

### Ek-8.1- Bir Tekillik Yüzeyinin İndüklemeleri

$z$  kompleks düzleminde herhangi bir  $z_0$  noktasında yer alan  $\sigma$  şiddetindeki bir kaynakla  $\gamma$  şiddetinde ve saat ibreleri yönündeki bir girdabın herhangi bir  $z$  noktasında indükleyecekleri kompleks eşlenik hızların sırasıyla

$$w^*(z) = \frac{\sigma}{2\pi(z-z_0)} \quad w^*(z) = \frac{i\gamma}{2\pi(z-z_0)}$$

şeklinindedir. Bu ifadelerin  $z \rightarrow z_0$  için tekillik gösterdiği kolaylıkla görülmektedir. Bu nedenle literatürde kaynak ve girdabın çoğu zaman birer tekillik olarak adlandırılması alışıl gelmiştir.

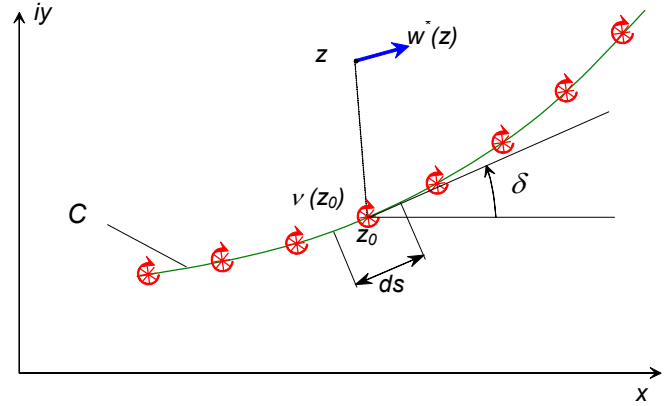
Yukarıdaki bağıntılar kısaca aşağıdaki gibi birleştirilebilir:

$$w^*(z) = \frac{v}{2\pi(z-z_0)} \quad (v = \sigma + i\gamma)$$

Bir  $C$  eğrisi boyunca şiddeti,

$$v(z_0) = \sigma(z_0) + i\gamma(z_0)$$

şeklinde değişen bir tekillik dağılımı bulunduğunu düşünelim. Bu  $C$  eğrisini, üzerinde yer alan tekillikler nedeniyle "tekillik çizgisi", veya gerçekte iki-boyutlu bir olayı temsil etmekte kullanılacağı için akım alanının bir derinliği de bulunduğunu düşünerek "tekillik yüzeyi" adını vermek mümkündür.



Belirtilen tekillik dağılımının herhangi bir  $z$  noktasında indükleyeceği eşlenik hız için

$$w^*(z) = \int_C \frac{v(z_0)}{2\pi(z-z_0)} ds$$

şeklinde bir integral ifadesi yazmak mümkündür. Buradaki  $ds$  yay eleman uzunluğu, aynı noktada eğrinin teğetinin reel eksenle yaptığı açı  $\delta$  olmak üzere yay elemanının kompleks ifadesine

$$ds = dz_0 \cdot t^*(z_0) \quad (t = e^{i\delta})$$

şeklinde bağlanabilir. Böylece bağıntı

$$w^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{v(z_0) \cdot t^*(z_0)}{z-z_0} dz_0$$

şekline getirilebilir.

Yüzey tekillikleri esaslı yöntemlerde bir katı yüzey üzerindeki sınır şartının uygulamasına ilişkin olarak bir tekillik yüzeyinin kendi üzerindeki noktalarda yarattığı indüklemelerin incelenmesi

önem kazanır. Bu indüklemeler, eğri dışındaki  $z$  indüklemeye noktası  $C$  eğrisi üzerinde  $\mu$  ile belirtilen bir noktaya yaklaştırılarak limit alınmak suretiyle hesaplanabilir:

$$\lim_{z \rightarrow \mu} w^*(z) = \lim_{z \rightarrow \mu} \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{v(z_0) \cdot t^*(z_0)}{z - z_0} dz_0$$

Bu son ifadede,  $C$  eğrisi boyunca integrasyon alınırken  $z_0 \rightarrow \mu$  için bir tekillik görülmekte olup, bu nokta civarındaki integralin özel olarak incelenmesi gerekmektedir.

