Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

Frekans örnekleme yöntemiyle FIR filtre tasarımı

Ayrık Fourier dönüşümü

$$H(\Omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$$

ve ters dönüşümü

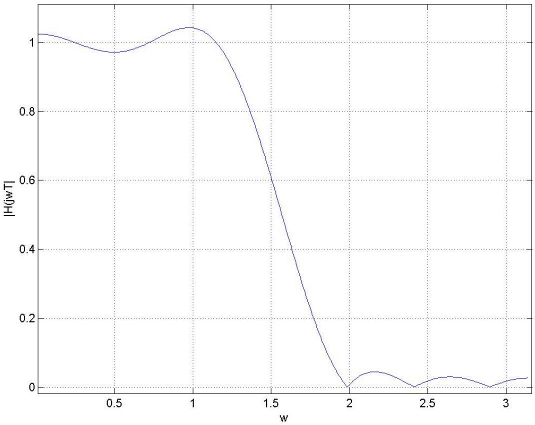
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(\Omega_k) e^{jnk\frac{2\pi}{N}}.$$

İstenen bir frekans cevabı $H_d(\Omega_k)$ için ters dönüşüm kullanılarak filtrenin impuls cevabı bulunabilir. Bunun için

- tasarlanması istenen filtrenin frekans cevabı örneklenir $(H_d(\Omega_k)\ k = 0, 1, 2, ...N-1)$
- ve bu frekans örnekleri için ters dönüşüm alınır.

Frekans örnekleme yöntemiyle FIR filtre tasarımı

Örnekler arasındaki değerler bilinmediği için bu örnekler arasında osilasyon gözlenmektedir. Ayrıca süreksizlik noktalarında Gibbs osilasyonları bulunmaktadır.



Frekans örnekleme yöntemiyle FIR filtre tasarımı

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(\Omega_k) e^{jnk\frac{2\pi}{N}} \right] z^{-n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1} \right)^n = \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(\Omega_k)}{1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1}}$$

$H_d(\Omega_k) = A_d(\Omega_k) e^{\phi_d(\Omega_k)}$ alırak devam edilebilir.

N tek ve simetrik

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(\Omega_k)e^{jnk\frac{2\pi}{N}} \\
h(n-\tfrac{N-1}{2}) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} H(\Omega_k)e^{j(n-\frac{N-1}{2})k\frac{2\pi}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\left(A(0)+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(\Omega_k)\cos((n-\tfrac{N-1}{2})k\tfrac{2\pi}{N})\right)
\end{aligned}
$$

N çift ve simetrik

$$
h(n) = \frac{1}{N}\left(A(0)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} 2A(\Omega_k)\cos((n-\frac{N-1}{2})k\frac{2\pi}{N})\right)
$$

Frekans örnekleme yöntemiyle FIR filtre tasarımı

N tek ve ters-simetrik

$$h(n) = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(\Omega_k)\sin\left(\left(\frac{N-1}{2}-n\right)k\frac{2\pi}{N}\right)\right)$$

N çift ve ters-simetrik

$$h(n) = \frac{1}{N}\left(A\left(\frac{N}{2}\right)\sin\left(\pi\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} 2A(\Omega_k)\sin\left(\left(\frac{N-1}{2}-n\right)k\frac{2\pi}{N}\right)\right)$$

Örnek

Örnek : $M = 4$ uzunluklu lineer fazlı bir FIR filtresi ile $H(0) = 1$ $H(\pi/2) = 0.5$ örnek değerleri verilen bir genlik cevabı gerçeklenmek isteniyor. $h(n)$ impuls yanıtını bulun.
M çift, filtre simertik veya ters-simetrik olabilir. Ters-simetrik durumunda $H(0) = 0$ olmalı (iki hafta önceki ders). Bu durumda filtre yanlızca simetrik.

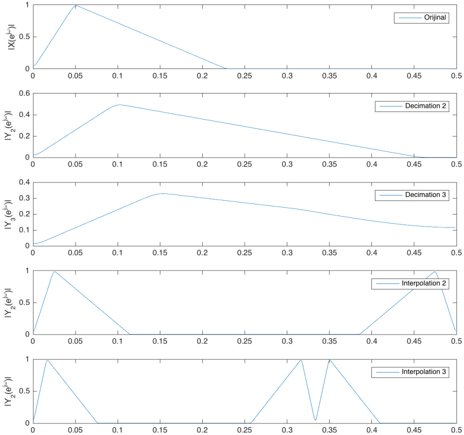
$$h(n) = \frac{1}{4}\left(A(0) + 2A(\Omega_1)\cos((n - \frac{N-1}{2})\frac{\pi}{2})\right)$$

burdan $h(0) = \frac{1}{4}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ $h(1) = \frac{1}{4}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ bulunur. $h(0) = h(3)$ ve $h(1) = h(2)$.

