KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- Kısmi diferansiyel denklemlerin türleri
- Sonlu fark yaklaşımı
- Eliptik denklemlerin çözüm teknikleri
- Parabolik denklemlerin çözüm teknikleri
- Hiperbolik denklemlerin çözüm teknikleri

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TÜRLERİ

İkinci dereceden bir eğri $\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0}$

$B^2 - 4AC < 0$ elips

$B^2 - 4AC = 0$ parabol

$B^2 - 4AC > 0$ hiperbol

Benzeri şekilde ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklem

$$\boxed{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0}$$

$B^2 - 4AC < 0$ eliptik

$B^2 - 4AC = 0$ parabolik

$B^2 - 4AC > 0$ hiperbolik

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TÜRLERİ

$$\boxed{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0}$$

Sınır koşulu

- *u* cinsinden verilmişse *Dirichlet* tipi
- *u nun türevleri* cinsinden verilmişse *Neuman* tipi
- *Bu ikisi* cinsinden verilmişse *Karışık* tipte

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TÜRLERİ

Eliptik denklemler

Eliptik denklemler genel olarak "*potansiyel*" adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil ederler. Dolayısıyla eliptik denklemler aynı zamanda potansiyel denklemler olarak da adlandırılır.

2-boyutlu eliptik denklem için genel tanım

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0$$

Buradaki bağımlı *u* değişkeni potansiyelin herhangi bir noktada, sınırdaki değerlere bağlı olarak aldığı denge (equilibrium) veya daimi-durum (steady state) değerlerini belirtir.

$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1$ olup $B^2 - 4AC < 0$

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TÜRLERİ

Parabolik denklemler

Potansiyelin *bir başlangıç durumu*ndan itibaren eriştiği *daimi durum* değerleri bir *parabolik* denklemle temsil edilir. Dolayısıyla bu denklemler *t* – zaman - değişkenini de bağımsız değişkenlerden biri olarak içerir.

Başlangıç durumundan itibaren zaman ilerledikçe nihai denge durumuna doğru adım adım ilerlenir

Örnek $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ Difüzyon denklemi

Burada

$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0$ olup $B^2 - 4AC = 0$

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TÜRLERİ

Hiperbolik denklemler

Hiperbolik denklemler de zamana bağlıdır.

Dalgaların nasıl yayıldığını ifade ettiklerinden, "*dalga denklemi*" olarak adlandırılırlar.

Örnek: Titreşen bir yay için kısmi-diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{Tg}{w}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Burada

T : Yaydaki gerilme
g : Yer çekimi ivmesi
w : Birim uzunluk başına yay ağırlığı

$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{Tg}{w} < 0$ olup $B^2 - 4AC > 0$

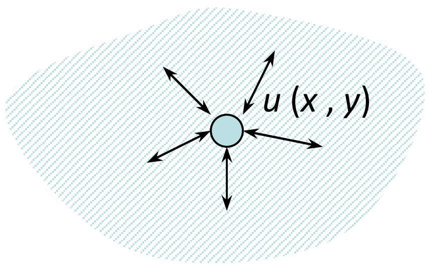
KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TÜRLERİ

Bağımlılık ve etki bölgeleri

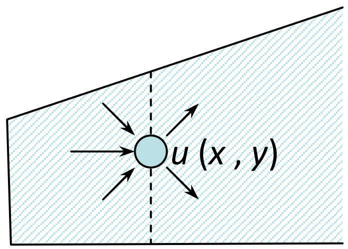
Kısmi diferansiyel denklemin bağımlı değişkeninin bir noktadaki değeri

- çevre noktalardaki değerlerden etkilendiği gibi,
- çevre noktalardaki değerleri de etkiler.

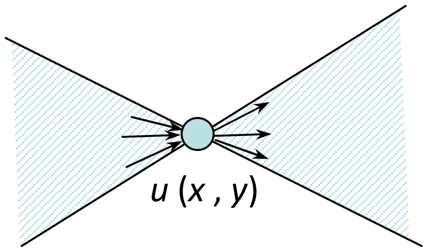
Bu etkileşim denklemin tipine göre farklılık gösterir.



Eliptik problem



Parabolik problem



Hiperbolik problem

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için, içerisinde yer alan türevlerin cebirsel bağıntılarla yaklaşık biçimde yazılması gerekir.

Bu tip düzenlemelere *türevin ayrıklaştırılması* adı verilir.

Kısmi türevlerin ayrıklaştırılması çoğu zaman *Taylor açılımı* yardımıyla gerçekleştirilir.

Taylor seri açılımı

$$\boxed{f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots + O\left[(\Delta x)^n\right]}$$

Burada $O\left[(\Delta x)^n\right] = \frac{(\Delta x)}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \ldots$ Hata terimi

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Birinci dereceden türev için açılım

Taylor açılımı

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots + O\left[(\Delta x)^n\right]$$

Birinci dereceden türev çekilerek

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \ldots$$

$$O(\Delta x) = \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \ldots$$

olmak üzere

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)}$$

İndissel biçimde

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)}$$

Birinci dereceden türev için *birinci mertebeden* *ileri fark* formülasyonu

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Birinci dereceden türev için açılım

Taylor açılımı

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \ldots + O\left[(\Delta x)^n\right]$$

Birinci dereceden türev çekilerek

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \ldots$$

$$O(\Delta x) = \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \ldots$$

olmak üzere

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)}$$

İndissel biçimde

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)}$$

Birinci dereceden türev için *birinci mertebeden geri fark* formülasyonu

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Birinci dereceden türev için açılım

Taylor açılımı

$$\begin{cases} f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{(\Delta x)^2}{2!}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{(\Delta x)^3}{3!}\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} \ldots + O\left[(\Delta x)^n\right] \\ f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{(\Delta x)^2}{2!}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{(\Delta x)^3}{3!}\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} \ldots + O\left[(\Delta x)^n\right] \end{cases}$$

Birbirinden çıkartılarak

$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = 2\Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

Birinci dereceden türev çekilerek

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2}$$

Burada

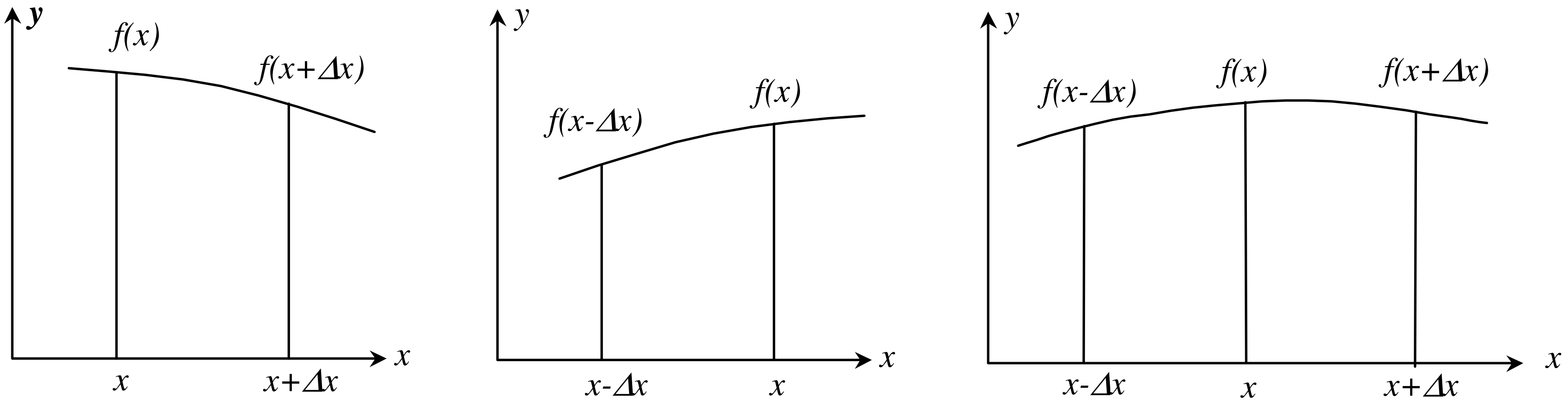
$$O(\Delta x)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \ldots$$

İndissel biçimde

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x\right)^2}$$

Birinci dereceden türev için *birinci mertebeden merkezi fark* formülasyonu

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI



a) İleri fark *b) Geri fark* *c) Merkezi fark*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

Birinci mertebeden yaklaşımlar

İkinci mertebeden yaklaşım

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

İkinci dereceden türev için açılım

($x+2\Delta x$) de Taylor açılımı
$$f(x+2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

($x+\Delta x$) de Taylor açılımı
$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

İkincinin 2 katı alınıp birinciden çıkartılarak
$$f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

İkinci türev çekilerek
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

İndissel biçimde
$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)}$$

İkinci dereceden türev için *ileri fark* formülasyonu

Burada $O(\Delta x) = (\Delta x)\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

İkinci dereceden türev için açılım

(x-2Δx) de Taylor açılımı

$$f(x-2\Delta x) = f(x) - (2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

(x-Δx) de Taylor açılımı

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

İkincinin 2 katından birinci çıkartılarak

$$2f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x) = f(x) - (\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

İkinci türev çekilerek

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x) - 2f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

İndissel biçimde

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)}$$

İkinci dereceden türev için *geri fark* formülasyonu

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

İkinci dereceden türev için açılım

($x+\Delta x$) de Taylor açılımı

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

($x-\Delta x$) de Taylor açılımı

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

İkisi toplanarak

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) = 2f(x) + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^4}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots$$

İkinci türev çekilerek

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

İndissel biçimde

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O\left(\Delta x\right)^2}$$

İkinci dereceden türev için *merkezi fark* formülasyonu

Burada $O(\Delta x)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots$

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Sonlu fark denklemi -Kısmi diferansiyel denklemin ayrıklaştırılması

Örnek
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \qquad f = f(x, y, t)$$

Zamana göre türev için ileri fark açılımı
$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,j}^{n} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Konuma göre türevler için *n zaman adımında* merkezi fark açılımları
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j}^{n} = \dfrac{f_{i+1,j}^{n} - 2 f_{i,j}^{n} + f_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \\ \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j}^{n} = \dfrac{f_{i,j+1}^{n} - 2 f_{i,j}^{n} + f_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \end{cases}$$

Denklemde yerleştirilerek
$$\boxed{\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha\left[\frac{f_{i+1,j}^{n} - 2 f_{i,j}^{n} + f_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n} - 2 f_{i,j}^{n} + f_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}\right] + O\left[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2\right]}$$

Burada tek bilinmeyen var

Açık (*explicit*) formülasyon

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Sonlu fark denklemi -Kısmi diferansiyel denklemin ayrıklaştırılması

Örnek $$\frac{\partial f}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \qquad f=f(x,y,t)$$

Zamana göre türev için ileri fark açılımı

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}=\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}+O(\Delta t)$$

Konuma göre türevler için *n+1 zaman adımında* merkezi fark açılımları

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j}^{n+1}=\dfrac{f_{i+1,j}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2\\[2ex] \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j}^{n+1}=\dfrac{f_{i,j+1}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}+O(\Delta y)^2\end{cases}$$

