

# **BÖLÜM 1**

## **VİSKOZ AKIŞLARA GİRİŞ**

- 1.1- Viskoz olayların önemi
- 1.2- Akışkan-katı sınırındaki şartlar
- 1.3- Laminer transport olayları
- 1.4- Akışkanın kinematik özellikleri
- 1.5- Navier-Stokes denklemleri
- 1.6- Enerji denklemi
- 1.7- Genel denklemlerin bilançosu

## BÖLÜM 1- GİRİŞ

### 1.1. Viskoz olayların önemi

#### Akışkanı yöneten temel denklemler:

##### A- İntegral biçimde

Süreklilik	$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV + \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$
Momentum	$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dV) \cdot \vec{V} + \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} = - \iint_S p \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \rho \cdot \vec{f} \cdot dV + \vec{F}_{visc}$
Enerji	$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) \cdot dV + \iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS) \cdot \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) =$ $- \iint_S (p \cdot \vec{n} dS) \cdot \vec{V} + \iiint_V (\vec{f} \cdot \rho \cdot dV) \cdot \vec{V} + \iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dV + \dot{W}_{visc} + \dot{Q}_{visc}$

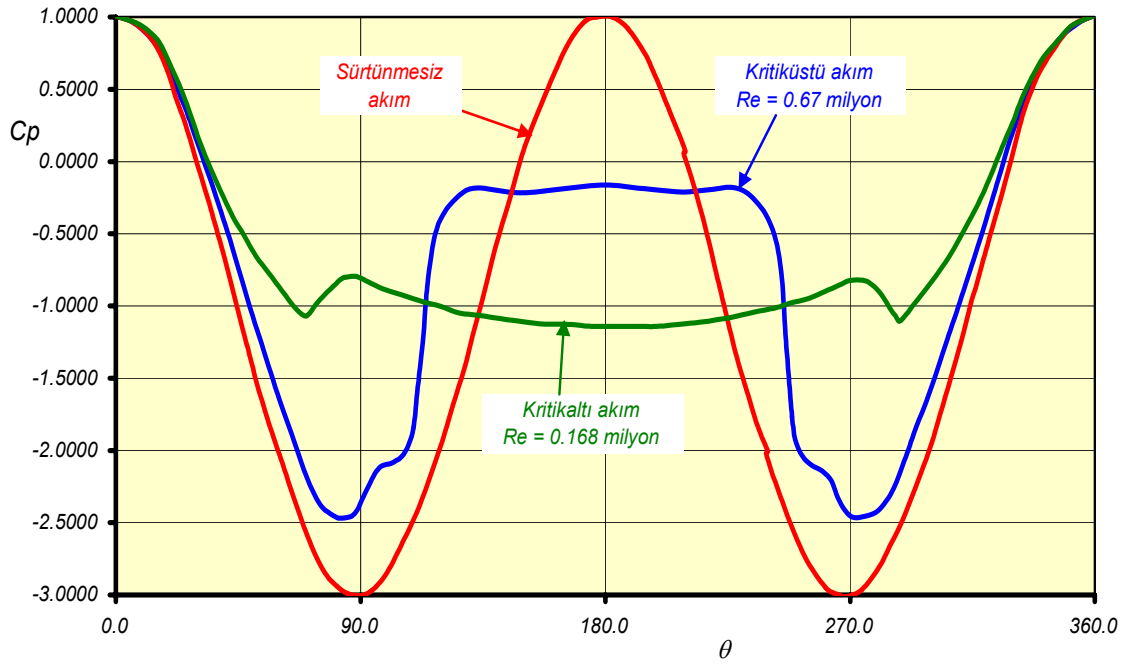
##### B- Diferansiyel biçimde

Süreklilik	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$
Momentum	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot f_x + f_{x-visc}$ $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot f_y + f_{y-visc}$ $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} w) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot f_z + f_{z-visc}$	$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot f_x + f_{x-visc}$ $\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot f_y + f_{y-visc}$ $\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot f_z + f_{z-visc}$
Enerji	$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \cdot \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] + \nabla \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) \vec{V} \right] = -\nabla(p\vec{V}) + \rho \vec{f} \vec{V} + \rho \dot{q} + \dot{w}_{visc} + \dot{q}_{visc}$	

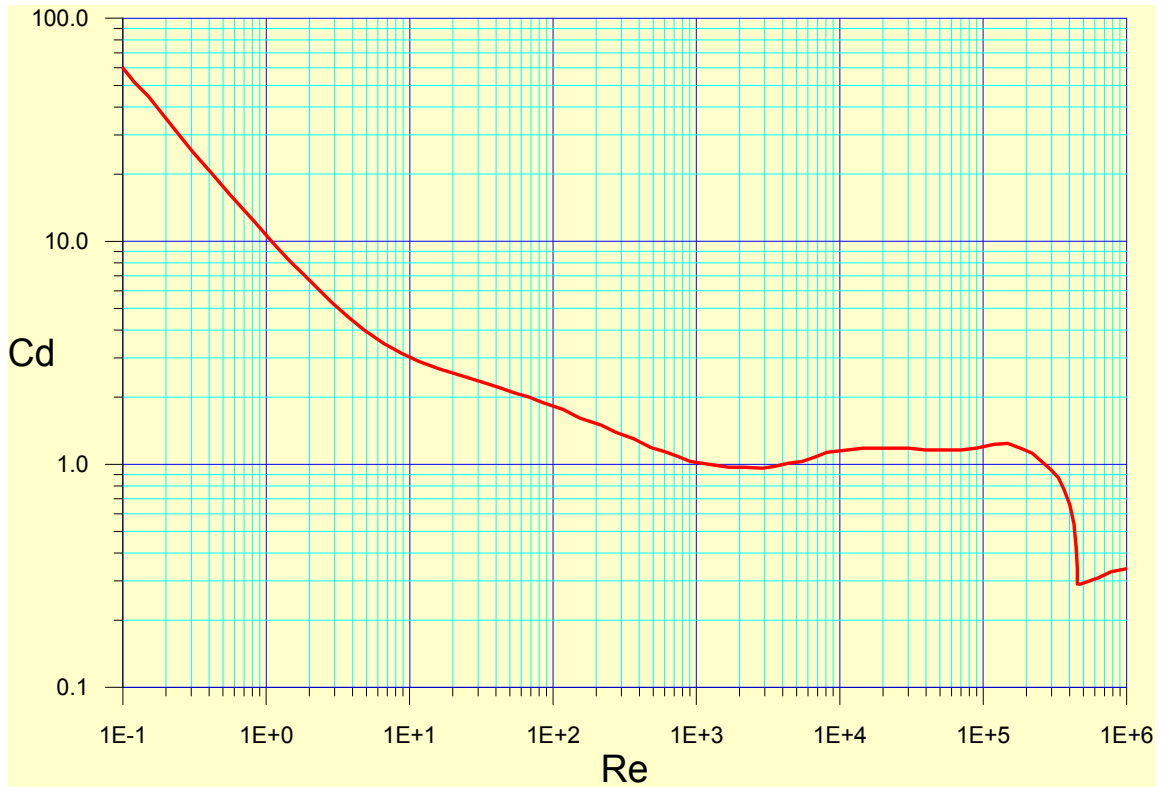
Akışkan hareketini yöneten denklemler içerisinde bazı terimler vardır ki bunlar viskozitenin etkisini temsil ederler.

Bazı hallerde bu terimler ihmal edilerek viskoz-olmayan akım modeli ile çözümlenmeler yapılır.

