END331
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI I
DERS NOTLARI
İKİNCİ BÖLÜM
(2018-2019)

Dr. Y. İlker Topcu & Dr. Özgür Kabak

Teşekkür:
Prof. W.L. Winston'ın "Operations Research: Applications and Algorithms" kitabı ile Prof. J.E. Beasley's YA ders notlarının bu ders notlarının oluşturulmasına olan katkıları yüzünden her iki profesöre de teşekkür ederiz....
Rastlayabileceğiniz tüm hataların sorumluluğu bize aittir. Lütfen bizi bu hatalardan haberdar ediniz!
İstanbul Teknik Universitesi OR/MS takımı

İÇİNDEKİLER

5.2 DUALİTE

5.2.1 Primal – Dual

Herhangi bir DP ile ilişkisi olan bir diğer DP ***dual*** (eşters) olarak isimlendirilir. Dual bilgisi ekonomik ve duyarlılık analizi ile ilgili ilginç açıklamalar sağlar. Duali alınan DP ***primal*** olarak isimlendirilir. Primal model enbüyükleme sorunu ise dual enküçükleme sorunu olur. Bu kuralın tam tersi de doğrudur.

Dualitede temel prensip; Primal modeldeki kısıtların Dual modeldeki *karar değişkenleri* ile; Primal modeldeki karar değişkenlerinin Dual modeldeki *kısıtlarla* ilişkili olmasıdır.

5.2.2 Bir DP'nin Dualini Bulma

Normal enbüyükleme sorununun duali ***normal enküçükleme*** sorunudur.

Normal enbüyükleme sorunu: tüm değişkenler ≥ 0; tüm kısıtlar ≤ .

Normal enküçükleme sorunu: tüm değişkenler ≥ 0; tüm kısıtlar ≥ .

Benzer şekilde, normal enküçükleme sorununun duali de normal enbüyükleme sorunudur.

Normal Enbüyükleme Sorununun Dualini Bulma

PRİMAL

$$
\begin{array}{ll}
\text{maks } z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{öyle ki} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
 & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
 & x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}
$$

DUAL

$$
\begin{array}{ll}
\text{min } w = & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\
\text{öyle ki} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
 & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
 & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
 & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
 & y_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{array}
$$

Normal Enküçükleme Sorununun Dualini Bulma

PRİMAL

$$
\begin{array}{ll}
\text{min } w = & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\
\text{öyle ki} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
 & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
 & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
 & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
 & y_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{array}
$$

DUAL

$$
\begin{array}{lll}
\text{maks } z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{öyle ki} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \le b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \le b_2 \\
 & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \le b_m \\
\end{array}
$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Normal olmayan modellerin dualini bulma

Temel prensip;

- Primal modelde bir kısıt normalse; Dual modelde ilgili karar değişkeni normaldir.
- Primal modelde bir kısıt *normal değil ise*; Dual modelde ilgili karar değişkeni *normal değildir.*
- Primal modelde bir karar değişkeni normalse; Dual modelde ilgili kısıt normaldir.
- Primal modelde bir karar değişkeni normal değil ise; Dual modelde ilgili kısıt normal değildir.

Dikkat! Kısıtlar için normal olup olmama problem tipine göre değişir!

Normal Olmayan Enbüyükleme Sorununun Dualini Bulma

- Eğer *i.* primal kısıt ≥ kısıtsa, ilgili dual değişken $y_i \le 0$ şeklinde olmalıdır.
- Eğer *i.* primal kısıt eşitlikse, ilgili dual değişken y_i "işareti sınırlandırılmamış" (serbest; unrestricted in sign - urs) değişkendir.
- Eğer *i.* primal değişken urs ise, *i.* dual kısıt eşitliktir.

Normal Olmayan Enküçükleme Sorununun Dualini Bulma

- Eğer *i.* primal kısıt ≤ kısıtsa, ilgili dual değişken $x_i \le 0$ şeklinde olmalıdır
- Eğer *i.* primal kısıt eşitlikse, ilgili dual değişken x_i "işareti sınırlandırılmamış" (urs) değişkendir.
- Eğer *i.* primal değişken urs ise, *i.* dual kısıt eşitliktir

5.2.3 Dual Teoremi

Primal ve dualin en iyi amaç fonksiyon değerleri eşittir (eğer sorunlar için en iyi çözüm varsa).