Denklemde yerleştirilerek

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}&=\alpha\left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i,j+1}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right]\\&\quad+O\left[\Delta t,(\Delta x)^2,(\Delta y)^2\right]\end{aligned}}$$

Burada 5 bilinmeyen var

Kapalı (*implicit*) formülasyon

ELİPTİK DENKLEMLER

İkinci dereceden standart eliptik denklem

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(c_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)+au=f(x,y)}$$

Poisson denklemi

$f(x,y)=0$ halinde

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(c_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)+au=0}$$

Laplace denklemi

$c_x(x,y)=c_y(x,y)=c=sb$

$a=0$

özel halinde

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y)} \\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0} \end{array}\right.$$

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

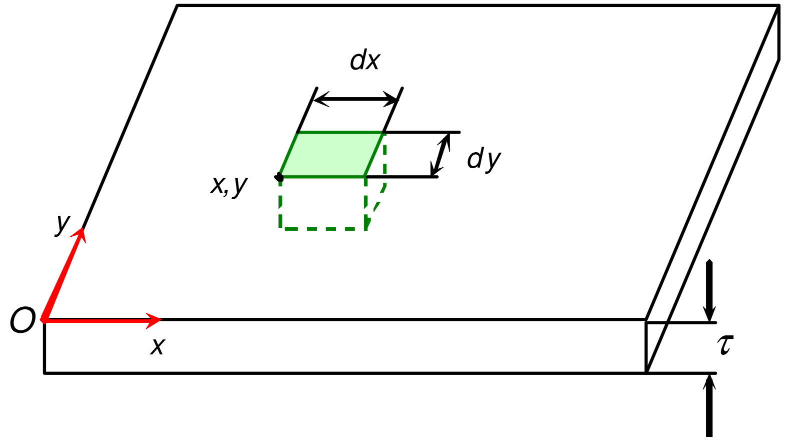
Laplacien

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{c\nabla^2 u=f(x,y)} \\ \boxed{\nabla^2 u=0} \end{array}\right.$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek : *Düz levhanın daimi-durumda sıcaklık dağılımı problemi*

Hacim elemanına *x* doğrultusunda
birim zamanda giren ve çıkan ısılar



$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} = -k(\tau\, dy)\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{x+dx} = -k(\tau\, dy)\frac{\partial}{\partial x}\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)$$

Hacim elemanına *y* doğrultusunda *birim zamanda giren ve çıkan ısılar*

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial x} = -k(\tau\, dx)\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_{y+dy} = -k(\tau\, dx)\frac{\partial}{\partial y}\left(T + \frac{\partial T}{\partial y}dy\right)$$

Hacim elemanının *alt ve üst yüzeylerinden*
birim zamanda çıkan ısılar

$$Q\, dx\, dy$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek problem: *Düz levhanın daimi-durumda sıcaklık dağılımı problemi*

Daimi-durumda elemana giren ve çıkan ısılar toplamı eşit olacağından

$$-k(\tau dy)\frac{\partial T}{\partial x}-k(\tau dx)\frac{\partial T}{\partial y}=-k(\tau dy)\left[\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx\right]-k(\tau dx)\left[\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dy\right]+Q\,dx\,dy$$

Düzenlenerek $\boxed{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\dfrac{Q}{k\tau}} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 T=\dfrac{Q}{k\tau}}$

3-Boyutlu halde $\boxed{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\dfrac{Q}{k\tau}}$

Levhanın kalınlığı *x* ve *y* ile değişiyorsa

$$\tau\nabla^2 T+\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{Q}{k}$$

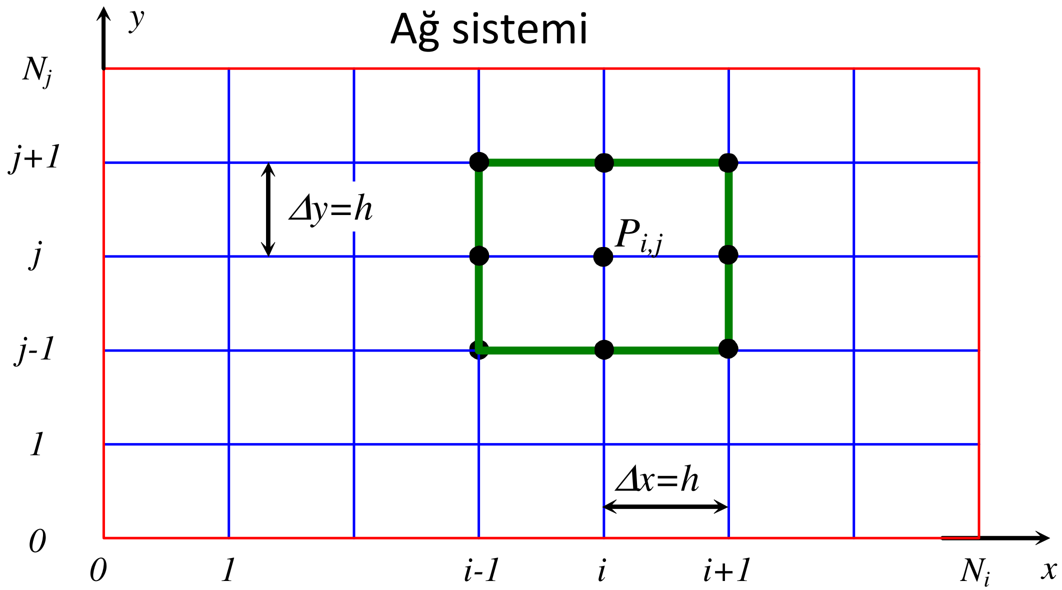
İlaveten ısıl iletkenlik katsayısı *x* ve *y* ile değişiyorsa

$$k\tau\nabla^2 T+\left(k\frac{\partial\tau}{\partial x}+\tau\frac{\partial k}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial x}+\left(k\frac{\partial\tau}{\partial y}+\tau\frac{\partial k}{\partial y}\right)\frac{\partial T}{\partial y}=Q$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek Problem: Q=0 *halinde düz levhanın sıcaklık dağılımının hesaplanması*

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{Q}{k\,\tau}}$$



İkinci dereceden türevler merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j}=\frac{T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

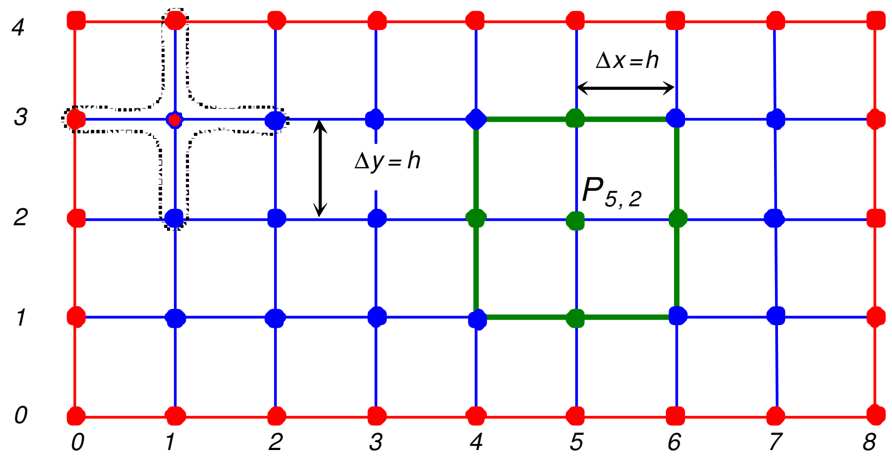
$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j}=\frac{T_{i,j-1}-2T_{i,j}+T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\left(\nabla^2 T\right)_{i,j}=\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j}=\frac{T_{i-1,j}-4T_{i,j}+T_{i+1,j}+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}}{h^2}$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama:

20 cm uzunluk ve 10 cm genişlikteki düz levhanın üst ve alt yüzeyleri izole edilmiştir. Üst, alt ve sol kenarlarında sıcaklık 0°C, sağ kenarındaki sıcaklık 100°C iken levhanın 2.5 cm aralıkla belirlenmiş noktalarındaki sıcaklıkları hesaplayınız



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$\frac{T_{i-1,j} - 4T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{h^2} = 0$$

veya $\boxed{T_{i-1,j} - 4T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} = 0}$ Denklemde 5 bilinmeyen var

Bu denklem 3×7=21 adet iç noktanın her birinde bağımsız olarak yazılabilir.

Kenarlara komşu noktalarda yazılan denklemlerde sınır koşulları yer alacaktır.

Örneğin P_{13} noktasında $T_{23} + T_{12} - 4T_{13} = -T_{03} - T_{14}$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama:

İç noktalar ve sınır noktaları

T_{04}	T_{14}	T_{24}	T_{34}	T_{44}	T_{54}	T_{64}	T_{74}	T_{84}
T_{03}	T_{13}	T_{23}	T_{33}	T_{43}	T_{53}	T_{63}	T_{73}	T_{83}
T_{02}	T_{12}	T_{22}	T_{32}	T_{42}	T_{52}	T_{62}	T_{72}	T_{82}
T_{01}	T_{11}	T_{21}	T_{31}	T_{41}	T_{51}	T_{61}	T_{71}	T_{81}
T_{00}	T_{10}	T_{20}	T_{30}	T_{40}	T_{50}	T_{60}	T_{70}	t_{80}

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: Lineer denklem takımı

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{41} \\ T_{51} \\ T_{61} \\ T_{71} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{42} \\ T_{52} \\ T_{62} \\ T_{72} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \\ T_{43} \\ T_{53} \\ T_{63} \\ T_{73}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100
\end{bmatrix}
$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: **Gauss eliminasyon yöntemi ile çözüm**

Not: Denklem sistemi 15 diyagonalli olduğu gibi, ayrıca 5 diyagonal hariç diğer diyagonallerdeki bütün değerler sıfırdır. Bu bakımdan Gauss eliminasyon yöntemi yerine daha özel yöntemler düşünülebilir.

4		0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0.3530	0.9132	2.0103	4.2957	9.1532	19.6632	43.2101	100
2	0	0.4989	1.2894	2.8324	6.0194	12.6538	26.2894	53.1774	100
1	0	0.3530	0.9132	2.0103	4.2957	9.1532	19.6632	43.2101	100
0		0	0	0	0	0	0	0	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Levha üzerindeki sıcaklık dağılımını daha hassas şekilde hesaplamak için ağ yapısı daha sıkılaştırılabilir

Hassasiyeti arttırmanın bir diğer yolu da Laplaciyeni hesaplarken P_{ij} noktasının sağ, sol alt ve üst tarafında yer alan komşu noktalar yanında çaprazdaki diğer 4 noktayı da (sol ve sağdaki alt ve üst köşelerde yer alan noktalar) katarak 9 noktalı bir ayrıklaştırma kullanmaktır.

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: Basit iterasyon (Liebmann / Gauss-Sidel) yöntemi ile çözüm

Laplace denkleminin ayrık formu

$$u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0$$

İterasyon algoritması.