İntegralde tekillik yaratan noktayı izole etmek amacıyla  $C$  eğrisi iki bölgeye ayrılabilir. Böylece şekilde görüldüğü gibi  $\mu$  tekillik noktasından  $\varepsilon$  kadar ileride ve  $\varepsilon$  kadar geride iki nokta alınarak integral bu iki nokta arasındaki  $C_1$  bölgesinde ayrı, bunun dışındaki  $C_2$  bölgesinde ayrı tanımlanabilir.

Böylece bir limit işlemiyle,  $z \rightarrow \mu$  ve  $\varepsilon \rightarrow 0$  olmak üzere bu integral

$$w^*(\mu) = \lim_{\substack{z \rightarrow \mu \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \frac{v(z_0) \cdot t^*(z_0)}{z - z_0} dz_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \frac{v(z_0) \cdot t^*(z_0)}{z - z_0} dz_0 \right]$$

şeklinde düzenlenebilir.

İntegralin  $C_2$  bölgesinde hesaplanan ikinci kısmında herhangi bir tekillik söz konusu olmayıp bu kısım sembolik olarak  $I_2$  şeklinde gösterilirse; ayrıca  $\varepsilon \rightarrow 0$  limit halinde  $C_1$  bölgesi içerisinde kalan sonsuz kısa yay parçasının bir doğru parçası gibi düşünülebileceği ve üzerindeki tekillik şiddetinin de değişmeyeceği kabul edilirse yukarıdaki bağıntı

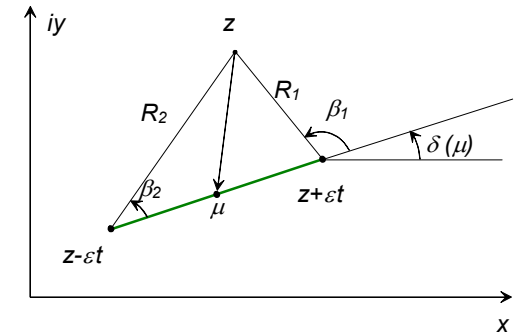
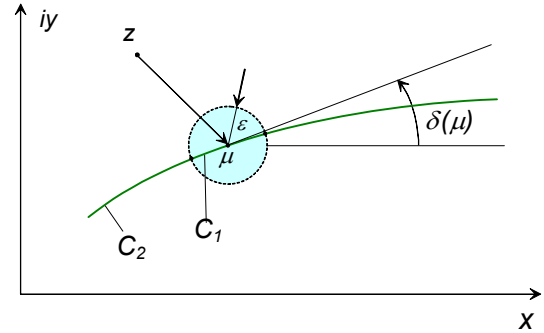
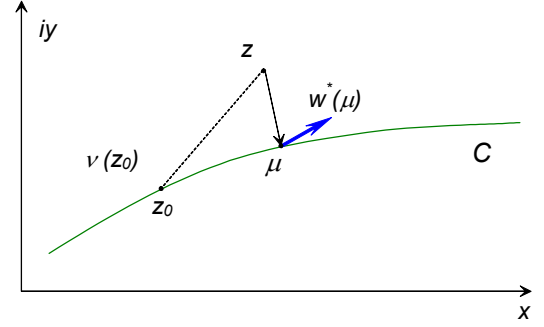
$$w^*(\mu) = \frac{1}{2\pi} v(\mu) \cdot t^*(\mu) \cdot \lim_{\substack{z \rightarrow \mu \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[ \int_{C_1} \frac{dz_0}{z - z_0} \right] + I_2$$

şekline getirilebilir.