## DAİRESEL SİLİNDİR ETRAFINDAKİ AKIM

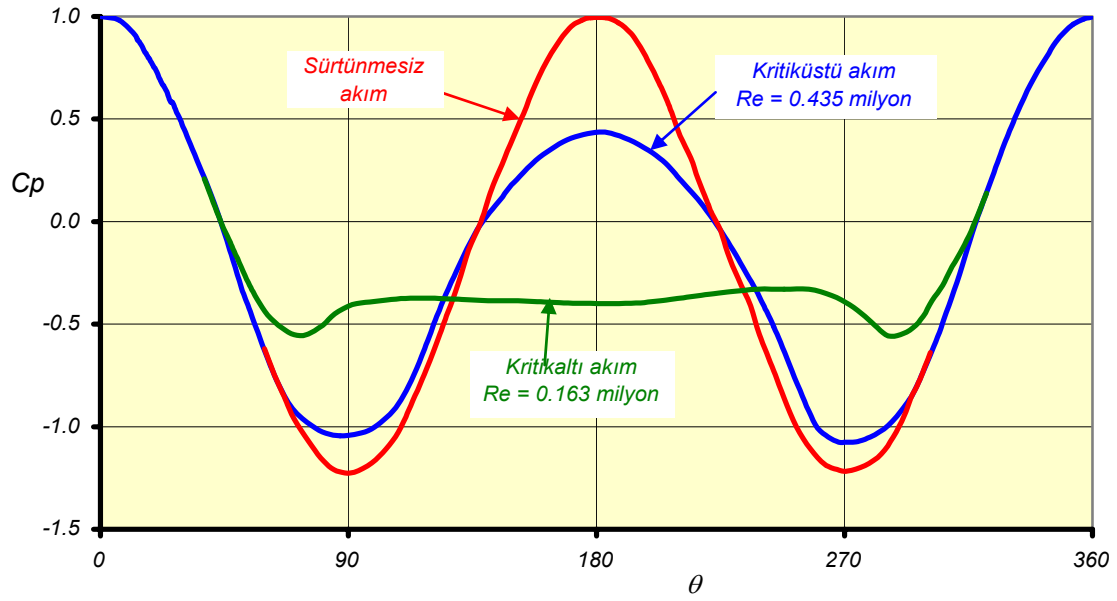


Basınç dağılımı

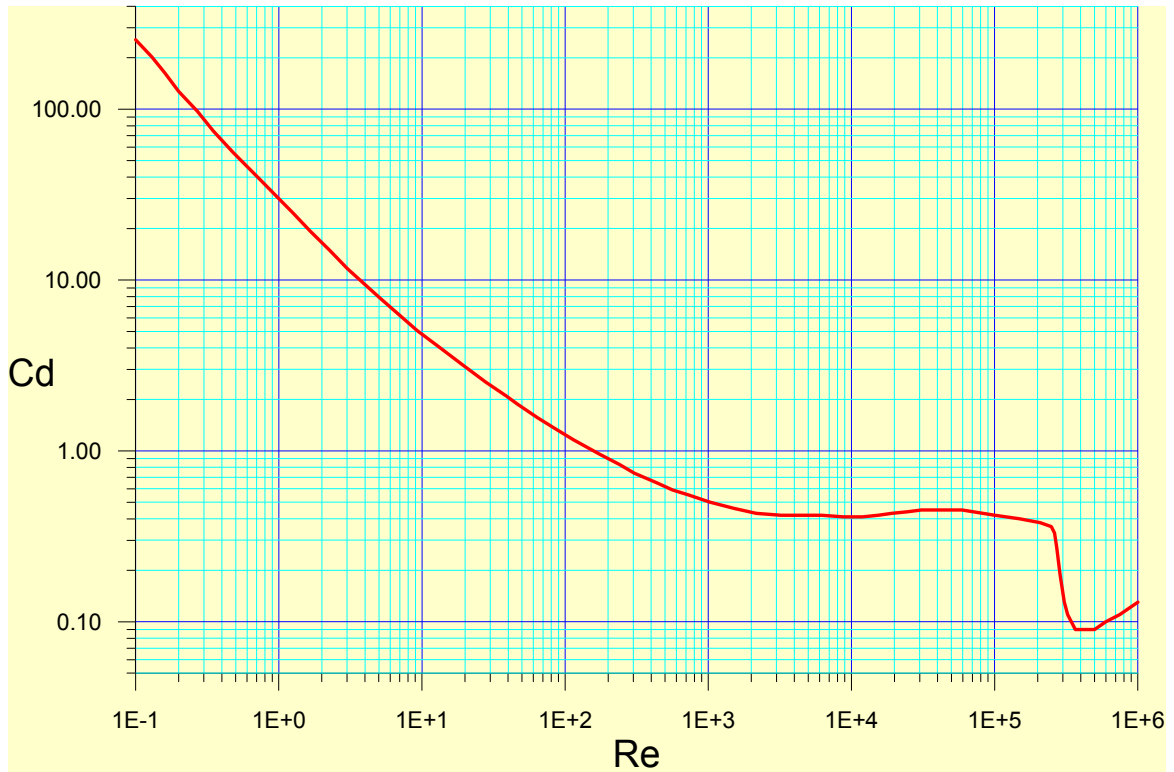


Sürüklenme katsayısının  $Re$  sayısı ile değişimi

## KÜRE ETRAFINDAKİ AKIM

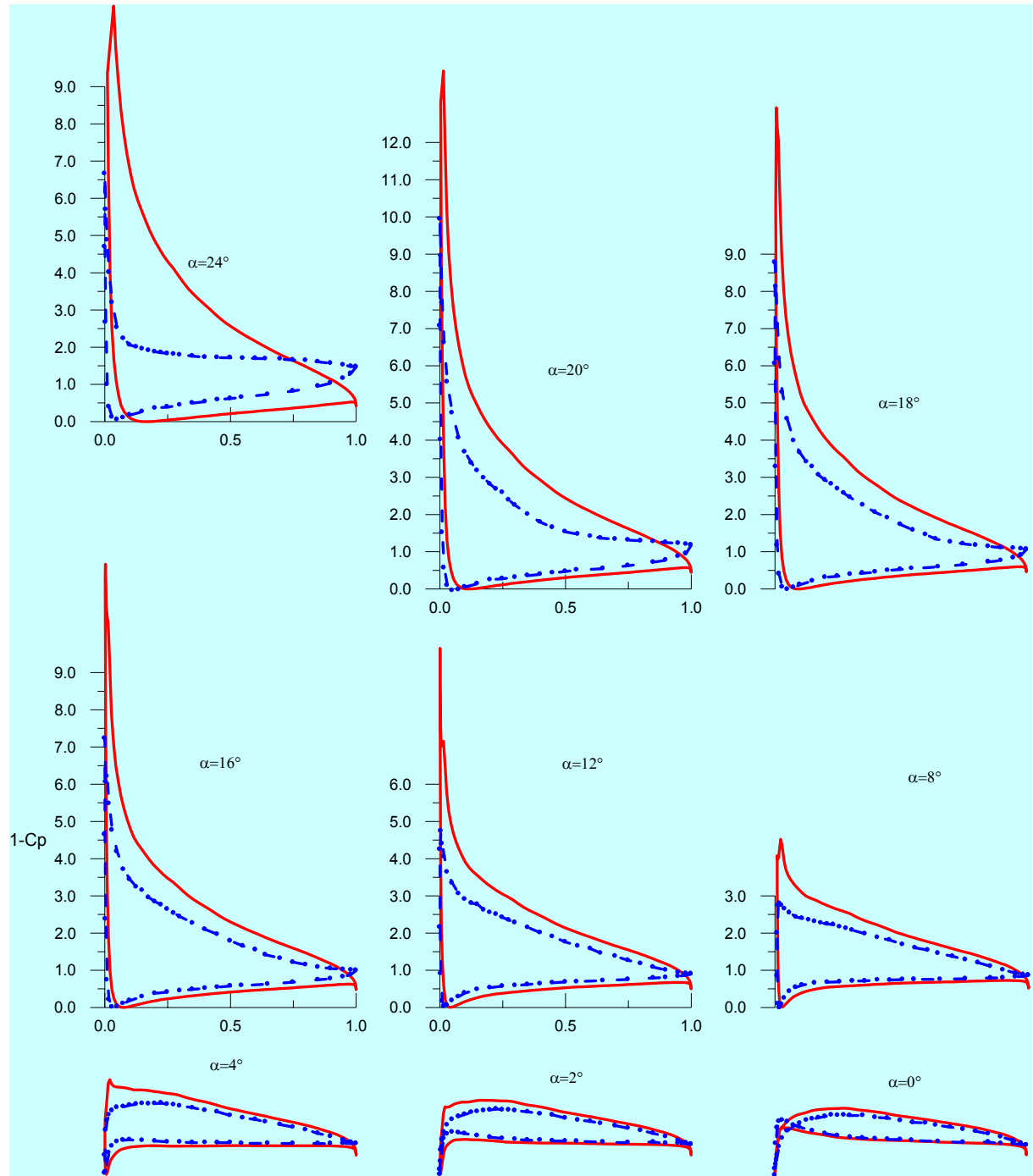


Basınç dağılımı



Sürüklenme katsayısının Re sayısı ile değişimi

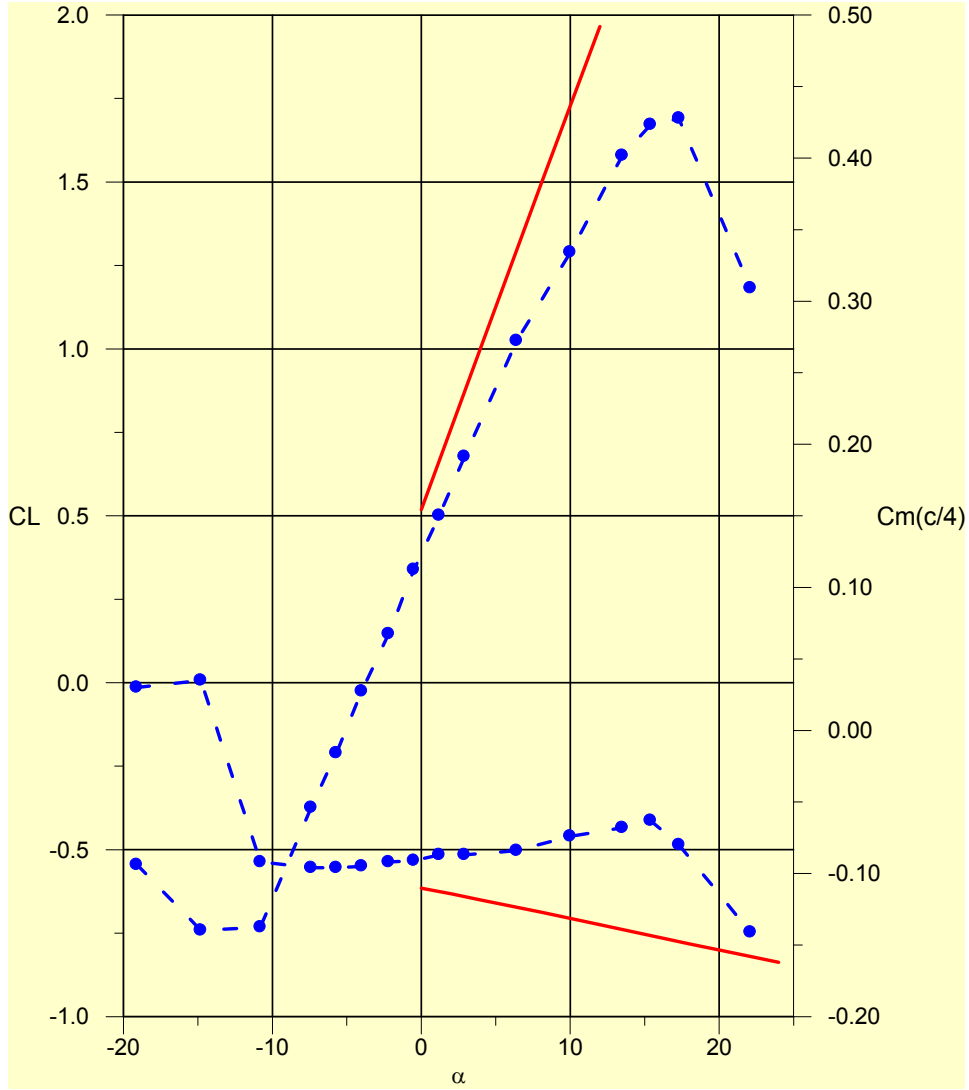
### KANAT PROFİLİ ETRAFINDAKİ AKIM



NACA 4412 profilinin

deneysel (Pinkerton, NACA Rep. No:563, Re=3,100,000)

ve teorik (CPM) basınç dağılımları



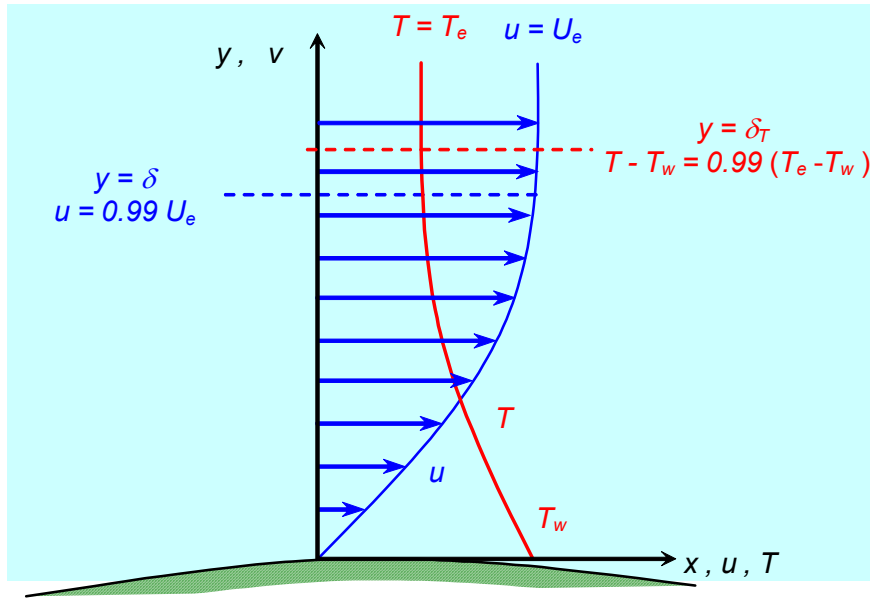
NACA 4412 profilinin deneysel (Pinkerton, NACA TR No:563,  $Re=3,100,00$ )  
ve teorik (CPM) karakteristikleri

## 1.2. Akışkan-katı sınırındaki şartlar

Atmosferin en dış tabakasındaki hayli seyrelmiş hava gibi az sayıdaki istisnalar dışında akışkan ortamı süreklilik ortam olarak kabul edilmektedir.

Bir yüzey makine ile son derece düzgün işlenmiş bile olsa, moleküler ölçekte bakıldığında pürüzlü bir araziye benzer. Yüzey yakınından geçen moleküller yüzeydeki girinti-çukurluklara ve diğer moleküllere çarparak momentumlarının ve ısı enerjilerinin bir kısmını yüzeye paylaşırlar. Tecrübeler ve analitik incelemeler göstermiştir ki, "yüzey üzerinde akışkan yüzeye etkileşim sonucu bütün momentumunu kaybederek yüzeye aynı hıza ve sıcaklığa gelir" şeklindeki bir kabul fiziksel durumun uygun bir şekilde temsilini sağlamaktadır.

