_0 \cong -4^\circ$$

$$\text{Ortalama veter } \bar{c} = \frac{b}{AR} = \frac{10}{8} = 1.25 \text{ m}$$



$$\text{Sivrilme oranı } \frac{c_u}{c_k} = \frac{1}{2} \Rightarrow c_k = 2c_u \quad \bar{c} = \frac{c_k + c_u}{2} = \frac{2c_u + c_u}{2} = \frac{3c_u}{2} \Rightarrow c_u = \frac{2\bar{c}}{3}$$

$$\text{Veter boyları } c(y_i) = c_k + \frac{c_k - c_u}{s} y_i = 2c_u + c_u \frac{y_i}{s} = c_u (2 - \cos \theta_i) = \frac{2}{3} \bar{c} (2 - \cos \theta_i)$$

$$\mu_i = \frac{a_\infty c_i}{8s} = \frac{a_\infty}{8} \frac{2\bar{c}}{3} (2 - \cos \theta_i) = \frac{a_\infty}{6AR} (2 - \cos \theta_i)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 0.19635 \\ \alpha - \alpha_0 = (5^\circ - 0^\circ)\pi/180 = 0.08727 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(\alpha - \alpha_0) = 0.19635 \times 0.08727 = 0.01713$$

$$\theta_1 = \pi/4 \Rightarrow \left(1 + \frac{1 \times 0.19635}{\sin(\pi/4)}\right) \sin(\pi/4) A_1 + \left(1 + \frac{3 \times 0.19635}{\sin(\pi/4)}\right) \sin(3 \times \pi/4) A_3 = 0.01713$$

$$\theta_2 = \pi/2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1 \times 0.19635}{\sin(\pi/2)}\right) \sin(\pi/2) A_1 + \left(1 + \frac{3 \times 0.19635}{\sin(\pi/2)}\right) \sin(3 \times \pi/2) A_3 = 0.01713$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.90346 A_1 + 1.29616 A_3 = 0.01713 \\ 1.19635 A_1 - 1.58905 A_3 = 0.01713 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = 0.016555 \\ A_3 = 0.001681 \end{array}$$

$$\text{Taşıma katsayısı } C_L = \pi AR A_1 = \pi \times 8 \times 0.016555 = 0.41607$$

$$\text{İndüklenmiş sürüklenme katsayısı } C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \left[1 + \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2\right] = \frac{(0.41607)^2}{\pi \times 8} \left[1 + \left(\frac{0.001681}{0.016555}\right)^2\right] = 0.00696$$

$$\mu_i = \frac{a_\infty}{6AR} (2 - \cos \theta_i) \Rightarrow \mu_i (\alpha - \alpha_0) = \frac{6}{6 \times 8} [2^\circ - (-4^\circ)] \frac{\pi}{180} (2 - \cos \theta_i) = \frac{\pi}{240} (2 - \cos \theta_i)$$

Denklemler

$$\theta_1 = \pi/6 \Rightarrow \left(1 + \frac{1 \times \mu_1}{\sin \theta_1}\right) \sin(1 \times \theta_1) A_1 + \left(1 + \frac{3 \times \mu_1}{\sin \theta_1}\right) \sin(3 \times \theta_1) A_3 + \left(1 + \frac{5 \times \mu_1}{\sin \theta_1}\right) \sin(5 \times \theta_1) A_5 = \mu_1 (\alpha - \alpha_0)$$

$$\theta_2 = \pi/3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1 \times \mu_2}{\sin \theta_2}\right) \sin(1 \times \theta_2) A_1 + \left(1 + \frac{3 \times \mu_2}{\sin \theta_2}\right) \sin(3 \times \theta_2) A_3 + \left(1 + \frac{5 \times \mu_2}{\sin \theta_2}\right) \sin(5 \times \theta_2) A_5 = \mu_2 (\alpha - \alpha_0)$$

