Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

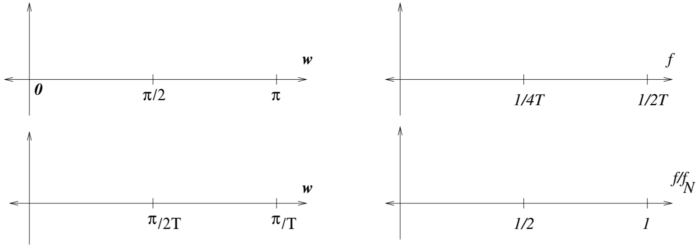
Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

Sayısal ve Analog Frekanslar Arasındaki İlişkiler



Sonlu impuls yanıtlı filtre (SIY) (*Finite impulse response (FIR)*)

$x(k)$ işareti, impuls cevabı $h(k)$ olan filtreye uygulandığında çıkış, $y(k)$, konvolisyon işlemi yardımıyla bulunur

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(k-i).$$

$h(i) = b(i)$ $i = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$ için FIR filtrenin katsayılarının direk impuls cavabına eşit olduğu görülür ($H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{L} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}}$).

- *non-recursive olarak gerçeklenebilir.*
- *Geri besleme olmadığı için her durumda kararlıdır.*
- *FIR filtre sonlu hafızaya sahiptir. Çıkışın eski değerleri tutulmaz.*
- *non-recursive olduğu gibi recursive de gerçeklenebilir.*
- *non-recursive gerçeklemelerde kuantalam hatası IIR filtrelerle karşılaştırıldığında ihmal edilebilecek boyutlardadır.*

FIR filtrenin özellikleri

- **Lineer faz**

$$H(jwT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)e^{-jkwT} = |H(jwT)|e^{j\phi(wT)}$$

Filtrenin lineer fazlı olması için α sabit olmak üzere

$$\phi(wT) = -\alpha wT$$

$$H(jwT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)e^{-jkwT} = |H(jwT)|e^{-j\alpha wT}$$

reel ve kompleks kısımları ayrılırsa

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(k)\cos(kwT) = |H(jwT)|\cos(\alpha wT)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(k)\sin(kwT) = |H(jwT)|\sin(\alpha wT)$$

ilk eşitlik $\sin(\alpha wT)$ ikinci $\cos(\alpha wT)$ çarpılarak

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(k)\cos(kwT)\sin(\alpha wT) - \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\sin(kwT)\cos(\alpha wT) = 0$$

veya

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(k)\sin((\alpha - k)wT) = 0$$

bulunur ve $\alpha = \frac{N-1}{2}$ **ve** $h(k) = h(N-k-1)$ için çözüm vardır.

Örnek: N=4 için

$$\sum_{k=0}^{3} h(k)\sin((\alpha - k)wT) = 0$$

$\alpha = 3/2$ açık ifade

$$\begin{aligned} h(0)\sin(\alpha wT) + h(1)\sin((\alpha-1)wT) \quad & + h(2)\sin((\alpha-2)wT) \\ & + h(3)\sin((\alpha-3)wT) = 0 \end{aligned}$$

$$h(0)\sin(\frac{3}{2}wT) + h(1)\sin(\frac{1}{2}wT) + h(2)\sin(\frac{-1}{2}wT) + h(3)\sin(\frac{-3}{2}wT) = 0$$

Eğer $h(k) = h(3-k)$ ise bu durumunda $(h(0) = h(3), h(1) = h(2))$ eşitlik doğrudur.
Örnek: N=5