Bu kabuller çerçevesinde, katı cidar üzerindeki viskoz bölgede hız ve sıcaklık profilleri aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 1.1- Katı yüzey üzerinde hız ve sıcaklık dağılımı

Yüzey üzerinde akım hızı sıfırdır (sıfır-kayma koşulu). Yüzeyden uzak mesafelerdeki hız serbest akım hızına ve cismin şekline bağlı olarak belli bir  $U_e$  değeri olacaktır. Viskoz bölgedeki hız, akışkan tabakaları arasındaki sürtünmelere bağlı olarak 0 ile  $U_e$  değerleri arasında düzgün bir değişim gösterecek, hız profili  $U_e$  değerine asimptotik olarak erişecektir. Bir katı cidar üzerindeki viskoz tabakanın kalınlığı  $U_e$  hızının %99'una erişildiği noktayla tanımlanır.

Sıcaklık profili de duvar üzerindeki  $T_w$  değerinden ısı sınır tabakanın kenar noktasındaki  $T_e$  değerine kadar değişir. Isıl tabakanın  $\delta_T$  kalınlığı sıcaklığın  $T - T_w = 0.99(T_e - T_w)$  olduğu yer ile tanımlanır.

Isıl sınır tabaka kalınlığı ile viskoz sınır tabaka kalınlığının aynı olması gerekmediği belirtilmelidir.

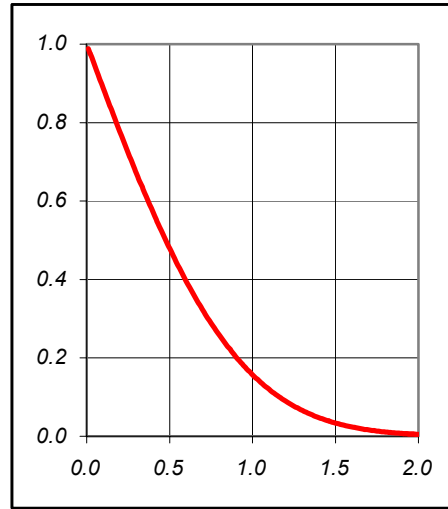
### 1.3. Laminer transport olayları

Bir masa üzerinde üst üste duran oyun kartlarından en üstteki bir kısmının bir yönde aniden itildiğini varsayalım. Kartlar arasındaki sürtünme kartların çoğunun, **alt taraftakiler daha küçük miktarda olmak üzere** aynı yönde hareket etmesine neden olacaktır.

Bu olay, en üstteki karta etkitilen itmenin kartlar arasındaki sürtünme nedeniyle bir karttan diğerine iletilerek yayılması (difüzyon) olayı olarak nitelendirilebilir.

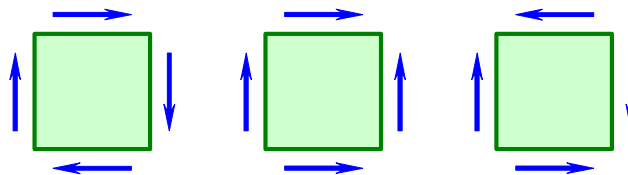
Bu kartlarla benzeştirilen bir viskoz akım, tabakalar yer değiştirmedeği için "laminer sınır tabaka akımı" olarak adlandırılır. Laminer akımda difüzyon olayı *Stokes problemi* olarak da adlandırılan "**aniden hareket ettirilen sonsuz geniş levha üzerindeki viskoz akım**" problemi ile örneklenebilir

#### ANİDEN HAREKET ETTİRİLEN SONSUZ GENİŞ LEVHA ÜZERİNDEKİ AKIM



Bir akışkan akımı içerisindeki viskozite etkisinin matematiksel modeli bazı fiziksel gerçekler dikkate alınarak kaydıyla oluşturulabilir.

Akışkan *statik halde* ve *basit bir yer değiştirme* ile gerilmeye maruz kalmaz. Bir katı cisim çekme altında uzar, baskı altında kısalır. Böylece bir iç gerilme oluşur. Uzama veya kısalmayı sağlayan yük ortadan kaldırılınca eski haline döner ve gerilmeler de ortadan kalkar. Yani katı cisim içindeki yer değiştirmeler gerilme yaratır. Oysa akışkan böyle bir basit yer değiştirmeye maruz bırakılırsa yeni konumunda yine gerilmeler kalmaz. **Akışkanda gerilmenin nedeni konum değil ama akışkan zerrelerinin birbirine göre hareketidir. Dolayısıyla gerilme olabilmesi için öncelikle akışkanın hareketli olması gerekir.** Ama bu da yeterli olmayıp hareketli bölgede hız farklılıkları olması gerekir. Ne kadar büyük hız farklılığı varsa gerilme de o kadar büyük olur.



Akışkan içinde teğetsel kuvvetler



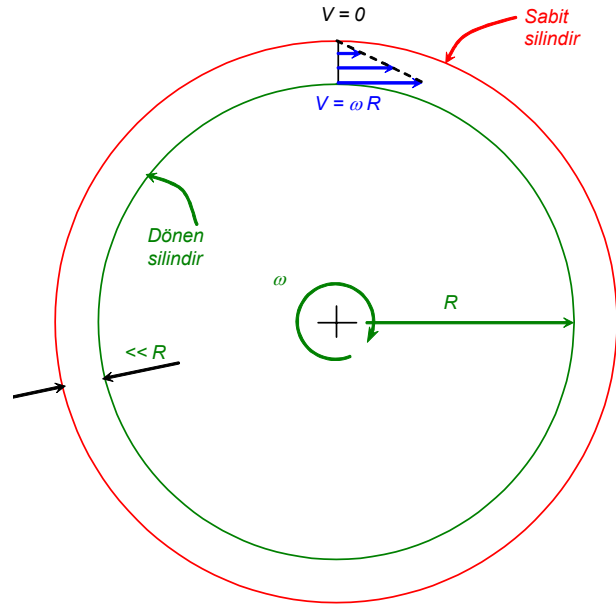
Viskoz gerilme ile hız farklılıkları arasında en basit halde  $\tau \approx \partial V / \partial n$  (1.1)

şeklinde bir ilişki kurulabilir. Burada  $n$  büyüklüğü gerilme doğrultusuna dik doğrultuyu belirtmekte olup gerilmenin *birinci mertebeden hız gradyantına* bağlı olduğu kabulü yapılmıştır. Genel halde daha yüksek mertebeden değişimlerin de ( $\partial^2 V / \partial n^2$ ) gerilme ile ilişkisi vardır. Ancak Newtonien olarak nitelendirilen akışkanlarda bu ilişki ihmal edilebilir.

Yukarıdaki bağıntının uygunluğu "*viskozite-ölçer*" adı verilen basit bir cihazla ölçülebilir. Bu cihaz iç içe iki silindirden oluşur. Dıştaki silindir hareketsiz iken içteki silindir döndürülebilir. Silindirler arasındaki aralık çok dar olup, bu arada viskozitesi ölçülecek olan akışkan yer almaktadır.

Katı yüzey üzerindeki "*kaymama sınır şartı*" nedeniyle, sabit silindirle temas ettiği bölgede akışkan zerreleri sıfır hızda iken hareketli silindirle temas ettiği bölgede bu silindirle aynı hıza sahip olacaktır.

