Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

Outline I

Recursive Filtre tasarımı

Amaç: Tasarlanmış bir analog filtrenin sayısal filtreye dönüştürülmesi.

$$\boxed{\text{Sürekli zamanda tasarlanmış filtre } (H_C(jw)) \longrightarrow \text{Sayısal filtre (H(z))}}$$

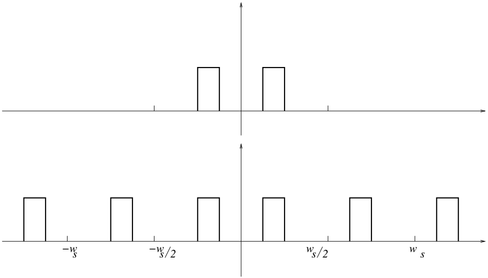
- Hangi dönüşüm ?
- Eğer analog filtre kararlıysa, dönüm sonundaki sayısal filtre kararlımı ?
- Sayısal filtre başlangıçtaki karakteristikleri sağlıyormu ?

Impulse-değişmezlik yöntemi

Filtreye ilişkin sürekli zaman darbe cevabının örneklenerek ayrık zamanlı filtreye ilişkin darbe cevabı

$$h(n) \triangleq Th_c(nT), \quad n \in Z$$

elde edilebilir(T örnekleme peryodu). Bu yöntem "impulse-invariance transformation" olarak adlandırılır.



$$H(e^{jw}) = H_c(jw/T), \quad 0 \le w \le w_s/2$$

Impulse-değişmezlik yöntemi

Sürekli zaman sistemine ilişkin ayrık kutuplara sahip tf. fonk.

$$H_c(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_k}$$

Ters Laplace dönüşümü alınarak

$$h_c(t) = \sum_k A_k e^{s_k t} u(t)$$

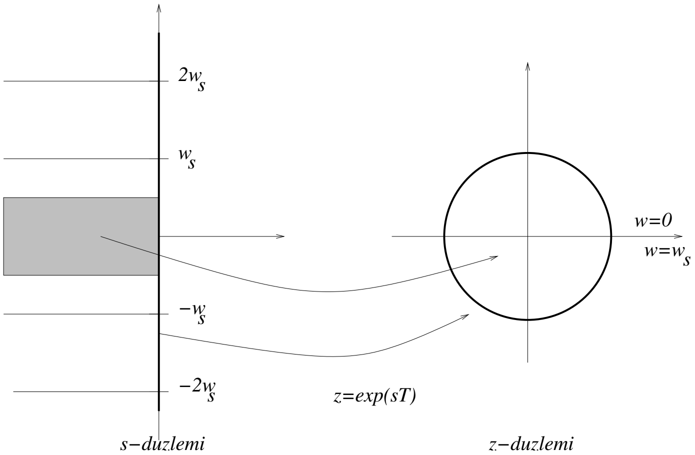
elde edilir burada

$$h(n) = \sum_k A_k T e^{s_k T n} u(n) = T \sum_k A_k (e^{s_k T})^n u(n)$$

bu ayrık zamanlı sisteme ilişkin

$$H(z) = \sum_k \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$|e^{s_k T}| < 1$ olduğu unutulmamalı.



$w \geq w_s/2$ için $|H(jw)| \longrightarrow 0$ ise SORU: Yüksek ve bant söndüren filtre gerçeklenebilirmi?

Örnek

Birinci dereceden 500Hz ve 550Hz arasını geçiren (Bant geçiren) butterworth filtresini Impulse-değişmezlik yöntemini kullanarak sayısal filtre olarak gerçekleyin.