$$\theta_3 = \pi/2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1 \times \mu_3}{\sin \theta_3}\right) \sin(1 \times \theta_3) A_1 + \left(1 + \frac{3 \times \mu_3}{\sin \theta_3}\right) \sin(3 \times \theta_3) A_3 + \left(1 + \frac{5 \times \mu_3}{\sin \theta_3}\right) \sin(5 \times \theta_3) A_5 = \mu_3 (\alpha - \alpha_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.6417 A_1 + 1.8505 A_3 + 1.2087 A_5 = 0.0148 \\ 1.0535 A_1 + 0.0000 A_3 - 1.8035 A_5 = 0.0196 \\ 1.2500 A_1 - 1.7500 A_3 + 2.2500 A_5 = 0.0262 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = 0.020099 \\ A_3 = 0.000494 \\ A_5 = 0.000854 \end{array}$$

$$\text{Taşıma katsayısı } C_L = \pi AR A_1 = \pi \times 8 \times 0.020099 = 0.5051$$

$$\delta = (A_3/A_1)^2 + (A_5/A_1)^2 = (0.000494/0.020099)^2 + (0.000854/0.020099)^2 = 0.002409$$

$$\text{İndüklenmiş sürüklenme katsayısı } C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR} [1 + \delta] = \frac{(0.5051)^2}{\pi \times 8} [1 + 0.002409] = 0.01022$$

Minimum Sürüklenme İçin Yük Dağılımı, Eliptik Üst-görünümlü Kanat

Genel yük dağılımı için $C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)$ $\delta = 2 \frac{A_2^2}{A_1^2} + 3 \frac{A_3^2}{A_1^2} + 4 \frac{A_4^2}{A_1^2} + \dots$

Minimum sürüklenme için $\delta = 0 \implies A_2 = A_3 = A_4 = \dots \equiv 0$

Minimum sürüklenme için yük dağılımı $\Gamma = 4sV_\infty A_1 \sin \theta$ Eliptik yük dağılımıdır

Geometri-yük dağılımı denklemi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n\mu}{\sin \theta} \right) A_n \sin n\theta = \mu(\alpha - \alpha_0)$

Eliptik yük dağılımı için $\left(1 + \frac{\mu}{\sin \theta} \right) A_1 \sin \theta = \mu(\alpha - \alpha_0) \implies A_1 = \frac{\mu}{\sin \theta + \mu} (\alpha - \alpha_0)$

Minimum Sürüklenme İçin Yük Dağılımı, Eliptik Üst-görünümlü Kanat

Eliptik yük dağılımı için açıklık boyunca $\alpha_i = Sb$
Kanat burulmamışsa açıklık boyunca $\alpha = Sb$
Kesit profilleri aynıysa açıklık boyunca $\alpha_0 = Sb, a_\infty = Sb$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i = Sb \\ \alpha = Sb \\ \alpha_0 = Sb, a_\infty = Sb \end{array} \right\} \alpha_e = \alpha - \alpha_0 - \alpha_i = Sb \implies c_l = Sb$$

Kesit lokal taşınması $l = \rho V_\infty \Gamma = c_l \rho V_\infty^2 c \implies c = \frac{2\Gamma}{c_l V_\infty} = \frac{8sA_1}{c_l} \sin \theta$

$c_l = Sb$ olduğu için $\frac{8sA_1}{c_l} = Sb = c_0 \implies c = c_0 \sin \theta$ Eliptik veter dağılımı

Buna göre;

- açıklık boyunca kesit profilleri aynı olan (aerodinamik burulmasız)
- burulmamış (geometrik burulmasız)
- üst görünümü eliptik olan

bir kanat üzerindeki yük dağılımı eliptiktir.