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^{k}}{4}$$

Basit iteratif yöntem:

28 iterasyondan sonra *0.0001* hassasiyetle yakınsamış çözüm sonuçları

j \ i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
4	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*100*
3	*0*	*0.3531*	*0.9133*	*2.0105*	*4.2959*	*9.1533*	*19.6632*	*43.2102*	*100*
2	*0*	*0.4990*	*1.2896*	*2.8325*	*6.0195*	*12.6539*	*26.2895*	*53.1775*	*100*
1	*0*	*0.3531*	*0.9133*	*2.0104*	*4.2958*	*9.1532*	*19.6632*	*43.2102*	*100*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*100*

ELİPTİK DENKLEMLER

Basit iteratif yöntemin hızlandırılması – Ardarda aşırı gevşetme (SOR) yöntemi:

Laplace denkleminin ayrık formu $$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0$$

İterasyon algoritması. $$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^{k} + \omega \frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} - 4T_{i,j}^{k} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j+1}^{k}}{4}$$

$$T_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)T_{i,j}^{k} + \omega \frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j+1}^{k}}{4}$$

Aşırı gevşetme çarpanı	*1.0*	*1.1*	*1.2*	*1.3*	*1.4*	*1.5*	*1.6*	*1.7*
İterasyon sayısı	*28*	*22*	*15*	*15*	*17*	*21*	*29*	*39*

Aşırı gevşetme çarpanının optimum değeri Dirichlet tipi sınır koşullarının kullanıldığı dikdörtgensel bir hesap bölgesi için hesaplanabilir:

$$[\cos(\pi / p) + \cos(\pi / q)]^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0$$

$p = 8$

$q = 4$

$\Rightarrow$ $2.66012\omega^2 - 16\omega + 16 = 0$ $\Rightarrow$

$\omega_1 = 4.74796$

$\boxed{\omega_2 = 1.26681}$

ELİPTİK DENKLEMLER

Basit iteratif yöntemin hızlandırılması – Ardarda aşırı gevşetme (SOR) yöntemi:

Laplace denklemi için basit iterasyon formülü
$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j+1}^{k}}{4}$$

Bir kez T_{ij} eklenip çıkartılarak
$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^{k} + \frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j+1}^{k} - 4T_{i,j}^{k}}{4}$$

İkinci terim kalıntı olup bir ω ağırlık çarpanı kullanılarak
$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^{k} + \omega\frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} - 4T_{i,j}^{k} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j+1}^{k}}{4}$$

Düzenlenerek
$$\boxed{T_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)T_{i,j}^{k} + \omega\frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j+1}^{k}}{4}}$$

Aşırı gevşetme çarpanı	*1.0*	*1.1*	*1.2*	*1.3*	*1.4*	*1.5*	*1.6*	*1.7*
İterasyon sayısı	*28*	*22*	*15*	*15*	*17*	*21*	*29*	*39*

Aşırı gevşetme çarpanının optimum değeri Dirichlet tipi sınır koşullarının kullanıldığı dikdörtgensel bir hesap bölgesi için aşağıdaki formülle hesaplanabilir:

$$[\cos(\pi/p) + \cos(\pi/q)]^2\,\omega^2 - 16\omega + 16 = 0$$

$$p = 8,\; q = 4 \;\Rightarrow\; 2.66012\omega^2 - 16\omega + 16 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_2 = 1.26681} \qquad \omega_1 = 4.74796$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: **Poisson denklemi**

Dikdörtgensel kesitli bir çubuğun kesit boyutları 6in $\times$ 8in 'dir. Bu çubuk için burulma fonksiyonunu çözünüz.

Çubuğun burulması halinde teğetsel gerilmeler burulma fonksiyonunun kısmi türevleriyle orantılı olup burulma fonksiyonu için denklem: $\Rightarrow$ $\nabla^2\varphi = -2$

Sınır koşulu çubuk kesitinin kenarlarında φ = 0 şeklindedir

Ayrık denklem

$$\left(\nabla^2\varphi\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i-1,j} - 4\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1}}{h^2} = -2$$

İterasyon algoritması.

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{\varphi_{i-1,j}^{k+1} + \varphi_{i,j-1}^{k+1} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j+1}^{k} + 2h^2}{4}$$

SOR iterasyon formülü

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \varphi_{i,j}^{k} + \omega\frac{\varphi_{i-1,j}^{k+1} + \varphi_{i,j-1}^{k+1} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j+1}^{k} + 2h^2}{4}$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: **Poisson denklemi**

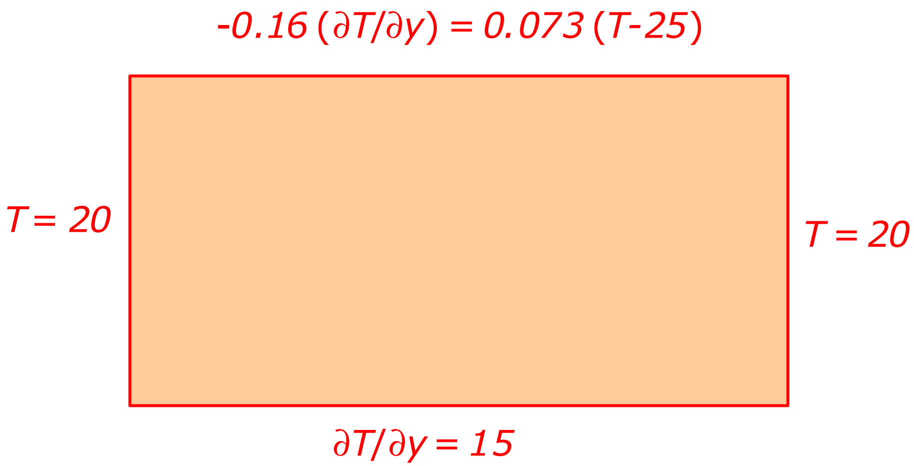
h=1 in olmak üzere oluşturulan bir ağ yapısı için optimum aşırı gevşetme çarpanı *1.383*

14 iterasyonda *0.001* hassasiyetle yakınsayan çözüm sonuçları

j \ i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	2.042	3.047	3.353	3.047	2.043	0.000
6	0.000	3.123	4.794	5.319	4.794	3.123	0.000
5	0.000	3.657	5.686	6.335	5.686	3.657	0.000
4	0.000	3.818	5.959	6.647	5.960	3.818	0.000
3	0.000	3.657	5.686	6.335	5.686	3.657	0.000
2	0.000	3.123	4.794	5.319	4.794	3.124	0.000
1	0.000	2.043	3.048	3.354	3.048	2.043	0.000
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: **Türev cinsinden sınır koşulu**



Kalınlığı 0.5 cm olan 5 cm $\times$ 9 cm boyutlarındaki düz levhanın her yerinde $Q = 0.6 cal/cm^3 s$ büyüklüğünde ısı üretimi vardır.

Alt kenarda $\partial T/\partial y = 15$ şiddetinde bir ısı kaybı mevcut iken yan kenarlar 20°C sabit sıcaklıkta tutulmaktadır.

Üst kenarda çevre ile $-k\partial T/\partial y = H \cdot (T_O - T_s)$ formülü uyarınca ısı alışverişi söz konusudur.

Burada $k = 0.16$ (ısıl iletkenlik katsayısı),
$H = 0.073$ (ısı transfer katsayısı)
$T_s = 25°C$ (çevre sıcaklığı).
T_O büyüklüğü levhanın uzun üst kenarındaki sıcaklıkları belirtmektedir.
Levha yüzeyi izole edilmiş olup, çevre ile ısı alışverişi yoktur.

Hücre genişlik ve yüksekliklerini eşit ve 1 cm alarak daimi-haldeki sıcaklık dağılımını hesaplayınız.

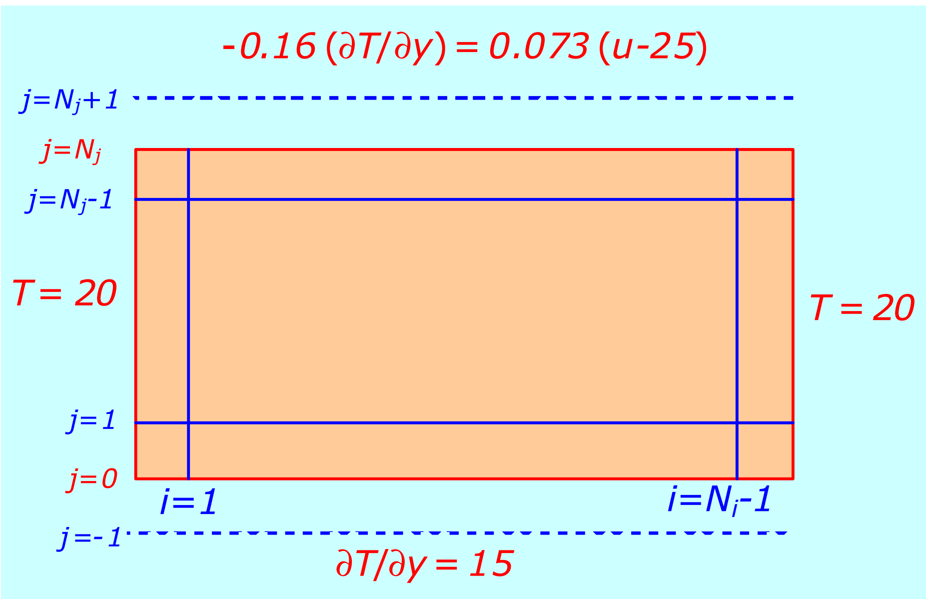
ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: **Türev cinsinden sınır koşulu**

Denklem $$\nabla^2 T = -\frac{Q}{k\,\tau}$$

Ayrıklaştırılmış denklem $$\frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j}}{h^2} = -\frac{Q}{k\tau}$$

SOR iterasyon formülü $$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^{k} + \omega\,\frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j+1}^{k} - 4T_{i,j}^{k}}{4} + \frac{Qh^2}{4k\tau}$$



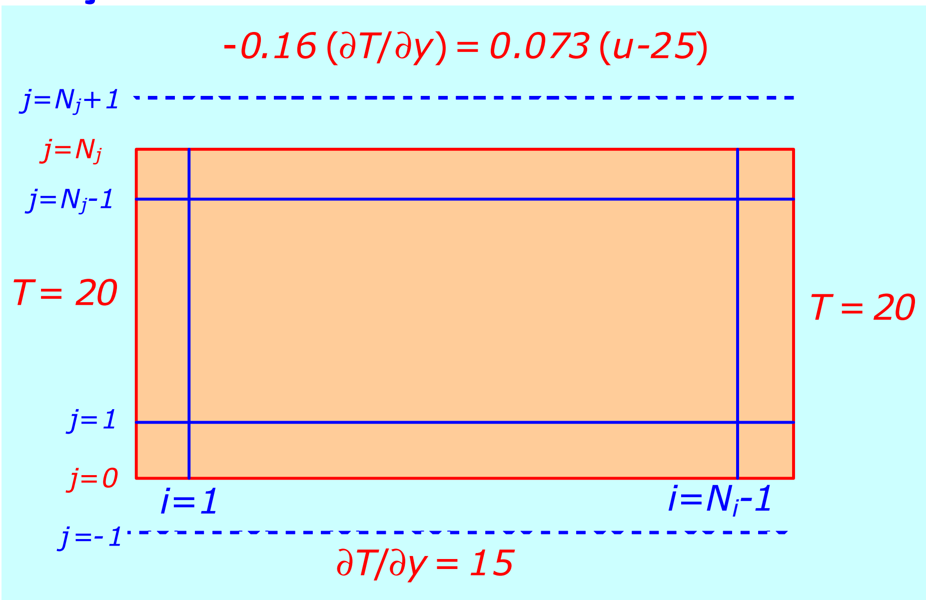
Yan kenarlarda Dirichlet tipi, yani *T* cinsinden sınır koşulları verilmiş