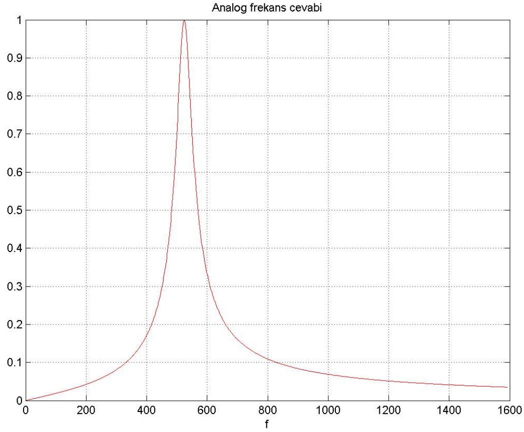
1. Tablodan
$$H(s_n) = \frac{1}{s_n + 1}$$
2. Alçak geçiren $\longrightarrow$ Bant geçiren.
$$s_n = \frac{w_0}{B}\left(\frac{s}{w_0} + \frac{w_0}{s}\right)$$
$$H(s) = \frac{Bs}{s^2 + Bs + w_0^2}$$
burda $B = w_h - w_l$ ve $w_0^2 = w_h w_l$
3. (**??**) nolu eşitlik kullanılarak $H(z)$ bulunur.
$$H(z) = \frac{Bz(z-q)}{z^2 - 2r\cos(bt)z + r^2}$$

$(p^2 + Bp + w_0^2 = (p+a)^2 + b^2)$ burda $r = e^{-aT}$ ve
$q = r(\frac{a}{b}\sin(bT) + \cos(bT))$.

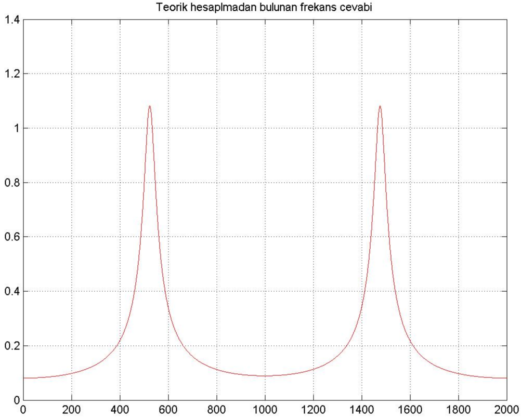
Örnek : Matlab yardımıyla aynı filtreyi gerçekleyin.

```
>>wh=2*pi*550;wl=2*pi*500;fs=2000;
>>T=1/fs;B=wh-wl;w0=sqrt(wh*wl); a=B/2;
>>b=sqrt((w0^2 - B^2/4));
>>[As]=[0 B 0];
>>[Bs]=[1 2*a a^2 + b^2];
>>tf(As,Bs) %Transfer function:
314.2 s
-------------------------
s^2 + 314.2s + 1.086e007
```

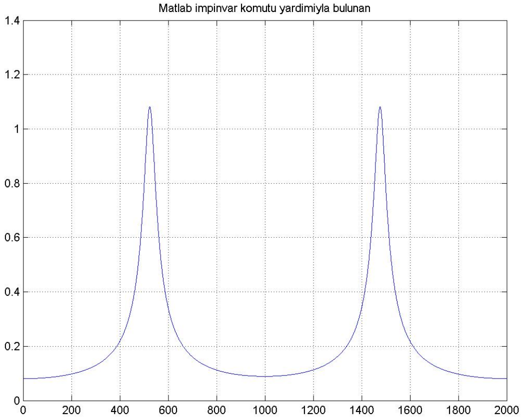
```
>>% Analog frekans cevabi
>>[H,w]=freqs(As,Bs,N);plot(w/(2*pi),abs(H),'r');
```



```
>>% Teorik hesaplamadan...
>>r=exp(-a*T);q=r*(a/b*sin(b*T)+cos(b*T));
>>[Az1]=[B -q*B 0];[Bz1]=[1 -2*r*cos(b*T) r^2];
>>[Hz1,fz1]=freqz(Az1,Bz1,N,'whole',fs);
>>figure; plot(fz1,abs(Hz1)/fs,'r');
```

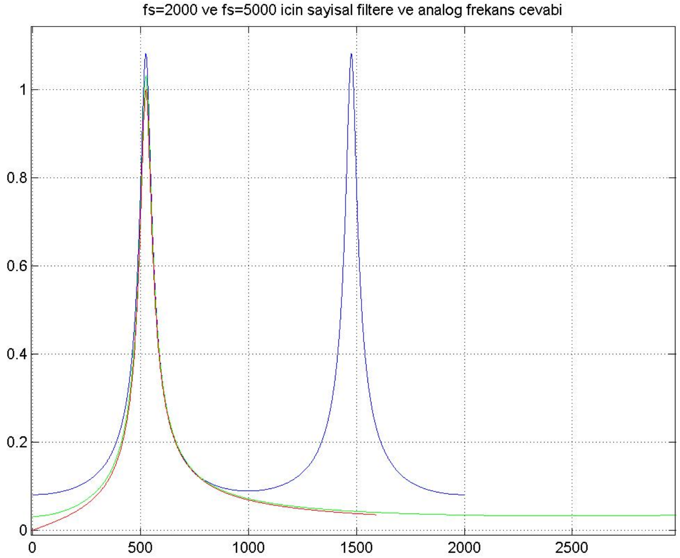


```
>>[Az, Bz]=impinvar(As,Bs,fs)
>>[Hz fz]=freqz(Az,Bz,N,'whole',fs);
>>figure; plot(fz,abs(Hz));
```