Bu durumda silindirler arasındaki akışkan lineer bir hız dağılımına sahip olup, sürtünmeyle ilişkili gerilme dağılımı silindiri döndürmek için uygulanan kuvvet yardımıyla hesaplanır. Hava, su ve benzeri gibi çoğu bilinen akışkan için



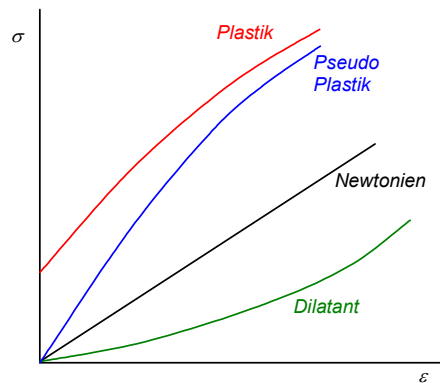
Şekil 1.2- Viskozite-ölçer

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{Stokes kanunu} \quad (1.2)$$

şeklinde bir bağıntı bulunmuştur. Buradaki  $\mu$  orantı katsayısı "*laminer viskozite katsayısı*" olarak adlandırılır. Bu büyüklük akışkanın fiziksel bir özelliğidir.

Stokes kanununa uyan akışkanlar "*Newtonien akışkan*" olarak, uymayanlar ise "*non-Newtonien akışkan*" olarak nitelendirilir. Polimer gibi non-Newtonien akışkanlarda gerilme şekil değiştirme hızına bağlıdır. Bazı non-Newtonien akışkanlarının tipik gerilme-şekil değiştirme hızı eğrileri şekilde görülmektedir.

Newtonien akışkanlar için deneyler göstermiştir ki viskozite  $\mu = \mu(T)$  şeklinde sadece sıcaklığın bir fonksiyonudur. Çoğu halde basıncın etkisi ihmal edilebilir.



Şekil 1.3- Çeşitli akışkanlar için gerilme-şekil değiştirme hızı ilişkisi

(1.2) bağıntısında boyut analizi yapılırsa viskozitenin boyutunun

$$\tau \approx \text{yoğunluk} \times \text{hız} \times \text{uzunluk} \quad (1.3)$$

şeklinde olduğu görülür. Buna göre moleküler mertebede bir analiz yapılırsa gazlar için

$$\tau = 0.49 \rho c \lambda^* \quad (1.4)$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir. Burada  $\rho$  gazın yoğunluğu,  $c$  moleküllerin ortalama hızı ( $c \sim T^{1/2}$ ) ve  $\lambda^*$  da moleküller arası ortalama serbest yörüngedir. Gerçekte  $\mu$ 'nin analitik yolla tahmin edilen değerleri yeteri doğrulukta değildir. Bu bakımdan çoğu zaman deneysel değerler kullanılmaktadır.

Laminer viskozite katsayısı sık sık akışkanın yoğunluğu ile birlikte değerlendirilerek

$$\nu = \mu / \rho$$

şeklinde "*laminer kinematik viskozite*" tanımı yapılır.

Daha önce de belirtildiği gibi akışkan hareketinde bir sıcaklık farkı var ise akışkan sürtünmesine bir de "*ısı transferi*" olayı eşlik eder. Dolayısıyla bu tip olayların da modellenmesi gerekir. Bu olayın fiziksel esası iki gerçeğe dayanır. Birincisi, ısı akışı ancak sıcaklık gradyanı varsa oluşur ve sıcaklık gradyanı ile orantılıdır. İkinci olarak, ısı daima sıcaklığın büyük olduğu yerden küçük olduğu yere doğru akar. Buna göre ısı akışı için

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.5)$$

yazılır. Burada  $q$  büyüklüğü "ısı akışı" ve  $k$  da "*laminer ısı iletkenlik katsayısı*" olarak adlandırılır.  $k$  büyüklüğü akışkanın fiziksel bir özelliği olup daima pozitif değerlidir.

(1.5) bağıntısı "*Fourier kanunu*" olarak bilinir. Bu bağıntıdaki eksi işareti ısı akışının doğru yönünü elde etmek için kullanılmaktadır. Tecrübeler ısı iletkenlik katsayısının  $k = k(T)$  şeklinde sıcaklığın bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir. (1.5) bağıntısı katı cisimler için de geçerlidir.

Laminer viskozite ve ısı iletkenlik katsayılarını içeren iki önemli boyutsuz büyüklük (grup) vardır: Reynolds sayısı ve Prandtl sayısı.

$$\text{Reynolds sayısı} \quad \text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (1.6)$$

şeklinde olup burada  $\rho$  akışkanın yoğunluğu,  $V$  karakteristik hız ve  $L$  de karakteristik uzunluktur. Bu bağıntı

$$\text{Re} = \frac{\rho V^2}{\mu V / L} \quad (1.6a)$$

şeklinde düzenlenirse, akışkan akımındaki atalet kuvvetleri ile viskoz kuvvetlerin oranını temsil ettiği görülebilir. Pratikteki çoğu akım için bu oranın  $10^3 \div 10^8$  gibi çok büyük mertebelerde olduğu bilinmektedir.

$$\text{Prandtl sayısı} \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} \quad (1.7)$$

şeklinde viskozite ve ısı iletkenlik katsayıları yanında sabit basınçta özgül ısı katsayısı  $c_p$  ye bağlı olarak tanımlanmaktadır. Bu bağıntı da

$$Pr = \frac{\mu / \rho}{k / (\rho c_p)} \quad (1.7a)$$

şeklinde düzenlenirse momentum yayılım (difüzyon) katsayısı ile ısı yayılım katsayısı oranını temsil ettiği görülebilir. Çoğu gazlar için  $Pr \sim 0.7$ , su ve benzeri sıvılar için  $Pr \sim O(10)$  ve sıvı metaller için  $Pr \ll 1$  dir.

İki veya daha farklı akışkanın üniform olmayan bir karışımından oluşan bir akışkanın akışında viskoz yayılım ve ısı yayılım gibi bir de moleküler yayılım (difüzyon) görülür. Karışımındaki farklı akışkanlar farklı indislerle belirtilirse,  $i$  indisli akışkan zerrecilerinin kütlesi, toplam akışkan kütlesinin  $c_i$  gibi bir kesiri ile ifade edilerek kütle yayılım için

$$\dot{m}_i = -\rho D_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial n} \quad (1.8)$$

gibi bir bağıntı yazılır. Burada  $\dot{m}_i$  büyüklüğü  $i$  akışkanının lokal kütle akısını, kütle ortalamalı lokal akışkan hızına kıyasla temsil etmektedir.

(1.8) bağıntısı "*Fick kanunu*" olarak bilinmekte olup akışkan zerrecilerinin konsantrasyonun büyük olduğu yerden düşük olduğu yere doğru yayındığını belirtmektedir. Bu bağıntı kuvvetli sıcaklık veya basınç gradyantlarından oluşan kütle yayınımlarını hesaba katmamaktadır. Bağıntıdaki  $D_{ij}$  çarpanı "*laminer ikili yayılım katsayısı*" adını alır ve akışkanın fiziksel bir özelliğidir.

Kütle yayılımı ile ilgili iki boyutsuz sayı (grup) vardır:

$$\text{Schmidt sayısı} \quad Sc = -\frac{\mu}{\rho D_{ij}} \quad (1.9)$$

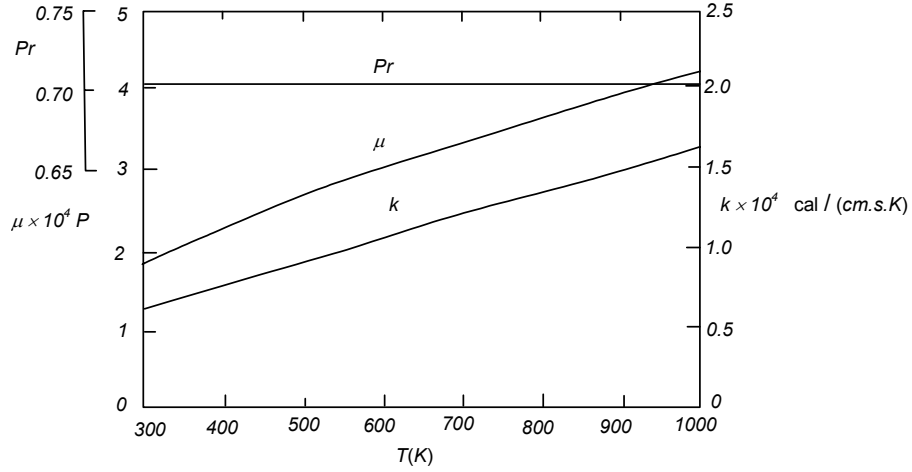
$$\text{Lewis sayısı} \quad Le = -\frac{\rho c_p D_{ij}}{k} \quad (1.10)$$