Alt ve üst kenarlarda Neumann tipi, yani *T* nin türevleri cinsinden sınır koşulları verilmiş

Alt ve üst kenarlarda sınır koşullarını uygulamak için kenardan *h* uzaklıkta hayali birer kenar alınabilir

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: **Türev cinsinden sınır koşulu**



Alt kenarda sınır koşulu

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,1} - T_{i,-1}}{2h} = 15 \quad \rightarrow \quad \boxed{T_{i,-1}^{k+1} = T_{i,1}^{k} - 30h}$$

Üst kenarda sınır koşulu

$$-k\frac{\partial T}{\partial y} = H\left(T_O - T_s\right) \quad \rightarrow$$

$$-k\frac{T_{i,N_j+1} - T_{i,N_j-1}}{2h} = H\left(T_{i,N_j} - T_s\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{T_{i,N_j+1}^{k+1} = T_{i,N_j-1}^{k} - \frac{2hH}{k}\left(T_{i,N_j}^{k} - T_s\right)}$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: **Türev cinsinden sınır koşulu**

Aşırı gevşetme çarpanının ω=*1.43* değeri için *59* iterasyon sonucunda *0.0001* hassasiyetli yakınsama ile elde edilen sonuçlar

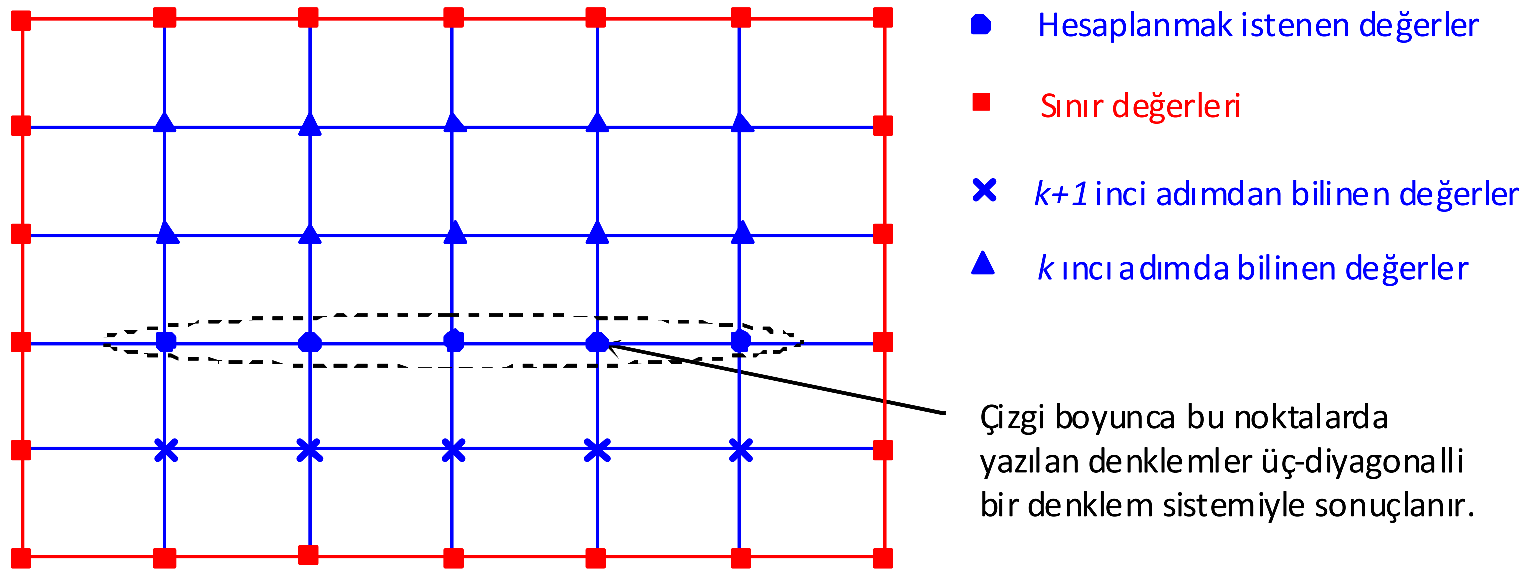
j \ i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
6		*45.930*	*61.816*	*71.962*	*76.876*	*76.876*	*71.962*	*61.816*	*45.930*	
5	*20*	*73.510*	*107.915*	*128.859*	*138.826*	*138.826*	*128.859*	*107.915*	*73.510*	*20*
4	*20*	*90.195*	*137.476*	*166.733*	*180.743*	*180.743*	*166.733*	*137.476*	*90.195*	*20*
3	*20*	*99.793*	*155.061*	*189.855*	*206.669*	*206.669*	*189.855*	*155.061*	*99.794*	*20*
2	*20*	*103.918*	*163.119*	*200.956*	*219.409*	*219.409*	*200.956*	*163.119*	*103.918*	*20*
1	*20*	*102.762*	*162.539*	*201.442*	*220.603*	*220.603*	*201.442*	*162.539*	*102.762*	*20*
0	*20*	*94.589*	*152.834*	*191.669*	*210.958*	*210.958*	*191.669*	*152.834*	*94.589*	*20*
-1		*72.762*	*132.539*	*171.442*	*190.603*	*190.603*	*171.442*	*132.539*	*72.762*	

ELİPTİK DENKLEMLER

Çizgide basit iterasyon (LGS- Line Gauss-Sidel) yöntemi:

Daha önce incelenen bütün örneklerde açık (explicit) formülasyonla çözümler yapılmıştır.

Bir çizgi (bir satır veya sütün olabilir) üzerindeki noktalar için kapalı (implicit) formülasyon uygulayarak daha hızlı çözümler elde etmek mümkündür.



ELİPTİK DENKLEMLER

Çizgide basit iterasyon (LGS- Line Gauss-Sidel) yöntemi:

Örnek problem: Levha üzerinde sıcaklık dağılımı: $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

Laplace denkleminin ayrık formu $$T_{i-1,j}+T_{i+1,j}+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}-4T_{i,j}=0$$

Satır doğrultusunda kapalı formülasyon $$T_{i,j-1}-4T_{i,j}+T_{i+1,j}=-(T_{i-1,j}+T_{i,j+1})$$

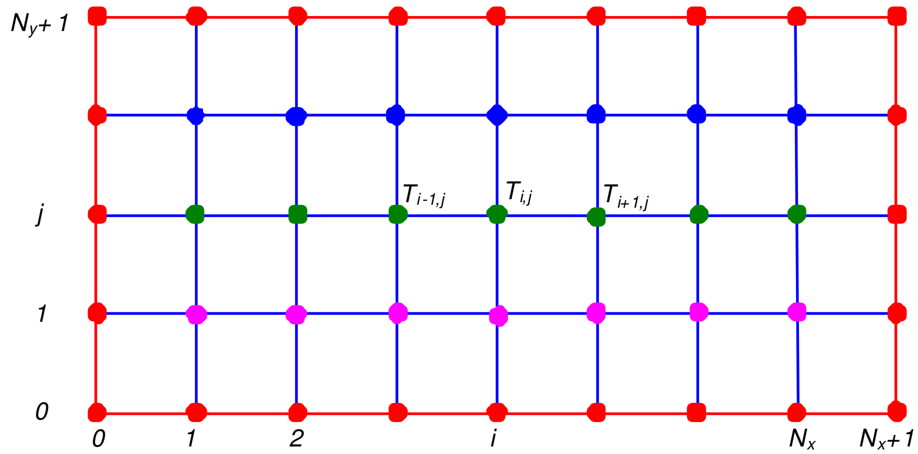
İterasyon algoritması

$$\boxed{k=1,2,3,\ldots}$$

$$T^{k+1}_{i-1,j}-4T^{k+1}_{i,j}+T^{k+1}_{i+1,j}=-(T^{k+1}_{i,j-1_{i,j-1}}+T^{k}_{i,j+1})$$

$$i=1,2,\ldots,N_x$$

$$j=1,2,\ldots,N_y$$



Not: Her satırda oluşan üç-diyagonalli denklem takımı ***Thomas yöntemi*** ile çözülür

Benzeri bir uygulama sütun doğrultusunda kapalı formülasyon kullanılarak yapılabilir

ELİPTİK DENKLEMLER

Çizgide basit iterasyon yöntemi için ardarda aşırı gevşetme:
(LGSOR – Line Gauss-Sidel Successive Over Relaxation)

Örnek problem: Levha üzerinde sıcaklık dağılımı:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

Laplace denkleminin ayrık formu

$$T_{i-1,j}+T_{i+1,j}+T_{i,j-1}+T_{i,j+1}-4T_{i,j}=0$$

Aşırı gevşetme ile iterasyon formülü

$$T_{i,j}^{k+1}=(1-\omega)T_{i,j}^{k}+\omega\frac{T_{i-1,j}^{k+1}+T_{i+1,j}^{k+1}+T_{i,j-1}^{k+1}+T_{i,j+1}^{k}}{4}$$

Satır doğrultusunda kapalı formülasyon

$$\omega T_{i-1,j}^{k+1}-4T_{i,j}^{k+1}+\omega T_{i+1,j}^{k+1}=-(1-\omega)4T_{i,j}^{k}-\omega\left(T_{i,j-1}^{k+1}+T_{i,j+1}^{k}\right)$$