$$\sum_{k=0}^{4} h(k)\sin((\alpha-k)wT) = 0$$

$\alpha = 2$ açık ifade

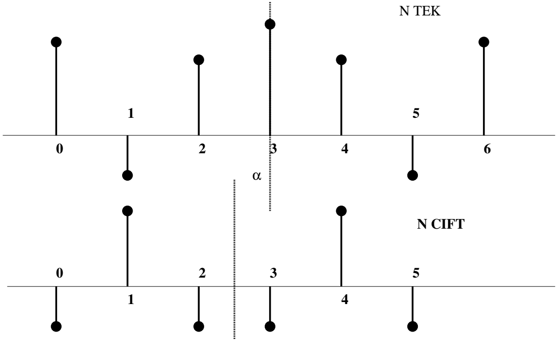
$$h(0)\sin(\alpha wT) + h(1)\sin((\alpha-1)wT)$$
$$+h(2)\sin((\alpha-2)wT) + h(3)\sin((\alpha-3)wT) + h(4)\sin((\alpha-4)wT) = 0$$

$$h(0)\sin(2wT) + h(1)\sin(wT) + h(2)\sin(0) \quad +h(3)\sin(-wT) +h(4)\sin(-2wT) = 0$$

aynı şekilde $h(k) = h(4-k)$ için doğru.

$\phi(wT) = -\alpha wT$ alınmıştı bu durumda faz geçikmesi $\frac{-\phi}{wT}$ ve grup gecikmeleri $\frac{-d\phi}{dwT}$ sabittir ve α ya eşittir.

$\alpha = \frac{N-1}{2}$ **ve** $h(k) = h(N-k-1)$



Frekans cevabı

N Tek:1. tip FIR filtre olarak adlandırılacak.
Sıfır simetri merkezi olacak şekilde öteleyelim

$$H(jwT) = \sum_{r=-\alpha}^{\alpha} h'(k) e^{-j(r+\alpha)wT} = e^{-j\alpha wT} \sum_{r=0}^{\alpha} a(r)\cos(rwT)$$

$a(0) = h(\alpha)$ ve $a(r) = 2h(\alpha - r)$ dir. Bu durumda genlik cevabı

$$|H(jwT)| = \left| \sum_{r=0}^{\alpha} a(r)\cos(rwT) \right|$$

ve faz cevabı

$$\theta(wT) = -\alpha wT + c$$

olarak bulunur. $c = 0$ veya π değerini alır. Toplamın işaretine göre değeri belli olur. Eğer $c = 0$ ise lineer fazlı $c = \pi$ ise parça-parça lineer fazlıdır.

N CİFT: 2. tip FIR filtre olarak adlandırılacak.
$r = k - \alpha - 0.5 = k - \frac{N}{2}$ alınarak

$$H(jwT) = e^{-j\alpha wT} \sum_{r=1}^{N/2} a(r)\cos((r - \frac{1}{2})wT)$$

$a(r) = 2h(N/2 - r)$ olmak üzere. Bu durumda genlik cevabı

$$|H(jwT)| = \left| \sum_{r=1}^{N/2} a(r)\cos((r - \frac{1}{2})wT) \right|$$

ve faz cevabı $c = 0$ veya π değerini için

$$\phi(wT) = -\alpha wT + c$$

olarak bulunur.
NOT: Bu filtrede $wT = \pi$ için $|H(jwT)| = 0$ bizim için bunun anlami 2. tip FIR filtrenin yüksek ve bant söndüren FIR filtre tasarımında kullanamayacağımızdır.

N TEK

$$H(jwT) = e^{-j\alpha wT}\sum_{r=0}^{\alpha} a(r)\cos(rwT) = e^{-j\alpha wT}\sum_{r=0}^{\alpha}\frac{a(r)}{2}\left[e^{jrwT} + e^{-jrwT}\right]$$