Zayıf dualiteye göre; dual için herhangi bir olurlu çözümün *w*-değeri en az primal için herhangi bir olurlu çözümün *z*-değeri kadar olabilir → $z \leq w$.

- Dual için herhangi bir olurlu çözüm primal amaç fonksiyon değeri için sınır olarak kullanılabilir.
- Primal ve dual DP problemleri ile ilgili aşağıdaki koşullardan bir tanesi geçerlidir:
  - Her ikisinin de en iyi çözümü vardır ve birbirine eşittir: $z^* = w^*$.
  - Bir problemde çözüm sınırsız iken diğer problem olurlu değildir.
  - Her iki problem de olurlu değildir.
- Primal enbüyükleme sorunu ise en iyi tablonun sıfırıncı satırından en iyi dual çözüm nasıl okunur?

  'y_i dual değişkeninin en iyi değeri'
  = 'en iyi R_0'da s_i'nin katsayısı' (kısıt i ≤ ise)
  = –'en iyi R_0'da e_i'nin katsayısı' (kısıt i ≥ ise)
  = 'en iyi R_0'da a_i'nin katsayısı' – M (kısıt i = ise)
- Primal enküçükleme sorunu ise en iyi tablonun sıfırıncı satırından en iyi dual çözüm nasıl okunur?

  '*xi* dual değişkeninin en iyi değeri'
  = 'en iyi R_0'da s_i'nin katsayısı' (kısıt i ≤ ise)
  = –'en iyi R_0'da e_i'nin katsayısı' (kısıt i ≥ ise)
  = 'en iyi R_0'da a_i'nin katsayısı' + M (kısıt i = ise)

Örnek: Dual Teoremi

Aşağıda DP modeli ve en iyi tablosu verilen problemi dikkate alarak dual modeli bulunuz ve en iyi çözümde dual değişkenlerin değerlerini belirleyiniz.

Primal DP:

Min z = $2\,x_1 + 3\,x_2$

$0{,}5\,x_1 + 0{,}25\,x_2 \leq 4$ (Şeker Kısıtı)
$x_1 + 3\,x_2 \geq 20$ (C vit. Kısıdı)
$x_1 + x_2 = 10$ (10 oz'luk şişe kısıdı)
$x_1 , x_2 \geq 0$ (işaret kısıtlamaları)

Primal DP – en iyi simpleks tablosu

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	0	0	0	-1/2	(1-2M)/2	(3-2M)/2	25	z=25
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1=5

5.2.4 Ekonomik Yorum

Primal normal enbüyükleme sorunu olduğunda, dual değişkenler karar vericiye sağlanabilecek kaynakların değeri ile ilgili olur. Bu yüzden dual değişkenlerden çoğu kez ***kaynak gölge fiyatları*** olarak söz edilir.

Örnek: Dakota Mobilya örneğini dikkate alınız.

PRİMAL

x_1, x_2, x_3 üretilen sıra, masa ve sandalye sayısını göstersin. Haftalık kar \$$z$ iken DP modeli:

$$\text{maks } z = 60x_1+30x_2+20x_3$$
$$8x_1+\ \ 6x_2+\ \ \ x_3 \leq\ 48 \quad \text{(Tahta kısıtı)}$$
$$4x_1+\ \ 2x_2+1.5x_3 \leq\ 20 \quad \text{(Cilalama kısıtı)}$$
$$2x_1+1.5x_2+0.5x_3 \leq\ \ 8 \quad \text{(Marangozluk kısıtı)}$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

DUAL

Farzedelim ki; bir girişimci Dakota'nın tüm kaynaklarını (hammadde) satın almak istiyor. Dual sorunda y_1, y_2, y_3 sırasıyla bir m^2 tahta, bir saat cilalama işçiliği ve bir saat marangozluk için ödenmesi gereken ücreti gösterir.

\$$w$ de kaynak satın alma toplam maliyetini gösterir.