NOT: Benzeri uygulama sütun doğrultusunda kapalı formülasyon ile yapılabilir

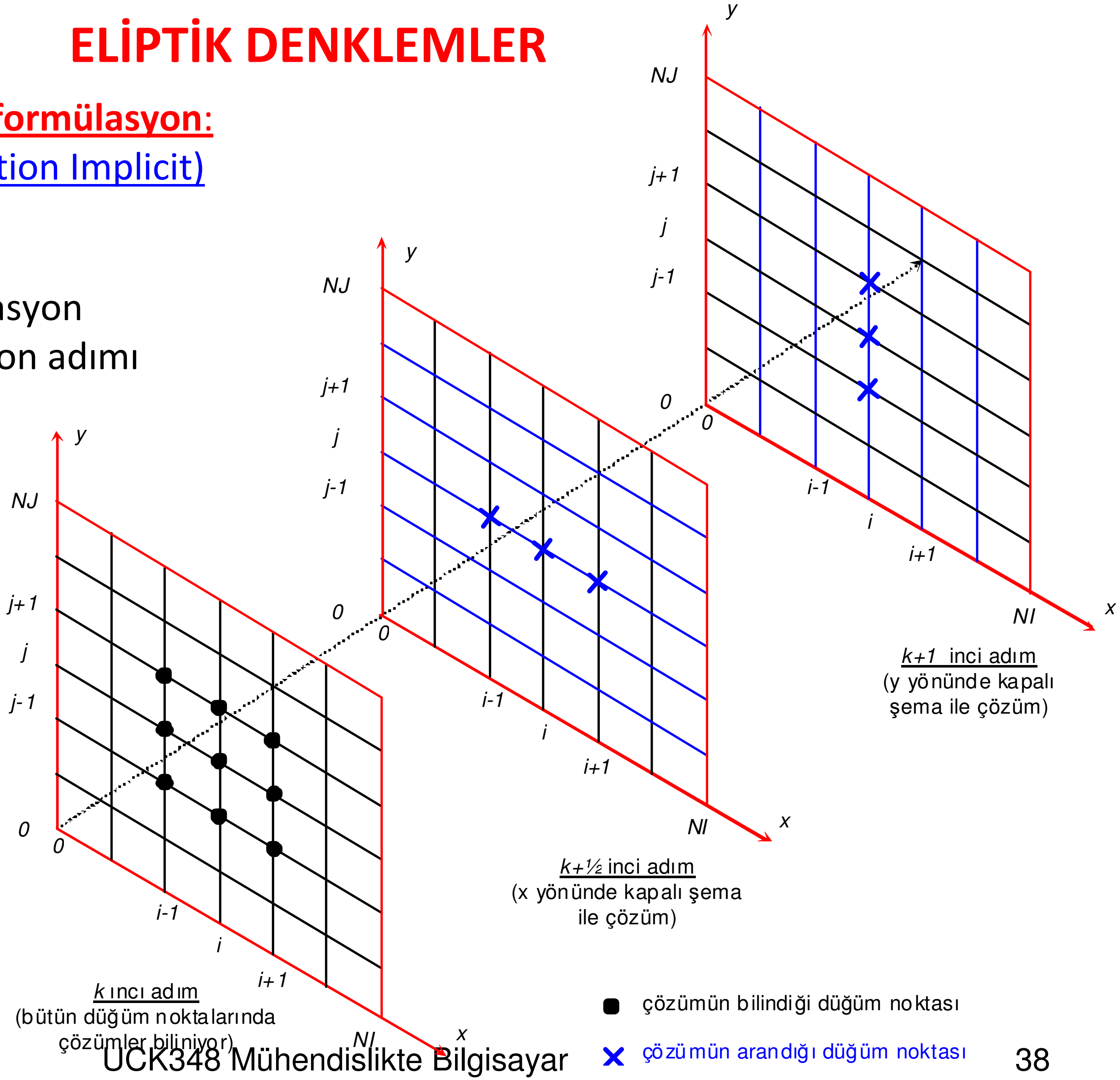
$$T_{i,j}^{k+1}=(1-\omega)T_{i,j}^{k}+\omega\frac{T_{i-1,j}^{k+1}+T_{i+1,j}^{k}+T_{i,j-1}^{k+1}+T_{i,j+1}^{k+1}}{4}$$

$$\omega T_{i,j-1}^{k+1}-4T_{i,j}^{k+1}+\omega T_{i,j+1}^{k+1}=-(1-\omega)4T_{i,j}^{k}-\omega\left(T_{i-1,j}^{k+1}+T_{i+1,j}^{k}\right)$$

ELİPTİK DENKLEMLER

Değişen yönlü kapalı formülasyon:
(ADI – Alternate Direction Implicit)

Bu yöntemde, bir iterasyon adımı iki yarım iterasyon adımı şeklinde düşünülür



ELİPTİK DENKLEMLER

Değişen yönlü kapalı formülasyon: (ADI – Alternate Direction Implicit)

$$k = 1,2,3,\ldots$$

Birinci yarım adım:
Satır doğrultusunda kapalı formül

$$T_{i-1,j}^{k+½} - 4T_{i,j}^{k+½} + T_{i+1,j}^{k+½} = -\left(T_{i,j-1}^{k+½} + T_{i,j+1}^{k}\right)$$
$$i = 1,2,\ldots,N_x$$

$$j = 1,2,\ldots,N_y$$

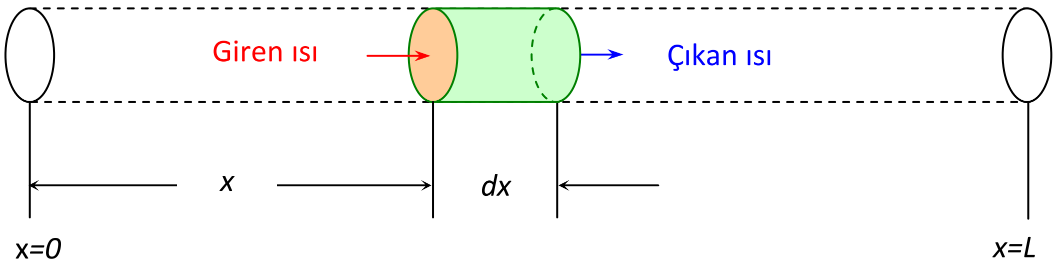
İkinci yarım adım:
Sütun doğrultusunda kapalı formül

$$T_{i,j-1}^{k+1} - 4T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j+1}^{k+1} = -\left(T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k+½}\right)$$
$$j = 1,2,\ldots,N_y$$

$$i = 1,2,\ldots,N_x$$

PARABOLİK DENKLEMLER

Örnek: Zamana bağlı, bir-boyutlu ısı akışı problemi



k, : ısı iletim katsayısı

c : birim kütle ve birim sıcaklık başına depolanan ısı

Zamana bağlı halde kontrol hacminde depolanan ısı

Kontrol hacmine soldan giren ve sağdan çıkan ısılar

$$\underbrace{\boxed{-kA\frac{dT}{dx} \qquad -kA\frac{d}{dx}\left(T+\frac{dT}{dx}dx\right)} \qquad \boxed{c\rho(Adx)\frac{dT}{dt}}}$$

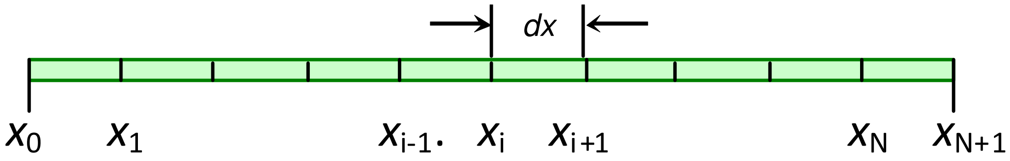
$$-kA\frac{dT}{dx}-\left[-kA\frac{d}{dx}\left(T+\frac{dT}{dx}dx\right)\right]=c\rho(Adx)\frac{dT}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k\frac{d^2T}{dx^2}=c\rho\frac{dT}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k\nabla^2 T=c\rho\frac{dT}{dt}}$$

Daha genel halde

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[k(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial x}\right]=c(x,y,z)\rho(x,y,z)\frac{dT}{dt}$$

PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: **Açık formülasyon (FTCS - Forward Time Central Space)**



x_i noktasında t_k anında zamana göre türev (İleri farklarla)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

t_k anında x_i noktası etrafında konuma göre türev (merkezi farklarla)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}$$

Türevler $\boxed{k\frac{d^2T}{dx^2} = c\rho\frac{dT}{dt}}$ Denkleminde yerleştirilerek

$$\frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

Veya düzenlenerek $\boxed{T_i^{k+1} = rT_{i+1}^k + (1-2r)T_i^k + rT_{i-1}^k}$ Burada $\boxed{r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}}$

Sınır koşulları $\boxed{\begin{array}{ll} t \geq t^0 & T = T(x_0, t) \\ & T = T(x_{N+1}, t) \end{array}}$

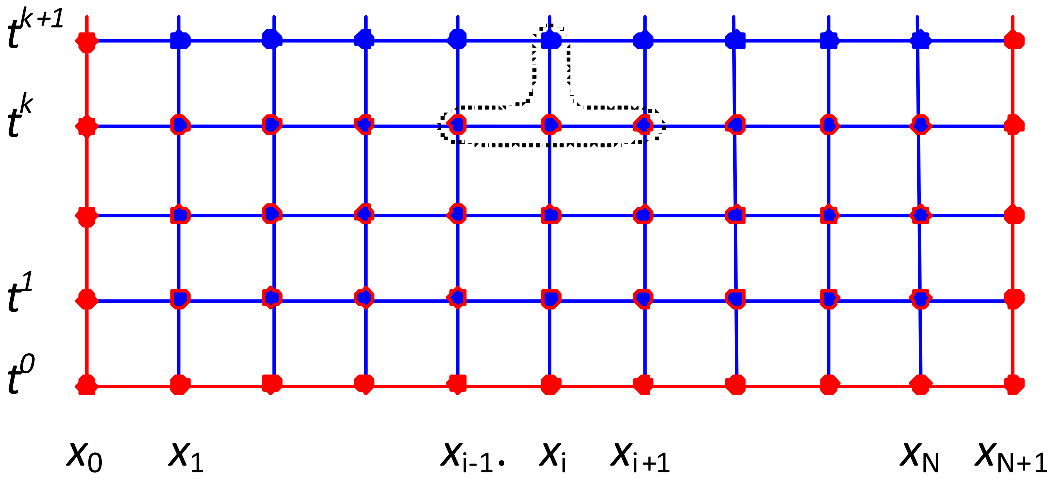
Başlangıç koşulları $\boxed{x_0 \leq x \leq x_{N+1} \quad T = T(x, t^0)}$

PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: Açık formülasyon (FTCS)

$$\boxed{\begin{array}{c} T_i^{k+1} = rT_{i+1}^k + (1-2r)T_i^k + rT_{i-1}^k \\ i = 1,2,\ldots,N \end{array}}$$

$$\boxed{k = 1,2,3,\ldots}$$



Bu formülasyon zamanda ilerleyen bir çözüm algoritmasını ifade etmektedir.

Çözüm bir $t=t^0$ başlangıç anında T sıcaklığının bütün x_i noktalarında bilinen başlangıç değerleri ile başlatılmaktadır.

Sonraki zaman adımlarında önceki adımda bulunan sıcaklıklar ve sınır koşulları gereği çubuğun iki ucundaki bilinen sıcaklık değerleri kullanılmaktadır.

Yönteme açık (explicit) şema denilmesinin nedeni, x_i noktasındaki sıcaklığın önceki adımdan bilinen sıcaklık diğerleri kullanılarak doğrudan hesaplanabilmesidir.

PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: **Örnek problem**

2 cm kalınlığında çok geniş bir çelik levha içindeki sıcaklık dağılımını zamanın fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Çelik için k = 0.13 cal/s·cm°C, c = 0.11 cal/gr°C ve ρ = 7.8 gr/cm^3 olarak verilmiştir.