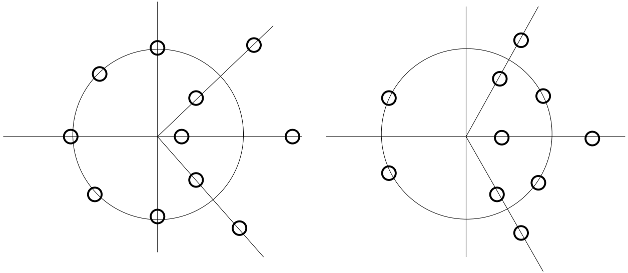
$z = e^{jwT}$ için

$$H(z) = z^{-\alpha}\sum_{r=0}^{\alpha}\frac{a(r)}{2}(z^{r} + z^{-r})$$

buradan

$$H(z^{-1}) = z^{\alpha}\sum_{r=0}^{\alpha}\frac{a(r)}{2}(z^{-r} + z^{r})$$

Her ikiside aynı sıfırlara sahiptir. $z = re^{\pm j\theta}$ ve $z^{-1} = \frac{1}{e^{\pm j\theta}}$
Eğer $H(z)$ kompleks eşlenik kutuplara sahipse $H(z^{-1})$ de birim çembere resiprokal sıfırlara sahiptir.



CIFT TEK

N CIFT için aynı durum söz konusudur. Bu durumda $z = -1$ de sıfır vardır.

Ters-simetrik katsayılı FIR filtre

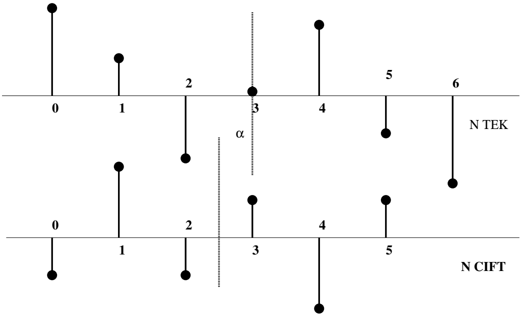
Lineer fazli FIR filtreye $\phi(wt) = -\alpha wT$ şartıyla başlamıştık. Bunun yerine

$$\phi(jwT) = K - \alpha wT$$

şartını aldığımızda FIR filtre Parça-parça lineer bir faz gecikmesi ve sabit grup gecikmesine sahip olur. Bu durum

$$\alpha = \frac{N-1}{2},\ K = \pm\pi/2,\ h(k) = -h(N-k-1)$$

koşullarını daha önceki simetri koşulu yerine buluruz. Bu impuls cevabının ters-simetrik olduğu durumdur.



N tek ve ters-simetrik durum için frekans yanıtı Bu 3. tip FIR filtredir.

$$H(jwT) = \sum_{r=-\alpha}^{\alpha} h'(k) e^{-j(r+\alpha)wT} = je^{-j\alpha wT} \sum_{r=1}^{\alpha} a(r)\sin(rwT)$$

buradan

$$H(jwT) = e^{-j(\alpha wT + \frac{\pi}{2})} \sum_{r=1}^{\alpha} a(r)\sin(rwT)$$

ve $a(r) = 2h(\alpha - r)$.

Genlik cevabı

$$|H(jwT)| = \left| \sum_{r=1}^{\alpha} a(r) \sin(rwT) \right|$$

ve faz cevabı

$$\phi(wT) = -\alpha wT + \frac{\pi}{2} + c$$

şeklinde bulunabilir. $c = 0$ veya π toplamın işaretine bağlı olarak. $wT = 0$ ve $wT = \pi$ için genlik cevabı sıfırdır.

N CIFT ve ters-simetrik durum için frekans yanıtı: Bu 4. tip FIR filtredir.
$n = k - \alpha - \frac{1}{2} = k - N/2$

$$H(jwT) = je^{-j\alpha wT} \sum_{r=1}^{N/2} a(r) \sin((r - \frac{1}{2})wT)$$

$a(r) = 2h(N/2 - r)$ olmak üzere. Genlik cevabı

$$|H(jwT)| = \left| \sum_{r=1}^{N/2} a(r) \sin((r - \frac{1}{2})wT) \right|$$

ve faz cevabı

$$\theta(wT) = -\alpha wT + \frac{\pi}{2} + c$$

olarak bulunur. $c = 0$ veya π.

Ters-simetrik FIR filtrenin sıfırlarının yerleşimi