Schmidt sayısı viskoz difüzyonun kütle difüzyonuna oranını, Lewis sayısı ise kütle transferinin ısı transferine oranını temsil etmektedir. Bu iki boyutsuz katsayı birlikte kullanılarak

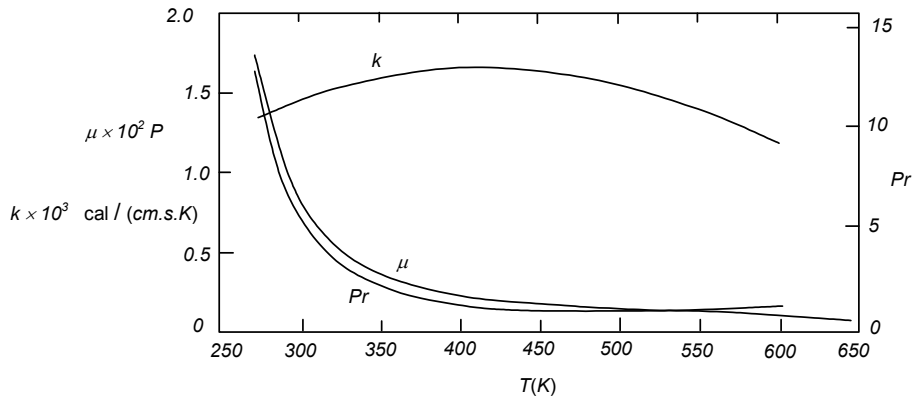
$$Pr = Le \cdot Sc \quad (1.11)$$

olduğu görülebilir.

Laminer viskozite, ısı iletkenlik, yayılım katsayısı gibi fiziksel özellikler geniş ölçüde deneysel çalışmalarla tespit edilmektedir. Hava ve su için bazı bilgiler Şekil 1.4 ve 1.5 de verilmiştir.



Şekil 1.4- Havanın 1 atm basıncındaki laminer termofiziksel özellikleri



Şekil 1.5- Sıvı haldeki suyun laminer termofiziksel özellikleri

Havanın viskozitesi için geniş biçimde kullanılan bir bağıntı [Sudherland](#) (1893).tarafından

$$\mu = 0.1716 \left( \frac{T}{273.1} \right)^{3/2} \frac{383.7}{T + 110.6} \quad (1.12)$$

olarak verilmiştir. Burada  $T$  sıcaklığı Kelvin derecesi ve  $\mu$  ise milipoise ( $N.s/m^2 \times 10^4 mP$ ) olarak ölçülmektedir. Bu bağıntının daha basit bir biçimi çok sıklıkla kullanılmakta olup

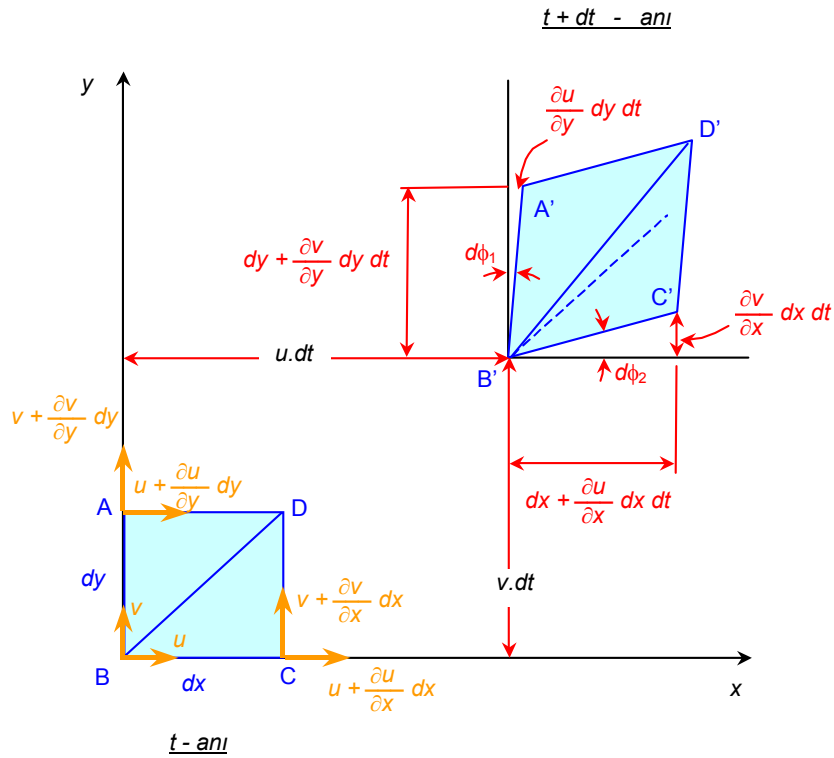
$$\mu \sim T^\omega \quad (\omega \cong 0.76)$$

şeklindedir.

### 1.4. Akışkanın kinematik özellikleri

Bir akışkan elemanı genel olarak 4 tip hareket veya deformasyon gösterir.

- 1- Öteleme (translasyon)
- 2- Dönme (rotasyon)
- 3- Genişleme-daralma (dilatasyon)
- 4- Açısal deformasyon



Şekildeki ABCD akışkan elemanın başlangıçta kare şeklinde olduğunu varsayalım. Bu eleman " $dt$ " zaman aralığında yer ve şekil değiştirmiştir.

- B noktasının  $B'$  noktasına gitmesi bir "**öteleme hareketi**" dir.

Öteleme miktarları

$$u \cdot dt, v \cdot dt$$

-  $BD$  diyagonalı saat ibrelerine zıt yönde bir dönme hareketi yaparak  $B'D'$  diyagonaline dönüşmüştür. Bu bir "**dönme - rotasyon**" hareketidir.

$BC$  kenarının dönme açısı

$$\phi_1 = \lim_{dt \rightarrow 0} \tan^{-1} \left[ \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt} \right] \approx \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

AB kenarının dönme açısı

$$\phi_1 = \lim_{dt \rightarrow 0} \tan^{-1} \left[ \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt} \right] \approx \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

BD Diyagonalinin dönme açısı

$$\frac{d\phi_2 - d\phi_1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

Açısal hız

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Akım üç-boyutlu kabul edilip, kübik bir akışkan elemanı dikkate alınarak benzeri işlemler x eksenine ve y eksenine dik düzlemler içinde tekrarlanarak

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

ve

$$\frac{d\Omega_y}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

bu üç bağıntı

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d\Omega_x}{dt} \vec{i} + \frac{d\Omega_y}{dt} \vec{j} + \frac{d\Omega_z}{dt} \vec{k}$$

şeklinde birleştirilerek

$$\vec{\omega} = 2 \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \quad \text{Vortisite vektörü}$$

elde edilir. Açısal hızların hız bileşeni türevleri cinsinden değerleri bu bağıntıda kullanılarak vortisite vektörünün

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

Şeklinde hız vektörünün rotasyoneline eşit olduğu görülür.