Kaynak ücretleri Dakota'yı satışa teşvik edecek kadar yüksek; girişimciyi vazgeçirmeyecek kadar az olmalıdır. Bu durumda da toplam satın alma maliyeti toplam kar kadar olur.

$$\text{min } w = 48y_1+ 20y_2+ 8y_3$$
$$8y_1 +\ \ 4y_2 +\ \ 2y_3 \geq 60 \quad \text{(Sıra kısıtı)}$$
$$6y_1 +\ \ 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 \quad \text{(Masa kısıtı)}$$
$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 \quad \text{(Sandalye kısıtı)}$$
$$y_1,y_2,y_3 \geq 0$$

Dakota örneği en iyi tablosundan ve Lindo sonuç raporundan Primal – Dual model ilişkisi inceleyiniz.

Dakota örneği - En iyi Tablo.

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	ST	TD
1	0	5	0	0	10	10	280	Z = 280
0	0	- 2	0	1	2	8	24	s_1 = 24
0	0	- 2	1	0	2	- 4	8	x_3 = 8
0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2	x_1 = 2

Dakota örneği - Lindo Sonuç Raporu

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      280.0000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         2.000000          0.000000
        X2         0.000000          5.000000
        X3         8.000000          0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    TAHTA)        24.000000          0.000000
   MONTAJ)         0.000000         10.000000
 MARANGOZ)         0.000000         10.000000
    TALEP)         5.000000          0.000000
 NO. ITERATIONS=        2
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1       60.000000        20.000000         4.000000
       X2       30.000000         5.000000         INFINITY
       X3       20.000000         2.500000         5.000000
                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
    TAHTA       48.000000         INFINITY        24.000000
   MONTAJ       20.000000         4.000000         4.000000
 MARANGOZ        8.000000         2.000000         1.333333
    TALEP        5.000000         INFINITY         5.000000
```

5.3 DUALİTE VE DUYARLILIK

Dual teoremine göre; herhangi bir temel olurlu çözümün en iyi olabilmesi için ilgili dual çözümün dual olurlu olması gerekir. Bu sonuç yardımıyla aşağıdaki duyarlılık analizleri yapılabilir:

- Bir temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değiştirilmesi
- Temel dışı değişkenin sütununun değiştirilmesi
- Yeni bir faaliyet ilave edilmesi

Örnek: Dakota örneğinde dual modelin en iyi çözümünü dikkate alarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- Masanın fiyatı (x_2'nin amaç fonksiyonu katsayısı) hangi aralıkta değişirse mevcut temel en iyi olarak kalır?

- Masanın fiyatı 43$ olarak değiştirilir, kullandığı tahta 5, montaj işçiliği 2 ve marangozluk saati 2 olursa mevcut temel en iyi olarak kalır mı?
- Dakota sehpa üretmeyi düşünmektedir. Fiyatı 15$, – Birer birim marangozluk, montaj ve tahta kullanacaktır. Bu ürünü üretmek karlı mıdır?

5.4 TÜMLER GEVŞEKLİK TEOREMİ

Primal ve Dual çözümleri birbiriyle ilişkilendiren bir teoremdir. Bu teorem ile en iyi çözümde primal modeldeki kısıtlar ile dual modeldeki değişkenlerin ve primal modeldeki değişkenler ile dual modeldeki kısıtların ilişkileri ortaya konmaktadır.

Karar değişkenleri x_1, x_2,…, x_n olan m tane ≤ kısıtı ve bu kısıtlarla ilgili s_1, s_2,…, s_m gevşek değişkenlerini içeren bir normal en büyükleme probleminin (PRIMAL) duali karar değişkenleri y_1, y_2,…, y_m; n tane ≥ kısıtı ve bu kısıtlarla ilgili e_1, e_2,…, e_n fazlalık değişkenlerini içeren bir normal en küçükleme problemi (DUAL) olacaktır.