Levha çok geniş olduğu için yanal doğrultulardaki ısı akışları ihmal edilerek sadece levha yüzeylerine dik doğrultudaki ısı akışı dikkate alınacaktır.

t=0 anında levha içindeki sıcaklık dağılımı

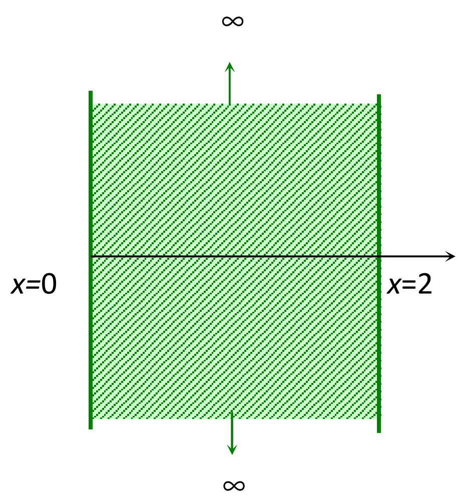
$$\boxed{T(x,0)=\begin{cases}100x & 0<x<1\\ 200-100x & 1<x<2\end{cases}}$$

Sınır koşulları

$$\boxed{T(0,t)=0°C \quad T(2,t)=0°C}$$

olarak verilmiştir

Levha kalınlığını 8 e bölerek Δx=0.25 alınız



PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: Örnek problem

Hücre sayısı $\Delta x = 0.25 \quad \rightarrow \quad N = L/\Delta x - 1 = 2/0.25 - 1 = 8$

Uç noktalarının koordinatları $x_i = i \cdot \Delta x\,, \qquad i = 0,1,\ldots,N+1$

FTCS formülasyonu $\boxed{T_i^{k+1} = rT_{i+1}^k + (1-2r)T_i^k + rT_{i-1}^k}$

Problemin çözümünde Δt zaman adımının büyüklüğü r büyüklüğünün seçimine bağlıdır.

r=0.5 halinde $\boxed{T_i^{k+1} = rT_{i+1}^k + rT_{i-1}^k}$

$$r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{rc\rho(\Delta x)^2}{k} = \frac{0.5\times 0.11\times 7.8\times (0.25)^2}{k} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = 0.206$$

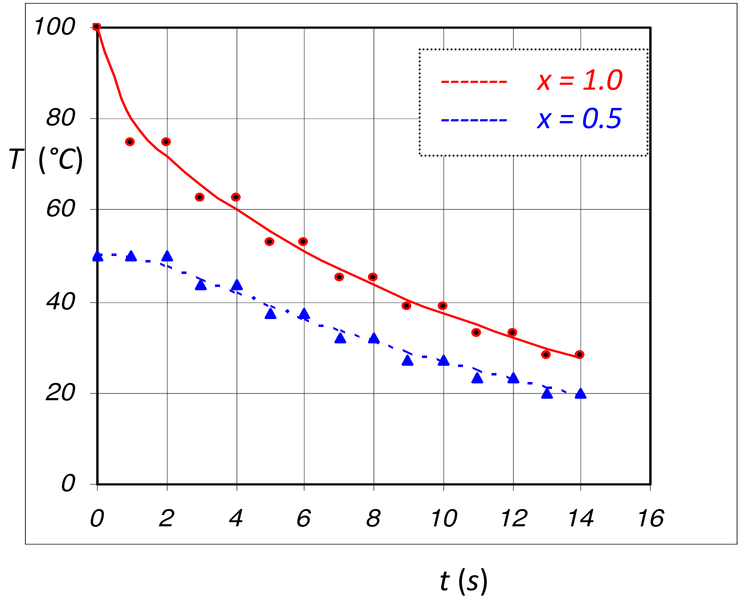
Sınır koşulları $T_0^k = 0\,, \qquad T_{N+1}^k = 0\,, \qquad k = 0,1,\ldots$

Başlangıç koşulları
$$T_i^0 = \begin{cases} 100\cdot x_i\,, & i \le (N+1)/2 \\ 200 - 100\cdot x_i\,, & i \ge (N+1)/2 \end{cases}$$

PARABOLİK DENKLEMLER

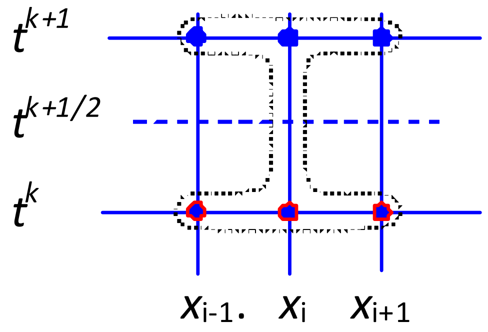
Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: Örnek problem

r = 0.5		x = 0.25	0.50		0.75	1.00	
zaman adımı	t	sayısal	sayısal	analitik	sayısal	sayısal	analitik
0	0	25.00	50.00	50.00	75.00	100.00	100.00
1	0.206	25.00	50.00	49.58	75.00	75.00	80.06
2	0.413	25.00	50.00	47.49	62.50	75.00	71.80
3	0.619	25.00	43.75	44.68	62.50	62.50	65.46
4	0.825	21.88	43.75	41.71	53.13	62.50	60.11
5	1.031	21.88	37.50	38.79	53.13	53.13	55.42
6	1.238	18.75	37.50	35.99	45.31	53.13	51.18
7	1.444	18.75	32.03	33.37	45.31	45.31	47.33
8	1.650	16.02	32.03	30.91	38.67	45.31	43.79
9	1.856	16.02	27.34	28.63	38.67	38.67	40.52
10	2.063	13.67	27.34	26.51	33.01	38.67	37.51
11	2.269	13.67	23.34	24.55	33.01	33.01	34.72
12	2.475	11.67	23.34	22.73	28.17	33.01	32.15
13	2.681	11.67	19.92	21.04	28.17	28.17	29.76
14	2.888	9.96	19.92	19.48	24.05	28.17	27.55



PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: Crank-Nicolson kapalı-şeması



FTCS şemasında konumsal türevler merkezi farklarla, zamana göre türevler ise ileri farklarla ayrıklaştırılmıştır.

Zamana göre türev zaman aralığının ortasında ayrıklaştırılmış gibi göz önüne alınırsa, merkezi farkla ayrıklaştırılmış gibi değerlendirilebilir

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{k+1/2} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

Bu durumda konumsal türevin de t^k ve t^{k+1} zaman adımlarında merkezi farklarla ayrıklaştırılmış değerlerin ortalaması olarak alınması uygun olur

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k &= \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{k+1} &= \frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}\end{aligned}\right\} \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{k+1/2} = \frac{(T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k) + (T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1})}{2(\Delta x)^2}$$

PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: **Crank-Nicolson kapalı-şeması**

Ayrıklaştırılmış türevler denklemde yerleştirilerek

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho}\frac{(T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k) + (T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1})}{2(\Delta x)^2}$$

Denklem düzenlenerek

$$\boxed{L_i T_{i-1}^{k+1} + M_i T_i^{k+1} + U_i T_{i+1}^{k+1} = R_i\ , \quad (i = 1,2,\ldots,N)}$$

Burada

$$L_i = -r \qquad R_i = rT_{i-1}^k + 2(1-r)T_i^k + rT_{i+1}^k$$

$$M_i = 2(1+r)T_i^{k+1}$$

$$U_i = -r \qquad r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$$

i = 1 için

$$\boxed{M_i T_i^{k+1} + U_i T_{i+1}^{k+1} = R_i - L_i T_{i-1}^{k+1}}$$

i = N için

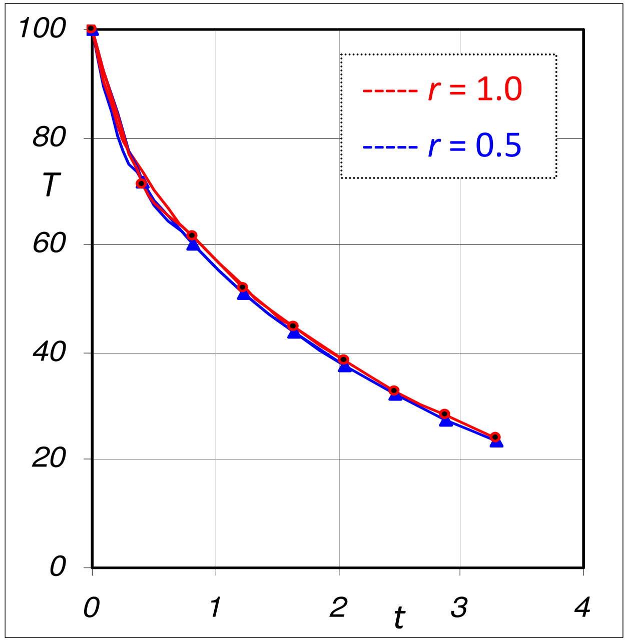
$$\boxed{L_i T_{i-1}^{k+1} + M_i T_i^{k+1} = R_i - U_i T_{i+1}^{k+1}}$$

PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: Crank-Nicolson kapalı-şeması

Crank-Nicolson şeması kapalı bir formülasyon olup "r" nin herhangi bir değeri için kararlılık sorunu yoktur.

	r = 0.5				r = 1.0			
i	*t*	*analitik*	*sayısal*	*hata*	*t*	*analitik*	*sayısal*	*hata*
0	0	100	100	0	0	100	100	0
1	0.206	80.06	82.32	2.8	0.413	71.80	71.13	0.9
2	0.413	71.80	73.48	2.3	0.825	60.11	61.53	2.4
3	0.619	65.46	66.86	2.1	1.238	51.18	51.97	1.5
4	0.825	60.11	61.34	2.0	1.650	43.79	44.67	2.0
5	1.031	55.42	56.52	2.0	2.063	37.51	38.29	2.1
6	1.238	51.18	52.21	2.0	2.475	32.15	32.88	2.3
7	1.444	47.33	48.30	2.0	2.888	27.55	28.23	2.5
8	1.650	43.79	44.71	2.1	3.300	23.62	24.23	2.6
9	1.856	40.52	41.40	2.2				
10	2.063	37.51	38.36	2.3				



Hatalar daha önce açık formülasyonla *r=0.5* için hesaplanan değerlerden küçüktür.

PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: **Teta yöntemi**

Crank-Nicolson şemasında zamana göre türev zaman aralığının ortasında merkezi farklarla açılmıştır.

