Sayısal Filtreler ve Sistemler
EHB 433

Prof. Dr. Müştak E. Yalçın

Istanbul Technical University
Faculty of Electrical and Electronic Engineering

mustak.yalcin@itu.edu.tr

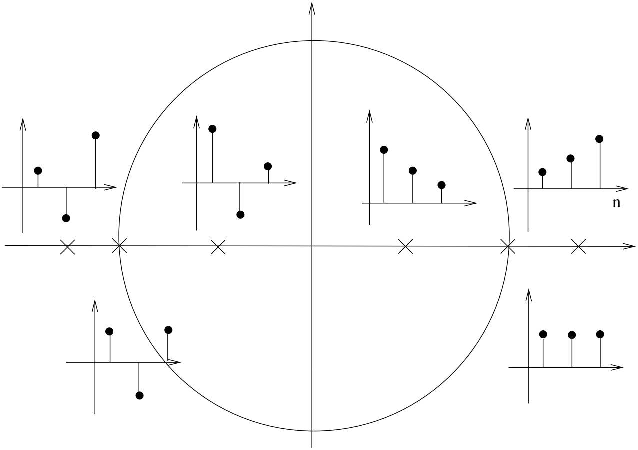
Outline I

Transfer fonksiyonu ve kararlılık

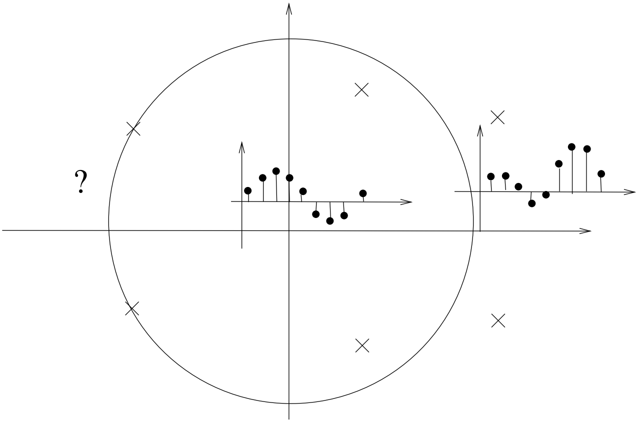
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Örnek : $H(z) = \frac{(b_0+b_1z^{-1})}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}} = \frac{z(b_0z+b_1)}{z^2-a_1z^1-a_2}$
Karakteristik denklem ? $(z^2 - a_1z - a_2)$ sıfır ?$(0, -b_1/b_0)$ kutup ?
Kararlılık:
Kararlılık koşulu: $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty$.
Kutuplar reel eksen üstünde olduğu durum.
Transfer fonksiyonu $(H(z) = \sum H_i(z))$ $H_i(z) = \frac{r_i}{1-az^{-1}}$ için
$h_i(n) = r_ia^k \;\; k \geq 0$.

Transfer fonksiyonu ve kararlılık



Kutuplar kompleks eşlenik olduğu durum.

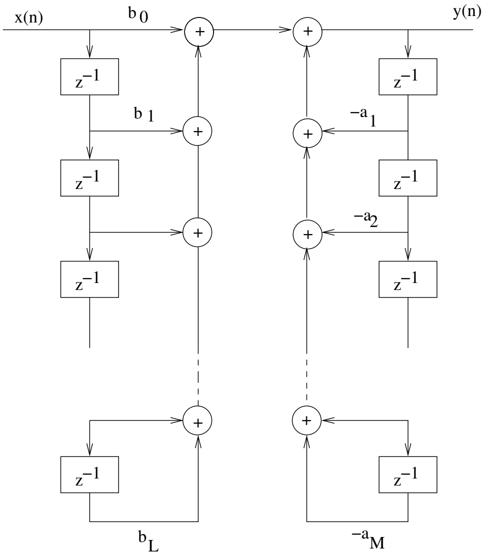


Transfer fonksiyonu tasarım methodları

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{L} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}}$$

- Katsayılarının kuantalama hatası,
- kayan nokta aritmetik yuvarlatma gürültüsü,
- kuantalama hatalarının yayılımı,
- hasaplama yükü,
- bellek kullanımı,
- programcı bakış acısından karmaşıklığı ve esnekliği.

Doğrudan Gerçekleme



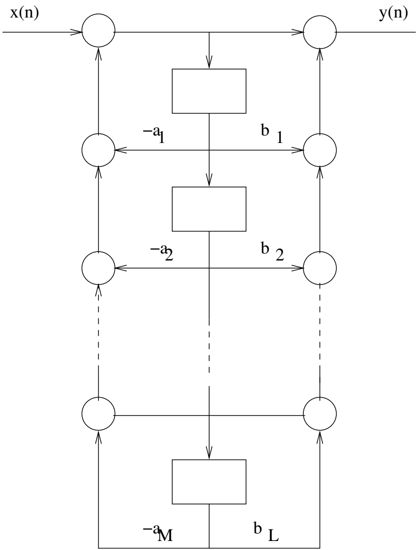
Direkt II (Kanonik $L = M$)