Bu problemler için $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ bir primal olurlu çözüm; $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots y_m]$ ise bir dual olurlu çözüm olsun. **x** ve **y** en iyi çözüm olabilmeleri için yalnız ve yalnız aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$s_i\, y_i = 0 \ (i = 1,2,\ldots,m)$$
$$e_j\, x_j = 0 \ (j = 1,2,\ldots,n)$$

Diğer bir deyişle, en iyi çözümde, bir modeldeki değişken (y_i veya x_j) pozitif ise diğer modelde bu değişkenle ilişkili kısıt aktiftir (s_i veya e_j = 0). Bir modeldeki kısıt aktif değil ise (s_i veya e_j > 0) diğer modelde bu kısıtla ilişkili değişken (y_i veya x_j) 0 değerini alır.

Tümler gevşeklik teoreminden faydalanarak dual modelinin çözümünden primal modelin çözümüne veya primal modelin çözümünden dual modelin çözümüne ulaşılabilir. Bu özellik aşağıdaki örnek ile gösterilmiştir.

Örnek: Aşağıdaki verilen DP modelini göz önüne alınız.

$$\begin{aligned}
&\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
&\text{Öyle ki;}\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 \\
&\qquad\qquad\ \ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120 \\
&\qquad\qquad\quad\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 150 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Bu DP modelinin en iyi çözümü Z= 90, x_1 = 0, x_2 = 15, x_3 = 15 olarak verilsin. Buna göre dual modelin çözümünü, primal model için gölge fiyatları ve indirgenmiş maliyetleri bulunuz.

Primal modelin standart biçimi:

$$\begin{aligned} &\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ &\text{Öyle ki; } \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 \\ &\qquad 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - e_2 = 120 \\ &\qquad x_1 + x_2 - 3x_3 + s_3 = 150 \\ &\text{tüm değişkenler} \geq 0 \end{aligned}$$

Dual modelin standart biçimi:

$$\begin{aligned} &\text{Maks } w = 60\,y_1 + 120\,y_2 + 150\,y_3 \\ &\text{Öyle ki; } \quad 2\,y_1 + 3\,y_2 + y_3 + d_1 = 3 \\ &\qquad y_1 + 3\,y_2 + y_3 + d_2 = 2 \\ &\qquad 3\,y_1 + 5\,y_2 - 3\,y_3 + d_3 = 4 \\ &y_1 \text{ urs}, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0, \; d_1, d_2, d_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Dual modeldeki y_1, y_2, y_3 primal modelin gölge fiyatlarını; d_1, d_2, d_3 ise primal modelin indirgenmiş maliyetlerini verecektir.

Tümler gevşeklik teoremine göre en iyi çözümde aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$x_1 * d_1 = 0 \;; \quad x_2 * d_2 = 0; \quad x_3 * d_3 = 0$$

$$y_2 * e_2 = 0 \;; \; y_3 * s_3 = 0$$

z = 90, $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $x_3 = 15$ olduğuna göre $e_2 = 0$ ve $s_3 = 180$'dir.

Koşulların sağlanması için $d_2 = 0$, $d_3 = 0$; $y_3 = 0$ olmalıdır. Bunlar dual modelde yerine konduğunda üç bilinmeyenli üç denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} 2\,y_1 + 3\,y_2 + d_1 &= 3 \\ y_1 + 3\,y_2 &= 2 \\ 3\,y_1 + 5\,y_2 &= 4 \end{aligned}$$

Buradan $y_1 = 1/2$; $y_2 = 1/2$; $d_1 = 1/2$ olarak hesaplanır.

Rapor: Dual DP modelinin çözümü: w=0; $y_1 = 1/2$; $y_2 = 1/2$; $y_3 = 0$; $d_1 = 1/2$; $d_2 = 0$; $d_3 = 0$. Buna göre primal model için; birinci ve ikinci kısıtların gölge fiyatları -1/2; üçüncü kısıtın gölge fiyatı 0'dır. İkinci ve üçüncü karar değişkenlerinin indirgenmiş maliyetleri 0'dır. Birinci karar değişkenin indirgenmiş maliyeti 1/2'ye eşittir.

5.5 DUAL SİMPLEKS YÖNTEMİ

Dual simpleks yöntemi üç farklı amaçla kullanılabilir:

- DP'ye bir kısıt eklenmesi durumunda yeni en iyi çözümü bulma,