Minimum Sürüklenme İçin Yük Dağılımı, Eliptik Üst-görünümlü Kanat

Eliptik veter dağılımı için $c = c_0 \sin \theta \implies \mu = \frac{a_\infty c}{8s} = \frac{a_\infty c_0 \sin \theta}{8s} = \mu_0 \sin \theta$

Eliptik yük dağılımı için $A_1 = \frac{\mu}{\sin \theta + \mu} (\alpha - \alpha_0) \implies A_1 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (\alpha - \alpha_0)$

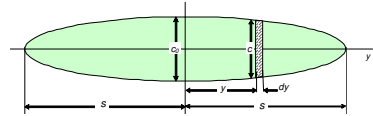
$S = \int_{-s}^{+s} c(y) dy = c_0 \int_{-s}^{+s} \sqrt{1 - (y/s)^2} dy = c_0 s \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta$

$S = \frac{c_0 s}{2} \pi = \frac{(2s)^2}{AR} \implies \frac{c_0}{s} = \frac{8}{\pi AR}$

$\mu_0 = \frac{a_\infty c_0}{8s} = \frac{a_\infty}{\pi AR} \implies A_1 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (\alpha - \alpha_0) = \frac{\pi AR}{1 + \frac{a_\infty}{\pi AR}} (\alpha - \alpha_0)$

Sonlu kanadın taşıma katsayısı $C_L = \pi AR A_1 = \frac{a_\infty}{1 + \frac{a_\infty}{\pi AR}} (\alpha - \alpha_0)$

$C_L = a(\alpha - \alpha_0) \implies$ Taşıma eğrisi eğimi $a = \frac{C_L}{\alpha - \alpha_0} \implies a = \frac{a_\infty}{1 + \frac{a_\infty}{\pi AR}}$



Örnek problem

Açıklığı 10 m ve açıklık oranı 8 olan eliptik üst-görünümlü burulmamış bir kanadın kesit profili düz levha olduğuna göre simetrik yük halinde 5° hücum açısındaki taşıma katsayısını ve indüklenmiş sürüklenme katsayısını hesaplayınız.

Çözüm

Bu kanat için yük dağılımı eliptik olup taşıma eğrisi eğimi $a = \frac{a_\infty}{1 + a_\infty / (\pi AR)}$

Düz levha için : $a_\infty = 2\pi, \alpha_0 = 0 \implies a = \frac{2\pi}{1 + 2\pi / (\pi AR)} = \frac{2\pi AR}{AR + 2} = \frac{2\pi \times 8}{8 + 2} = 1.6\pi$

Taşıma Katsayısı $C_L = a(\alpha - \alpha_0) = 1.6\pi(5^\circ - 0^\circ) = \frac{\pi}{180} \times \frac{2}{45} \pi^2 = \boxed{0.4386}$

İndüklenmiş sürüklenme Katsayısı $C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR} = \frac{(0.4386)^2}{\pi \times 8} = \boxed{0.00766}$

Eliptik Üst-görünümlü Olmayan Herhangi Bir Kanat İçin Uygun Yük Dağılımı

Kesit lokal taşıması $l = \rho V_\infty \Gamma = c_l \rho V_\infty^2 c \implies \Gamma = \frac{1}{2} V_\infty c_l c$

Kesit taşıma katsayısı $c_l = a_\infty [(\alpha - \alpha_0) - \alpha_i] \implies \Gamma \propto a_\infty [(\alpha - \alpha_0) - \alpha_i] c$

Kanat üzerinde eliptik yük dağılımına yakın bir yük dağılımı elde etmek için

Kanat üst görünümü (veter dağılımı) üzerinde ayarlama yapılabilir: $c = c(y)$

Açıklık boyunca kesit profili değiştirilebilir (aerodinamik burulma): $a_\infty = a_\infty(y) \quad \alpha_0 = \alpha_0(y)$

Kanat burulabilir (geometrik burulma) : $\alpha = \alpha(y)$

$\Gamma(y) = \frac{1}{2} V_\infty a_\infty(y) [\alpha(y) - \alpha_0(y) - \alpha_i] c(y) \xrightarrow{\text{Uygun seçimler halinde}} \Gamma(y) \approx \Gamma_0 \sqrt{1 - (y/s)^2}$