Not: Matlab yardımıyla bütün tasarımın yapılışı (ders4_ek.m).

Farklı örnekleme frekansları için karşılaştırma



Türeve yaklaşım ile filtre tasarımı

İleri Euler yöntemi kullanılarak $\frac{dx(t)}{dt} = f(t)$ differansiyel denklemi yaklaşık olarak hesaplanabilir:

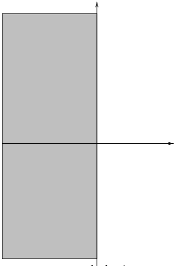
$$\frac{dx(t)}{dt} \approx x(nT) - x((n-1)T) = Tf(nT)$$

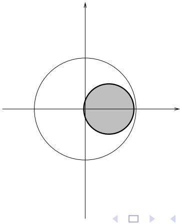
Bu yaklaşıklık $T \to 0$ için doğrudur.

$X(z) - z^{-1} = TF(Z) \longrightarrow$ 1-z$^{-1}T = F(z)/X(z)$

$\frac{dx}{dt} = f(t) \longrightarrow sX(s) = F(s) \Rightarrow s = F(s)/X(s)$

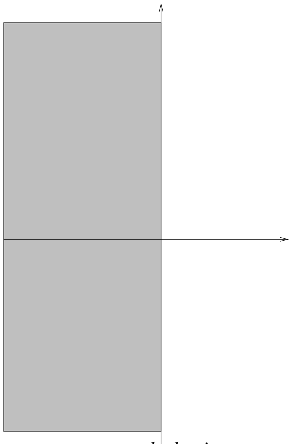
Bunun sonucu olarak $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$ alınarak $H(s)$'den $H(z)$'ye geçilebilir.

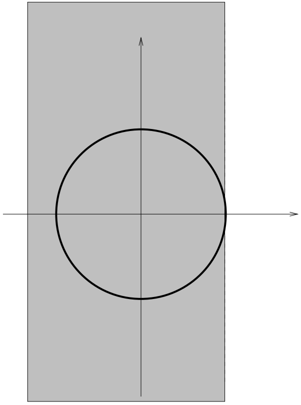




Türeve yaklaşım ile filtre tasarımı

$x((n+1)T) - x(n) = Tf(nT)$ alındığında ise

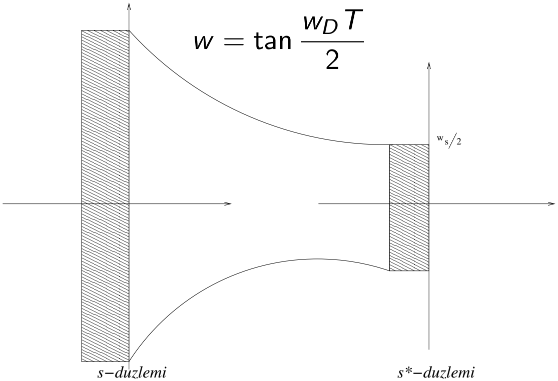




Trapezoidal (Bilineer) dönüşümü ile filtre tasarımı.

$$x(nT) - x((n-1)T) = Tf((n-1)T) + \frac{T}{2}(f(nT) - f((n-1)T))$$

Buradan $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ bulunur. Burada $s = jw$ ve $z = e^{jw_D T}$ alarak w_D ile w arasındaki ilişkiyi gözlemleyelim.



Buradan z ye geçelim ($z = e^{-jw_D T}$).
Örnek :

```
 [AA BB]=bilinear(As,Bs,fs)
HH,ff=freqz(AA,BB,N,'whole',fs);
figure; plot(ff,abs(HH));
```