Buradaki ilk terimde geçen integral  $I_1$  ile gösterilirse, yandaki şekil yardımıyla

$$I_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow \mu \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[ \int_{\mu - \varepsilon t}^{\mu + \varepsilon t} \frac{dz_0}{z - z_0} \right]$$

$$I_1 = -\lim_{\substack{z \rightarrow \mu \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[ \text{Ln} \frac{z - (z + \varepsilon t)}{z - (z - \varepsilon t)} \right]$$



$$I_1 = -\lim_{\substack{z \rightarrow \mu \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[ \text{Ln} \frac{R_1 \cdot e^{i(\beta_1 + \delta)}}{R_2 \cdot e^{i(\beta_2 + \delta)}} \right] = -\lim_{\substack{z \rightarrow \mu \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[ \text{Ln} \frac{R_1}{R_2} + i(\beta_1 - \beta_2) \right]$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada  $z \rightarrow \mu$  limit halinde  $R_1 = R_2$  olduğu ve böylece logaritmik terimin sifıra gittiği açıktır. Ancak  $(\beta_1 - \beta_2)$  farkı  $z$  noktasının  $\mu$  noktasına ne taraftan yaklaştırıldığına bağlıdır.

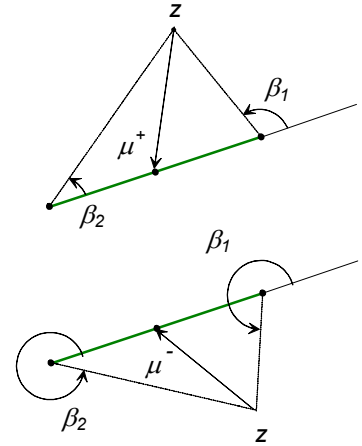
Şekilde olası her iki durum da ele alınmış olup, bu şekillere göre noktaya üstten yaklaşılması halinde ve alttan yaklaşılması halinde sırasıyla

$$I_1^+ = -i\pi, \quad I_1^- = i\pi$$

olacağı görülmektedir. Böylece

$$w^*(\mu^+) = -\frac{i}{2} v(\mu) \cdot t^*(\mu) + I_2$$

$$w^*(\mu^-) = \frac{i}{2} v(\mu) \cdot t^*(\mu) + I_2$$



elde edilir. Bu iki bağıntının farkı alınarak tekillik yüzeyi üzerindeki bir noktada üst ve alt taraftaki hızlar arasındaki fark

$$w^*(\mu^+) - w^*(\mu^-) = -i v(\mu) \cdot t^*(\mu)$$

olarak bulunur. Çoğu zaman bu hızın tekillik yüzeyine teğet ve dik bileşenlerinin bilinmesi daha çok ilgi çeker. Nitekim şekilde görülen teğet-normal düzleminde hızlar arasındaki fark

$$\begin{aligned} w_m^*(\mu^+) - w_m^*(\mu^-) &= [w^*(\mu^+) - w^*(\mu^-)] \cdot t(\mu) \\ &= -i v(\mu) \cdot t^*(\mu) \cdot t(\mu) \\ &= -i v(\mu) \end{aligned}$$

veya reel ve imajiner kısımlara ayrılarak teğetsel ve normal hızlar arasındaki farklar

$$\begin{aligned} (v_t^+ - i v_n^+) - (v_t^- - i v_n^-) &= -i v = -i \cdot (\sigma + i\gamma) \\ &= \gamma - i\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_t^+ - v_t^- &= \gamma \\ v_n^+ - v_n^- &= \sigma \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Elde edilen sonuç son derece önemli olup tekillik yüzeyinin üst ve altındaki teğetsel hızlar arasındaki farkın girdap şiddetine dikey hızlar arasındaki farkın ise kaynak şiddetine eşit olduğunu göstermektedir.