Teta yönteminde zamana göre türev zaman aralığının θ çarpanı ile belirlenen bir noktasında ayrıklaştırılır

$$\frac{T_i^{k+1}-T_i^k}{\Delta t}=\frac{k}{c\rho}\frac{(1-\theta)(T_{i-1}^k-2T_i^k+T_{i+1}^k)+\theta(T_{i-1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i+1}^{k+1})}{(\Delta x)^2}$$

$$\boxed{-r\theta T_{i-1}^{k+1}+(1+2r\theta)T_i^{k+1}-r\theta T_{i+1}^{k+1}=r\theta T_{i-1}^k+[1-2r(1-\theta)]T_i^k+r\theta T_{i+1}^k}$$

Burger (1987) çözüm için optimum bir değerin $0 < \theta < 2/3$ aralığında elde edileceğini belirtmiştir

PARABOLİK DENKLEMLER

Bir-boyutlu ısı denkleminin çözümü: Teta yöntemi

r = 0.5			*sayısal çözümler*					*hatalar*				
i	*t*	*analitik*	*Teta = 2/3*	*0.878*	*1.0*	*0.5*	*0.0*	*Teta = 2/3*	*0.878*	*1.0*	*0.5*	*0.0*
0	0	100	100	100	100	100	100	0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.206	80.06	83.63	84.94	85.57	82.32	75.00	3.57	4.88	5.51	2.26	-5.06
2	0.413	71.80	74.28	75.35	75.95	73.48	75.00	2.48	3.55	4.15	1.68	3.20
3	0.619	65.46	67.44	68.25	68.74	66.86	62.50	1.98	2.79	3.28	1.40	-2.96
4	0.825	60.11	61.82	62.48	62.89	61.34	62.50	1.71	2.37	2.78	1.23	2.39
5	1.031	55.42	56.95	57.53	57.88	56.52	53.13	1.53	2.11	2.46	1.10	-2.30
6	1.238	51.18	52.61	53.15	53.47	52.21	53.13	1.43	1.97	2.29	1.03	1.95
7	1.444	47.33	48.68	49.19	49.49	48.30	45.31	1.35	1.86	2.16	0.97	-2.02
8	1.650	43.79	45.09	45.59	45.88	44.71	45.31	1.30	1.80	2.09	0.92	1.52
9	1.856	40.52	41.79	42.28	42.56	41.40	38.67	1.27	1.76	2.04	0.88	-1.85
10	2.063	37.51	38.74	39.23	39.51	38.36	38.67	1.23	1.72	2.00	0.85	1.16

En az hata θ = 0.5 için elde edilmiş olup, çözüm için optimum değerin $0 < \theta < 2/3$ aralığında elde edildiği görülmektedir.

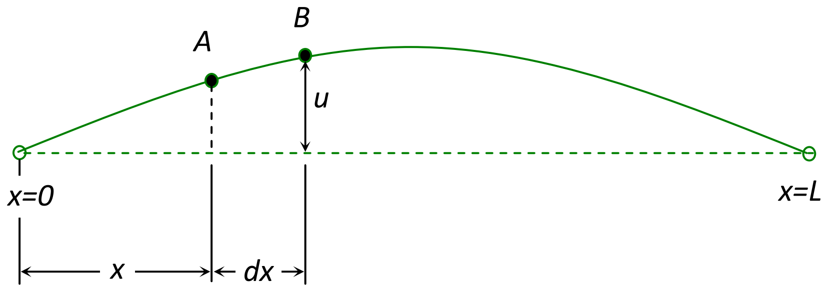
HİPERBOLİK DENKLEMLER

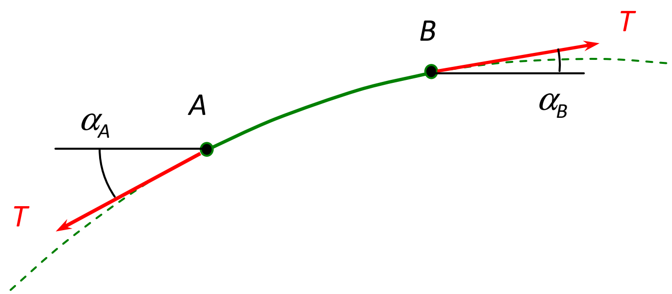
Hiperbolik denklemler çoğu kez zamana bağlıdır.

Bir ortam içerisindeki titreşimlerin ve özellikle dalgaların nasıl yayıldığını tanımlarlar.

Bu nedenle de "dalga denklemleri" olarak adlandırılırlar

Örnek: **Titreşen yay problemi**





yay elemanının her iki ucuna etkiyen kuvvetlerin düşey bileşenleri

$$\begin{cases} -T\sin\alpha_A \approx -T\tan\alpha_A = -T\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_A \\[2ex] T\sin\alpha_B \approx T\tan\alpha_B = T\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_B = T\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_A + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right] \end{cases}$$

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek: **Titreşen yay problemi**

Yay elemanına düşey yönde etkiyen net (bileşke) kuvvet $T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$

Newton kanunu $\Sigma F = ma \Longrightarrow T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \dfrac{w}{g}dx\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{gT}{w}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$

Burada *w* : Yayın birim uzunluk başına ağırlığı

Hiperbolik denklem

İki-boyutlu halde yay yerine bir membran (davul zarı vs gibi) dikkate alınırsa

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{gT}{w}\nabla^2 u}$$

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek: **Titreşen yay problemi – sayısal çözüm**

Konuma görev türev için hesaplanmış zaman adımında merkezi fark açılımı

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}$$

Zamana göre türev için hesaplanmış zaman adımı etrafında merkezi fark açılımı

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^k = \frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_{i1}^{k+1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{gT}{w}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_{i1}^{k+1}}{(\Delta t)^2} = \frac{gT}{w}\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}$$

Düzenlenerek

$$u_i^{k+1} = -u_i^{k-1} + 2u_i^k + \left(\frac{gT}{w}\right)\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}(u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)$$

Veya

$$u_i^{k+1} = \frac{gT(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) - u_i^{k-1} + 2\left[1 - \frac{gT(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}\right]u_i^k$$

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek: Titreşen yay problemi – sayısal çözüm

$$u_i^{k+1} = \frac{gT(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) - u_i^{k-1} + 2\left[1 - \frac{gT(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}\right]u_i^k$$

Kararsızlığın olmayacağı en büyük değer

$$\frac{gT(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{w}{gT}}\,\Delta x}$$

için

$$\boxed{u_i^{k+1} = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1}}$$

herhangi bir *k* zaman adımındaki hesap için daha önceki iki zaman adımına (*k* ve *k-1*) ait değerlere gereksinim olduğu görülmektedir.

Bu hesaplama tekniğinin ancak ikinci zaman adımından itibaren yürütülebileceği açıktır. Bunun için $t = 0$ anındaki ve $t = \Delta t$ ilk zaman adımındaki ötelemelerin bilinmesi gerekir.

$t = 0$ anındaki değerler başlangıç değeri olarak verilmiş olabilir.
Ancak $t = \Delta t$ ilk zaman adımındaki ötelemelerin nasıl elde edileceği hususu açık değildir.
Bu hesap için $t = 0$ ve bundan bir önceki $t = -\Delta t$ anında (!) ötelemelerin bilinmesi gerekir

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek: **Titreşen yay problemi – sayısal çözüm**

Titreşen bir yayın salınımlarının zamana göre periyodik bir fonksiyon olduğu dikkate alınırsa problemin başlangıç anı keyfi bir an olup çözüm için bu andaki hızların ve ivmelerin bilinmesi gerekmektedir. Başlangıç anında hızlar verildiği taktirde $t=-\Delta t$ anındaki ötelemeler bulunabilir.

Hızlar ötelemelerin zamana göre türevi olup $t=0 \quad da \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = g(x)$

başlangıç koşullarından birisi olarak verilmişse $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} = g(x)$

Merkezi fark açılımıyla $u_i^{-1} = u_i^1 - 2\Delta t g(x)$

Ve denklemde kullanılarak $\boxed{u_i^{k+1} = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1}} \Longrightarrow \boxed{u_i^{+1} = \frac{u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0}{2} + g(x)\Delta t}$

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: ***Sönümsüz salınan yay problemi***

Bir banjo yayı 80 cm uzunluğunda ve 1 gr ağırlıkta olup 40,000 gr lık bir kuvvetle gerilmiştir. Bir ucundan 20 cm mesafedeki bir noktadan denge konumuna kıyasla 0.6 cm çekilerek bırakılmıştır. Yay boyunca ötelemeleri zamanın fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Hesaplamalarda Δx=10 cm alınız. Yay çekildikten hemen sonra bırakıldığı için başlangıç hızları sıfır alınacaktır. Ötelemelerin her 16 adımda bir tekrarlandığını gösteriniz.

Zaman adımı

$$\Delta t = \sqrt{\frac{w}{gT}}\,\Delta x = \sqrt{\frac{1/80}{40{,}000\times 980}}\times 10 = 0.000179\ s$$

Başlangıç anında hızlar sıfır olup $g(x) = 0$

Başlangıç anındaki ötelemeler

$$u(x) = \begin{cases} 0.03x & x < 20 \\ 0.6 - 0.03(x-20) & x \geq 20 \end{cases}$$

İlk zaman adımındaki ötelemeler için

$$\boxed{u_i^{+1} = \frac{u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0}{2} + g(x)\Delta t}$$

Sonraki zaman adımlarında ötelemeler için

$$\boxed{u_i^{k+1} = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1}}$$

HİPERBOLİK DENKLEMLER - Örnek uygulama

çeşitli x_i konumlarındaki u_i değerlerinin zamanla değişimi									
k	x = 0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	0.00	0.30	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
1	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
2	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
3	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
4	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00
5	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.00
6	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0.00
7	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.40	-0.30	0.00
8	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.60	-0.30	0.00
9	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.40	-0.30	0.00
10	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0.00
11	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.00
12	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00
13	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
14	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
15	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
16	0.00	0.30	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
17	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
18	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
19	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
20	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00

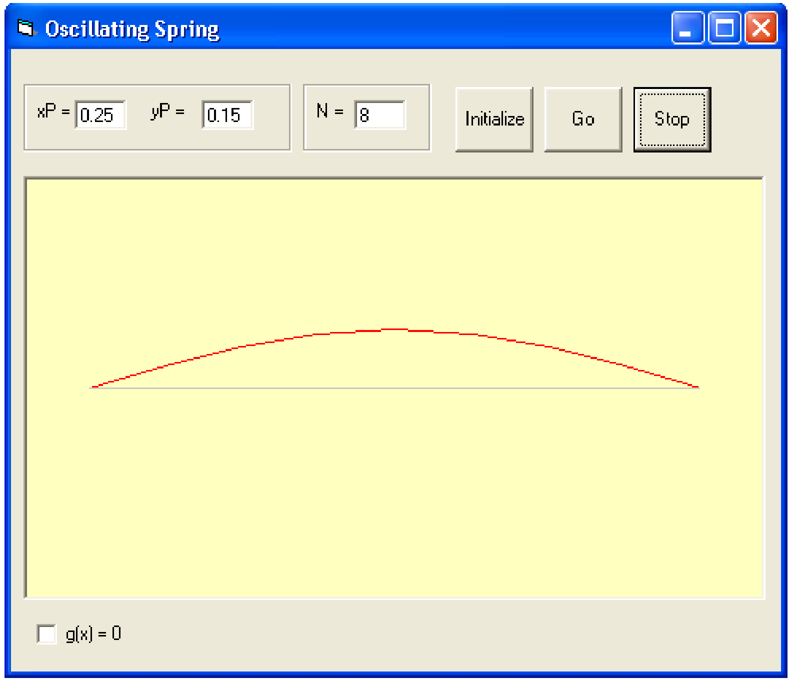
HİPERBOLİK DENKLEMLER - Örnek uygulama

Yay *16Δt* zaman adımından sonra tekrar eski konumuna gelmekte ve daha sonra da aynı hareketi tekrar etmektedir. Buna göre hareketin frekansı

$$f = \frac{1}{16 \times 0.000179} = 350\ Hz$$

Bu dalga hareketi için analitik çözüm

$$f = \left(\frac{1}{2L}\right)\sqrt{\frac{gT}{w}} = \left(\frac{1}{2 \times 80}\right)\sqrt{\frac{40{,}000 \times 980}{1/80}} = 350\ Hz$$



HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: ***Sönümlü salınan yay problemi***

Bir yayın, sönümleme etkisi altındaki titreşim hareketi yandaki denklemle modellenmektedir.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{gT}{w}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - B\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Yay uzunluğu} & L = 5\ ft, \\ \textit{yay gerilme kuvveti} & T = 24\ lb, \\ \textit{birim uzunluk başına yay ağırlığı} & w = 0.1\ lb/ft, \\ \textit{sönümleme kuvveti} & B = 2.0 \end{array}\right\} \quad \textit{olarak verilmiştir.}$$

Sınır koşulları $\quad y(0,t) = 0\,, \qquad y(L,t) = 0$

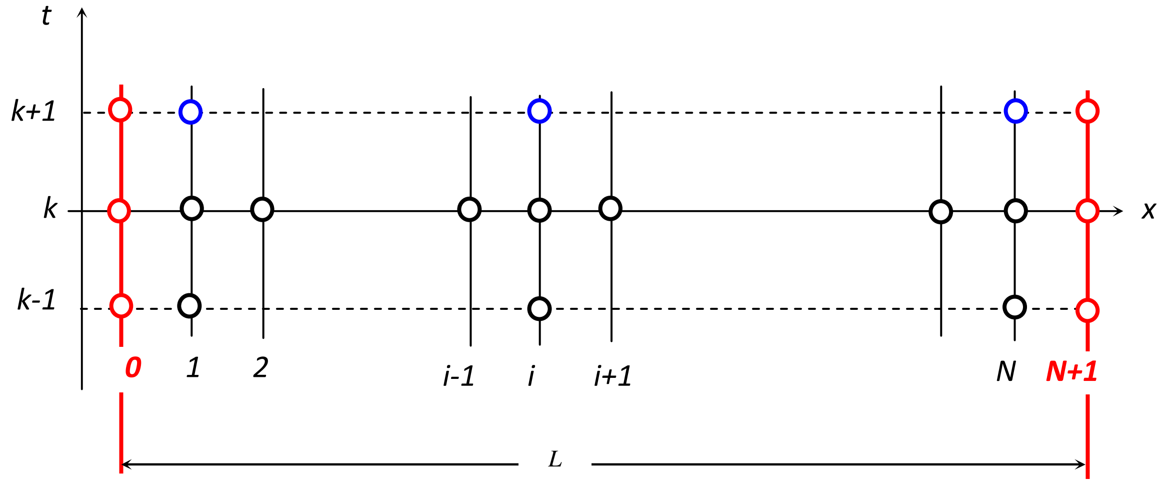
Başlangıç koşulları $\quad y(x,0) = \begin{cases} x/3\,, & 0 \le x < 3 \\ 5/2 - x/2\,, & 3 \le x < 5 \end{cases} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[y(x,0)\right] = x(x-5)$

olmak üzere bu yayın hareket denklemini çözünüz

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: ***Sönümlü salınan yay problemi***

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{gT}{w}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - B\frac{\partial y}{\partial t}$$



Ayrıklaştırmalar

Zamana göre ikinci türev

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_i^k = \frac{y_i^{k-1} - 2y_i^k + y_i^{k+1}}{(\Delta t)^2}$$

Konuma göre ikinci türev

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}$$

Zamana göre birinci türev

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_i^k = \frac{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}{2\Delta t}$$

$$c^2 = \frac{gT}{w}$$

olmak üzere denklemde yerleştirilerek

$$\frac{y_i^{k-1} - 2y_i^k + y_i^{k+1}}{(\Delta t)^2} = c^2\frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} - B\frac{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}{2\Delta t}$$

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: ***Sönümlü salınan yay problemi***

Düzenlenerek

$$y_i^{k-1} - 2y_i^k + y_i^{k+1} = \left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k) - \frac{B\Delta t}{2}(y_i^{k+1} - y_i^{k-1})$$

$$\boxed{R = \left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \quad Q = \frac{B\Delta t}{2}}$$

olmak üzere

$$(1+Q)y_i^{k+1} = R(y_{i-1}^k + y_{i+1}^k) + 2[1-R]y_i^k + (Q-1)y_i^{k-1}$$

$$\boxed{c^2 = \frac{gT}{w}}$$

Buradan $k > 0$ için

$$\boxed{y_i^{k+1} = \frac{R(y_{i-1}^k + y_{i+1}^k) + 2[1-R]y_i^k + (Q-1)y_i^{k-1}}{(Q+1)}, \quad (i = 1,2,\ldots,N)}$$

Ayrıca $k = 0$ için

$$(1+Q)y_i^1 = R(y_{i-1}^0 + y_{i+1}^0) + 2[1-R]y_i^0 + (Q-1)y_i^{-1}$$

olup, hız için verilen başlangıç koşulundan

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_i^0 = \frac{y_i^1 - y_i^{-1}}{2\Delta t} = x(x-5) \quad \Rightarrow \quad y_i^{-1} = y_i^1 - 2\Delta t\, x(x-5)$$

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: ***Sönümlü salınan yay problemi***

kullanılarak
$$2y_i^1 = R(y_{i-1}^0 + y_{i+1}^0) + 2[1-R]y_i^0 - (Q-1)2\Delta t\ x(x-5)$$

ve düzenlenerek
$$\boxed{y_i^1 = \frac{R(y_{i-1}^0 + y_{i+1}^0) + 2[1-R]y_i^0 - 2(Q-1)\Delta t\ x(x-5)}{2}}$$

Ağ yapısı ve koşullar

N+1 adet hücre için
$$\Delta x = \frac{L}{N+1}$$

Ağ yapısı
$$x_i = i \cdot \Delta x\,, \qquad (i = 0,1,2,\ldots,N,N+1)$$

Başlangıç koşulları
$$y_i^0 = \begin{cases} x_i/3\,, & 0 \le x < 3 \\ 5/2 - x_i/2\,, & 3 \le x < 5 \end{cases}, \qquad (i = 1,2,\ldots,N)$$

Sınır koşulları
$$y_0^k = 0\,, \qquad y_{N+1}^k = 0$$

HİPERBOLİK DENKLEMLER

Örnek uygulama: ***Sönümlü salınan yay problemi***

$$y_i^1 = \frac{R(y_{i-1}^0 + y_{i+1}^0) + 2[1-R]y_i^0 - 2(Q-1)\Delta t\, x(x-5)}{2}$$

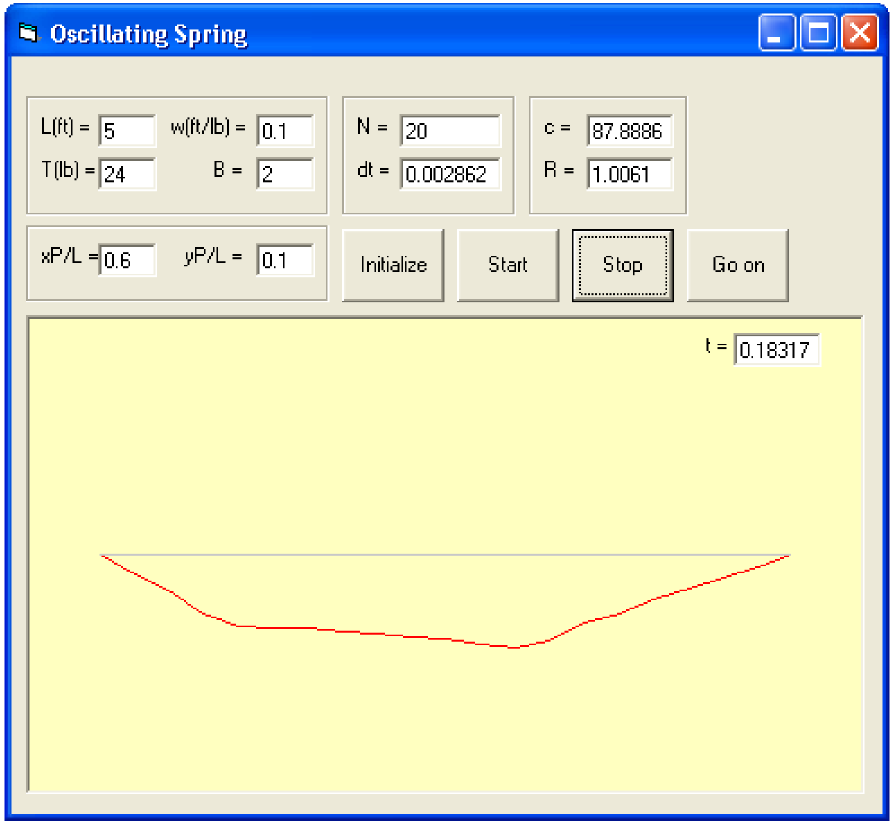
$$y_i^{k+1} = \frac{R(y_{i-1}^k + y_{i+1}^k) + 2[1-R]y_i^k + (Q-1)y_i^{k-1}}{(Q+1)}$$

$$c^2 = \frac{gT}{w} \qquad R = \left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \qquad Q = \frac{B\Delta t}{2}$$

$$y_i^0 = \begin{cases} x_i/3, & 0 \le x < 3 \\ 5/2 - x_i/2, & 3 \le x < 5 \end{cases}, \quad (i = 1,2,\ldots,N)$$

$$y_0^k = 0, \qquad y_{N+1}^k = 0$$

$$\begin{aligned} &L = 5\ ft \\ &T = 24\ lb \\ &w = 0.1\ lb/ft \\ &g = 32.185\ ft/s^2 \\ &B = 2 \end{aligned}$$



HİPERBOLİK DENKLEMLER - D'Alembert çözümü

Titreşen yay probleminin analitik çözümü *D'Alembert çözümü* olarak bilinir.

F ve *G* keyfi fonksiyonlar olmak üzere çözüm

$$\boxed{u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)}$$

şeklinde önerilmiş olsun

Türevleri alınarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial (x+ct)} \frac{\partial (x+ct)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial (x-ct)} \frac{\partial (x-ct)}{\partial t} = F'c - G'c \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (F'' + G'')$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial (x+ct)} \frac{\partial (x+ct)}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial (x-ct)} \frac{\partial (x-ct)}{\partial x} = F' + G' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F'' + G''$$

Denklemde yerleştirilerek $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{gT}{w} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $\Rightarrow$ $c^2 (F'' + G'') = \frac{gT}{w} (F'' + G'')$

eşitliğin $\boxed{c^2 = \frac{gT}{w}}$ için sağlandığı görülmektedir