**- Akışkan elemanı AB ve CD kenarları arasındaki dik açı azalarak bir açısal deformasyona uğramıştır.**

Açısal deformasyon akışkan elemanının BA ve BC kenarlarında başlangıçta dik olan açının ortalama azalma miktarı olarak tanımlanır. Birim zamandaki azalma  $\varepsilon_{xy}$  ile gösterilerek

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} \right) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Diğer düzlemlerde benzeri biçimde

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

- Akışkan elemanı "*genişleme -dilatasyon*" biçiminde bir şekil değişimine uğrayarak *A'B'C'D'* elemanı olmuştur.

Akışkan elemanının bir doğrultudaki uzaması  $\varepsilon_{ij}$  ile gösterilerek, örneğin x-doğrultusunda

$$\varepsilon_{xx} dt = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

Böylece

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ve diğer doğrultularda

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

elde edilir.

### **Deformasyon hızları tansörü:**

Açısal ve lineer deformasyon hızları bir araya getirilerek

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{Deformasyon hızları tansörü}$$

şeklinde bir tansör elde edilir. Bu tansör hız türevleri cinsinde yazılırsa

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

## 1.5. Navier-Stokes denklemleri

Newton'un ikinci kanunu

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Her iki taraf akışkan hacmi ile bölünerek

$$\sum \vec{f} = \rho \cdot \vec{a}$$

Burada f birim hacme etkiyen kuvvet olup

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{V} = \vec{f}_{bünyesel} + \vec{f}_{yüzeysel}$$

Öte yandan ivme hız cinsinden

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

olup, böylece momentum denklemi

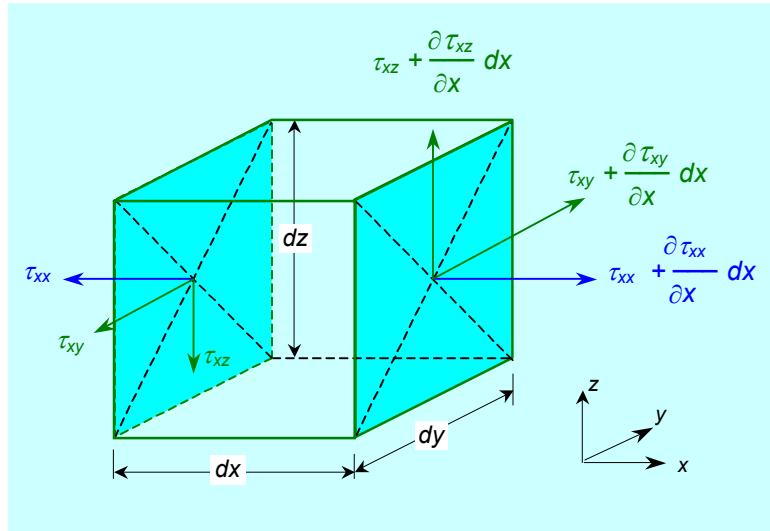
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{f}_{bünyesel} + \vec{f}_{yüzeysel}$$

Buradaki bünyesel kuvvetler yerçekimi veya elektromanyetik kaynaklı olup, çoğu problemde elektromanyetik kuvvetler yoktur. Yerçekimi kuvvetleri ise

$$\vec{f}_{bünyesel} = \rho \vec{g}$$

şeklinde yerçekimi ivmesine bağlanır. Çoğu akış probleminde yerçekimi kuvveti de ihmal edilebilir.

Yüzeysel kuvvetleri tespit etmek için Şekil 1.6 da gösterildiği gibi dikdörtgen prizması şeklindeki bir akışkan elemanını dikkate alalım.



Şekil 1.6- Akışkan elemanına x-doğrultusunda etkiyen kuvvetler

x eksenine dik iki yüzeye etkiyen kuvvetler

$$\vec{T}_x dy dz ; \quad \left( \vec{T}_x + \frac{\partial \vec{T}_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$



olup bu ikisinin farkından net kuvvet vektörü  $\frac{\partial \vec{T}_x}{\partial x} dx dy dz$

Benzeri şekilde, diğer iki eksene (y ve z) dik düzlemlere etkiyen kuvvetler de

$$\frac{\partial \vec{T}_y}{\partial y} dx dy dz ; \quad \frac{\partial \vec{T}_z}{\partial z} dx dy dz$$

şeklinde olup kuvvet vektörleri bileşenlere ayrılarak

$$\begin{aligned} \vec{T}_x &= \tau_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \\ \vec{T}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \tau_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{T}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \tau_{zz} \vec{k} \end{aligned}$$

Burada, örneğin  $\tau_{xy}$  elemanı *x* eksenine dik yüzeye *y* doğrultusunda etkiyen gerilmeyi belirtmektedir.

Kuvvetlerin herhangi bir eksen etrafında momenti alınarak ve dengedeki bir akışkan zerresi için sıfıra eşitlenerek

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.21)$$

olduğu gösterilebilir.

Gerilme bileşenleri bir araya getirilerek

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

şeklinde bir *gerilme tansörü* oluşturulabilir. (1.21) bağıntıları da dikkate alınırsa gerilme tansörü simetrik bir tansördür.

$\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  ve  $\tau_{zz}$  diyagonal elemanları "*normal gerilmeler*" olup basınç ile yakından ilişkilidirler. Diyagonal dışındaki elemanlar "*viskoz kayma gerilmeleri*"dir.

x-doğrultusundaki momentum denklemini için kuvvet vektörlerinin x-doğrultusundaki bileşenleri toplanarak

$$F_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

veya birim hacim başına kuvvet

$$f_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Benzeri şekilde y- ve z- doğrultusundaki toplam kuvvetler

$$f_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

ve

$$f_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

olarak bulunur.

Yüzey gerilme kuvvetlerinin bileşkesi

$$\vec{f}_{\text{yüzeyesel}} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

olup yukarıdaki bileşenler kullanılarak

$$\vec{f}_{\text{yüzeyesel}} = \nabla \cdot \tau_{ij}$$

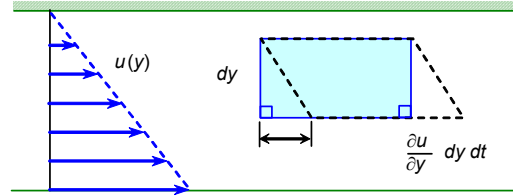
böylece momentum denklemi

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \tau_{ij}$$

şekline gelir.

Şimdi bu viskoz gerilmelerin akımın dinamiğine bir şekilde bağlanması gerekmektedir.

Bunun için Şekil 1.7 deki basit hal dikkate alınırsa bu basit halde



$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.22)$$

Şekil 1.7- Sabit ve hareketli iki duvar arasındaki dar bölgede akım

dir. Buradaki  $\partial u/\partial y$  büyüklüğü akışkan içinde başlangıçta dik kesişen iki çizgi arasındaki açının değişme hızının yarısı olarak tanımlanan şekil değiştirme hızının iki katına eşittir. Buna göre *kayma gerilmesinin şekil değiştirme hızı ile orantılı olduğu* söylenebilir.

(1.22) bağıntısı genelleştirilerek

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.25)$$

Buradaki temel kabul viskoz gerilme tansörünün şekil değiştirme hızları tansörünün lineer bir fonksiyonu olduğudur.

Bu analiz Newtonien akışkanlar için denklemleri verir. Ayrıca akışkan izotropik kabul edilmiş olup, işlemler seçilen doğrultudan bağımsızdır.

Diyagonal terimler (*normal gerilmeler*) özel bir dikkat gerektirir.