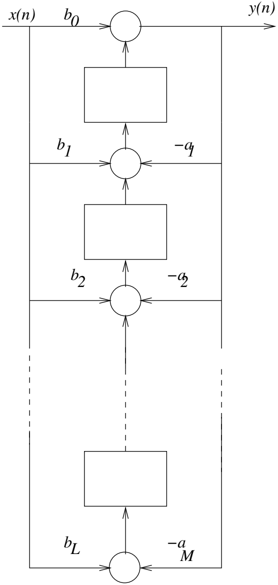
$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{L} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}} X(z)$$

$$Y(z) = M(z) \sum_{i=0}^{L} b_i z^{-i}$$

$$M(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}}$$

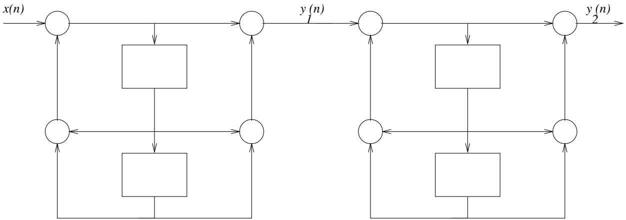
Direkt II (Kanonik)




x(n)
b0
y(n)
b1
−a1
b2
−a2
bL
−aM

Seri Gerçeklemeler

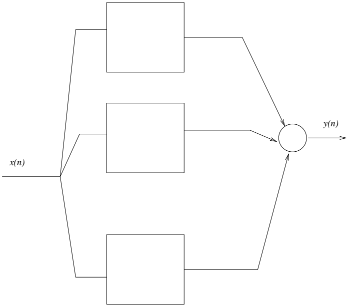
$$H(z) = G\prod_{i=1}^{K}\frac{b_{k0}+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}}{1+a_{k1}z^{-1}+a_{k2}z^{-2}}$$



$[sos, G] = tf2sos(b, a)$

Paralel Gerçeklemeler

$$H(z) = \sum_{i=1}^{L} c_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{M} \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}}$$



$[R, p, C] = residuez(b, a);$

Karşılaştırma:

- Direk II metodunun I'e göre avantajı, bu methodun diğerine göre yarı bellek kullanımına ihtiyaç duymasıdır. Hesaplam yükleri aynıdır.
- Direk ve transpose metodlarında kuantalama hatası üst üste toplanır (özellikle yüksek dereceli filtrelerde) bu hata kaskat ve paralel metodlarda azalmaktadır.

Ayrık fourier dönüşümü

$x(t)$ →[örnekleme] →$\hat{x}(t)$→[Laplace dönüşümü]→ $\hat{X}(s)$→ $[z = e^{Ts}]$→$X(z)$ z-dönüşümü → $[z = e^{jwT}]$ → $X(jwT)$ fourier dönüşümü.

$$X(jwT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-jkwT}$$

$x(k) = 0, 1, 2, ... N - 1$ olduğundan

$$X(jwT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-jkwT}$$

olur. Yukardaki iki eşitlikde frekansın sürekli bir fonksiyonudur. Bilgisayarda (daha doğrusu sayısal hesaplama yapan bir makinada) hesaplamanın yapılabilmesi için frekansın ayrık bir fonksiyon haline getirilmesi gerekir.

Bu amaçla w yerine $n\Omega$ yazılır. Bunun anlamı frekans Ω aralıklarla örneklenir. Bu durumda ayrık fourier dönüşümü

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-jkn\Omega T}.$$

$x(k)$, $k = 0, 1, 2..., N-1$ peryodu N olan $\tilde{x}(k)$ $((\tilde{x}(k) = \tilde{x}(k+N)))$ işaretinin bir peryodu olarak düşünülür ve frekans örnekleme aralığı

$$\Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

şeklinde seçilir.

DFT Özellikleri

- Lineerlik
- Simetri

$$\mathrm{Re}[\mathrm{X(k)}] = \mathrm{Re}[\mathrm{X(N-k)_N}]$$
$$\mathrm{Im}[\mathrm{X(k)}] = -\mathrm{Im}[\mathrm{X(N-k)_N}]$$

- Dairesel öteleme

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 1 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\mathrm{DFT[x(n-n_0)w(n)]} = \mathrm{e^{-jn_0k\Omega}\tilde{X}(k)W(k)}$$

- Dairesel Konvolisyon : Lineer konvolisyon, z-dönüşümü ve fourier dönüşümü yardımıyla çarpma işlemine dönüşür. Dairesel konvolisyon işlemininde ayrık fourier dönüşümünü çarpma işlemine dönüştürür.

$$x(n) \oplus h(n) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} x(i)\tilde{h}(n-i)\right] w(n) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} h(i)\tilde{x}(n-i)\right] w(n)$$

Lineer ve dairesel konvolisyon arasındaki ilişki :

Dairesel konvolisyondan lineer konvolisyona ulaşmak için ($x(n)$ N uzunluklu dizi ve $y(n)$ M uzunluklu dizi olsun) iki diziyide M+N-1 uzunluklu birer dizi yapacak kadar 0 eklenir.
Dizilerden biri sonsuz uzunlukda ise : Sonsuz uzunlukdaki dizi N uzunluklu alt dizilere ayrılır ve sonlu uzunluklu (uzunluğu M olsun) diziyle dairesel konvolisyonu yapılır. Her alt dizi daha sonra M-1 noktası üst üste getirilerek toplanır (overlap-add).
Hızlı Fourier Dönüşümü *(Fast Fourier Transform (FFT))*
Ödev: Verilen kaynakların herhangi birinden HFD'nü çalışın.