Frekans Örnekleme Yön. ile Filtre Tasarım Adımları

1. Geçiş Bandında en az iki örnek olacak şekilde Filtre derecesi (N) belirlenir.
2. İstenen frekans cevabına ilişkin $H_d(k)$ örnekler seçilir.
3. Ters frekans cevabından ters dönüşümler $h(n)$'ler elde edilir.
4. İsterleri sağlayıp sağlamadığını kontrol et ve N değerini düzenle.

```
>>F = [0,0.1,0.46,1]; A=[0,1,0,0];
>>x = fir2(256,F,A);
```



$M(wT) = |A(wT)|$ olmak üzere

$$H(jwT) = M(wT)e^{\phi(wT)} = A(wt)e^{\theta(wT)}$$

olarak alalım. Burda $A(wT)$ değiştikce ,$\theta(wT)$ ninde işareti değişmektedir. $F = wT/2\pi$ şeklinde frekansı normalize edelim ($0 \leq F \leq 1/2$). 4 tip filtre için $A(wT)$ şu şekilde yazılabilir:

1. tip

$$A(F) = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k \cos(2\pi kF)$$

2. tip

$$A(F) = \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos(2\pi(k-0.5)F)$$

3. tip

$$A(F) = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k \sin(2\pi kF)$$

4. tip

$$A(F) = \sum_{k=1}^{N/2} a_k \sin(2\pi(k-0.5)F)$$

$(\alpha = (N-1)/2)$. $n-1=\alpha$ (1. ve 3 tip filtre) ve $n = N/2$ (2. ve 4. tip filtre) için aşağıdaki şekilde birleşik forma sokabiliriz

$$A(F) = Q(F)\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(2\pi kF).$$

Burda $Q(F)$ 1., 2., 3. ve 4. tip filtreler için sırasıyla 1, $\cos\pi F$, $\sin 2\pi F$, $\sin\pi F$ eşittir.

Optimal Filtre tasarımı

Arzulanan fonksiyonun $D(F)$ ve bulunmaya çalışılan fonksiyonu $A(F)$ alırsak. İki fonksiyon arasındaki hata $E = D - A$ şeklinde tanımlanır. Bu hata fonksiyonu $A(F)$ fonksiyonu nedeniyle iki değer arasında salınacaktır. Tanımlanacak bir ağırlık fonksiyonuyla bu hatanın geçirme ve söndürme bantlarındaki bağıl ölçüsü belirlenebilir.

$$E(F) = W(F)|D(F) - A(F)|$$

Hata fonksiyonu bir çok parametre kümesi için verilen bir hata değeri arasında kalır. Fakat yanlızça bir parametre kümesi için maksimum hatayı minimuma indirir. Bu da Chebyshev optimilite kriteridir.

$$\min_{a(k)} \|E(F)\| = \max_{F \in \mathcal{F}} \{W(F)|D(F) - A(F)|\}$$

Parks ve McClellan Chebyshev yaklaşımının bir özelliğini kullanarak bu problemi yeniden formilize etmiştir.

Optimal Filtre tasarımı

Alternasyon Teoremi : $\mathcal{F}$ ([0 π] nin bir alt kümesi) kümesinde $Q(e^{jF})$ nin tek ve $D(e^{jF})$ nin en iyi Chebyshev yaklaşıklığı olabilmesi için gerek ve yeter koşul : Hata fonsiyonunun $\mathcal{F}$ üstünde en az $M+2$ ($M = (N-1)/2$) ekstremal (alternasyon) frekansı olmasıdır. Yani

$$E(F_i) = -E(F_{i+1})$$

ve

$$E(F_i) = (-1)^i \delta = (-1)^i \max_{F \in \mathcal{F}} |E(F)|$$

olacak şekilde $\mathcal{F}$ kümesinde, $F_1 < F_2 < ... < F_{M+2}$ gibi $M+2$ frekans noktası olmalıdır.

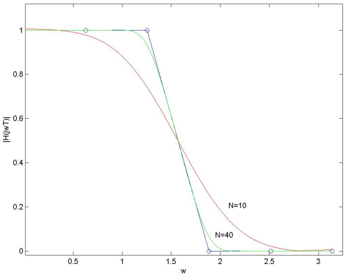
Not : Eğer ekstremal frekanslar biliniyorsa bu durumda $a(k)$ ve δ bulunabilir. Fakat başlangıçta ekstremal frekanslar bilinmez.

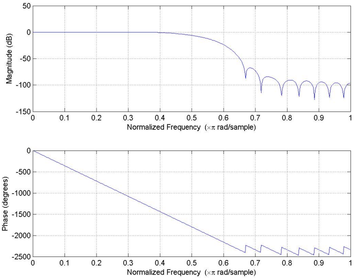
Optimal Filtre tasarımı

Remez Algoritması :

1. Başlangıçta rasgele ektremal frekansları seç.
2. $a(k)$ ve δ ları bul.
3. $E(F)$'i hesapla.
4. $E(F)$'üzerinden ekstremal frekansları bul.
5. Yeni ektremal frekanslar için tekrar $a(k)$ ve δ ları bul.
6. bu işlemi optimum ekstremal frekansları bulana kadar devam ettir.

```
>>f=[0 .2 .4 .6 .8 1];
>>a=[1 1 1 0 0 0];
>>b=fir2(10,f,a);
```





```
>>b=remez(10,f,a);
```