Öncelikle, bir akışkan içindeki *p* basıncı ekseriyetle birim yarıçaplı bir küre üzerindeki normal gerilmelerin ortalama değerinin ters işaretlisi (içeri doğru) olarak tanımlanır. Buna göre basıncın büyüklüğü gerilme tansörünün diyagonal terimleri içinde gözükmelidir. Ayrıca nihai bağıntının koordinat sistemindeki basit bir dönme halinde değişmez (invariant) olmasını isteriz. Bu husus tansörün diyagonal terimlerine bazı başka terimlerin ve ikinci bir  $\lambda$  viskozite katsayısının ilave edilmesini gerektirir.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - p \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - p \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - p \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sözü edilen formülasyon katı mekaniğindeki benzeri olup, diyagonal terimlerin nihai biçimi:

şeklindedir. Fakat, normal gerilmelerin ortalaması hareket (ve dolayısıyla normal viskoz gerilmeler) olsun veya olmasın basıncın eksi işaretlisine eşit olacağı için

$$-p = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} = -p + \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.27)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin gerçekleşebilmesi için sağdaki ikinci terimin sıfır olması gerektiği açıkça görülmektedir. Bu bağıntının sağında parantez içinde yer alan terimler toplamının

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \text{div } \vec{V}$$

olduğunu göstermek mümkündür. **Sıkıştırılmaz akımlar** için bu terimler toplamı kütlelenin korunumu gereği (süreklilik denklemi) sıfırdır. Diğer hallerde ise basitçe,

$$\lambda = -\frac{2\mu}{3} \quad (\text{Stokes hipotezi})$$

kabul edilmesi alışıl gelmiştir. Bu kabulün ciddi şekilde bir ispatı, tek atomlu gazlar dışında zordur.

Stokes hipoteziyle hızın diverjansı da kullanılarak normal gerilmeler için verilen bağıntılar

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \vec{V} \\ \tau_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \vec{V} \\ \tau_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \vec{V} \end{aligned} \quad (1.26a)$$

(1.25) ve (1.26a) bağıntıları birleştirilerek bir tek genel deformasyon kanunu şeklinde ifade edilebilir.

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3}\mu \text{div } \vec{V}$$

Burada  $\delta_{ij}$  büyüklüğü kronoker deltası olup  $i=j$  için değeri 1 ve  $i \neq j$  için sıfırdır.

Bu durumda momentum denklemi de

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \vec{g} - \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3}\mu \text{div } \vec{V} \right]$$

şekline gelir.

Sıkıştırılmaz, sabit viskoziteli akımlar için bu denklem

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

şekline indirgenir.

## 1.6. Enerji denklemi

Termodinamiğin 1. kanunu

$$dE_t = dQ + dW$$

Durağan olmayan (hareketli) sistemlerde

$$E_t = \rho \left( e + \frac{1}{2} V^2 - \vec{g} \cdot \vec{r} \right)$$

Burada

$e$ : Partikülün birim kütle başına iç enerjisi

$V$ : Partikülün hızı

$\vec{r}$ : Partikülün yer değiştirmesi

Hareketi takiben türev alınarak

$$\frac{DE_t}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt}$$

Burada

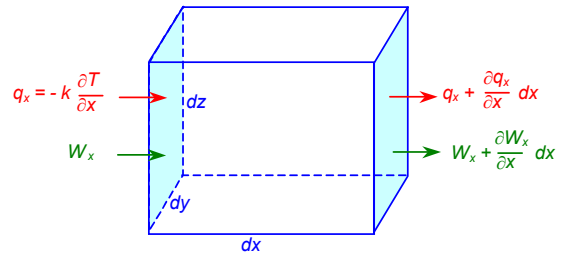
$$\frac{DE_t}{Dt} = \rho \left( \frac{De}{Dt} + \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right)$$

Isı transferi için Fourier kanunu

$$\vec{q} = -k \cdot \nabla T$$

Şekildeki dikdörtgenel akışkan elemanı için  $x$  eksenini yönündeki ısı transferi incelenirse, sol ve sağ yüzlerden geçen ısı akıları sırasıyla:

$$q_x dy dz \quad \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$



İkisinin farkı alınarak net ısı transferi elde edilir. Diğer doğrultulardaki ısı transferleri de benzeri biçimde incelenerek toplam ısı akısı için

$$-\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ve hacim ile bölünerek birim hacim başına ısı transferi için

$$-\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = -\nabla \cdot \vec{q} = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = \frac{DQ}{Dt}$$

elde edilir.

Yine şekildeki prizmatik elemanın sol ve sağ yüzeyleri üzerinde birim alan başına yapılan işler için sırasıyla

$$w_x = -(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) \quad \text{ve} \quad -w_x - \frac{\partial w_x}{\partial x} dx$$

ve bu ikisinin bileşkesinden net iş için

$$-\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz})$$

elde edilir. Benzeri incelemeler diğer doğrultulardaki yüzler için yapılarak sonuçta toplam net iş için

$$\begin{aligned} \frac{DW}{Dt} &= -\left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = -\nabla W \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz}) \end{aligned}$$

veya indissel biçimde  $\frac{DW}{Dt} = -\nabla \cdot (\vec{V} \cdot \tau_{xx})$

bulunur. Bu ifade  $\boxed{\frac{DW}{Dt} = \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$

şeklinde de yazılabilir. Sağdaki ilk parantez içi terim momentum denkleminde

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \tau_{ij} \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho \vec{g}}$$

şeklinde hızın materyal türevine bağlanabilir.

Böylece enerji, ısı ve iş için elde edilen büyüklükler Termodinamiğin 1. yasasında kullanılarak

$$\rho \left( \frac{De}{Dt} + \vec{V} \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right) = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + \vec{V} \cdot \left( \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho \vec{g} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

sadeleştirme ve düzenlemeler sonucu

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \text{div}(k \cdot \nabla T) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

elde edilir. Bu eşitlik Termodinamiğin 1. kanunun akışkan hareketi için geniş şekilde uygulanan bir biçimdir.

Bu son denklemin sağ tarafındaki gerilme tansörü basınç terimi ve viskoz gerilme terimi

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p \cdot \text{div} \vec{V}$$

olmak üzere iki kısma ayrılarak, ve ayrıca basınç terimi için süreklilik denklemleri yardımıyla

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad \rightarrow \quad p \cdot \operatorname{div}\vec{V} = -\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{Dp}{Dt}$$

yazılarak enerji denklemi

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{Dp}{Dt} + \operatorname{div}(k \cdot \nabla T) + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

şekline getirilebilir. Burada solda parantez içinde geçen toplam kısaca

$$e + \frac{p}{\rho} = h$$

şeklinde gösterilir ve  $h$  büyüklüğü "*entalpi*" olarak adlandırılır. Viskoz gerilmeyle ilgili sonucu terim de yine kısaca

$$\phi = \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

şeklinde gösterilir ve "*dissipasyon fonksiyonu*" olarak adlandırılır. Böylece enerji denklemi çoğu zaman kısaca

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \operatorname{div}(k \cdot \nabla T) + \phi$$

şeklinde yazılır. Dissipasyon fonksiyonu Newtonien akışkanlar için

$$\phi = \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

şeklindedir.

Sabit özellikli ( $k=sb$ ), mükemmel gaz ( $dh=c_p dT$ ,  $de=c_v dT$ ) halinde enerji denklemi basitleşerek

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k \cdot \nabla^2 T + \phi$$

haline gelir.

## 1.7. Genel denklemlerin bilançosu

Süreklilik	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0$
Momentum	$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau'_{ij}$
Enerji	$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \operatorname{div}(k \cdot \nabla T) + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

### **Burada**

Viskoz gerilme tansörü :  $\tau'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \operatorname{div}\vec{V}$

Değişken sayısı : 9

Asıl bilinmeyenler : 5  $\rho, \mathbf{V}(u, v, w), T$

$$\rho = \rho(p, T)$$

$$h = h(p, T)$$

İkincil bilinmeyenler : 4

$$\mu = \mu(T)$$

$$k = k(T)$$

### **Kabuller**

- Akışkan matematiksel olarak süreklidir.
- Partiküller termodinamik dengededir.
- Tek bünyesel kuvvet yer çekimi kaynaklıdır.
- Isı iletimi Fourier kanununa uyar