- DP'deki kısıtlardan birinin sağ taraf değerinin değiştirilmesi durumunda yeni en iyi çözümü bulma,
- Başlangıçta optimallik koşullarını sağlayan problemlerin çözümü

Dikkat! Dual simpleks yönteminin uygulanabilmesi için 0. satırın en iyilik (optimallik) koşullarını sağlaması gerekir!

5.5.1 Dual simpleks adımları

1. En negatif ST seçilir (Çözümden çıkacak temel değişken belirlenir)
2. Bu pivot satırın temel değişkeni çözümden çıkar,
3. Pivot satırdaki negatif katsayılı değişkenler için oranlar hesaplanır (|sıfırıncı satırdaki katsayı / pivot satırdaki katsayı|),
4. Mutlak değerce en küçük oranlı değişken çözüme girer.

Dikkat! Pivot satırdaki her değişken negatif olmayan katsayılara sahipse, DP'nin olurlu çözümü yoktur.

Örnek 1:

z	x_1	x_2	**s_1**	s_2	s_3	ST	TD
1	0	0	1.25	0.75	0	41.25	z
0	0	1	2.25	-0.25	0	2.25	x_2
0	1	0	-1.25	0.25	0	3.75	x_1
0	0	0	-0.75	-0.25	1	**-0.75**	**s_3**

s_3 negatif ST değerine sahip olduğu için çözümden çıkar.

Pivot satırdaki negatif katsayılı değişkenler için hesaplanan mutlak değerce en küçük oranı olan değişken s_1 olduğu için ($|1,25 / -0,75|$ ve $|0,75 / -0,25|$) s_1 çözüme girer. Satır işlemleri yapılır.

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST	TD
1	0	0	0	0.333	1.667	40	z
0	0	1	0	-1	3	0	x_2
0	1	0	0	0.667	-1.667	5	x_1
0	0	0	1	0.333	-1.333	1	s_1

En iyi çözüm: $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$

5.5.2 Yeni Bir Kısıt Ekleme

En iyi çözümü bulunmuş bir problemde yeni bir kısıt eklenirse; öncelikle mevcut çözümün kısıtı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Eğer mevcut çözüm kısıtı sağlıyor ise çözüm en iyi olarak kalır (neden?). Eğer sağlamıyor ise mevcut çözüm olurlu değildir ve yeni bir çözüm bulmak için dual simpleks kullanılmalıdır.

Dual simpleks uygulamak için kısıt standart biçime dönüştürülerek tabloya eklenir. Yeni eklenen kısıtın satırında temel değişkenlerin katsayılarını 0 yapacak ve kısıtla ilgili gevşek değişkeni temel değişken yapacak elementer satır işlemleri yapılır. Dual simpleks ile yeni çözüm bulunur.

Örnek 2: Dakota örneğinde pazarlama faaliyetleri için en az 1 masa üretmek zorunlu olursa yeni çözümü bulunuz.

$x_2 \geq 1$ eklenir.

Mevcut en iyi çözüm (z = 280, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8) yeni kısıtı sağlamadığı için artık olurlu değildir. Yeni en iyi çözümü bulmak için en iyi tabloya yeni bir satır eklenir:

$$x_2 - e_5 = 1$$

e_5'i TD olarak kullanabilmek için bu denklemi -1 ile çarpılır:

$$-x_2 + e_5 = -1$$

Yeni tablo:

z	x_1	**x_2**	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	RHS	BV
1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	z = 280
0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1 = 24
0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3 = 8
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	0	2	x_1 = 2
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4 = 5
0	0	**-1**	0	0	0	0	0	1	-1	**e_5 = -1**

e_5 çözümden çıkar ve x_2 çözüme girer.

En iyi çözüm (yeni tabloyu kendiniz bulunuz):

$$z = 275,\ s_1 = 26,\ x_3 = 10,\ x_1 = 3/4,\ s_4 = 4,\ x_2 = 1$$

Örnek 3: Dakota örneğine $x_1 + x_2 \geq 12$ kısıtınının eklendiğini varsayarak yeni çözümü bulunuz.

Mevcut en iyi çözüm (z = 280, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8) yeni kısıtı sağlamadığı için artık olurlu değildir.

Yeni en iyi çözümü bulmak için en iyi tabloya yeni bir satır eklenir:

$$x_1 + x_2 - e_5 = 12$$

e_5'i TD olarak kullanabilmek için bu denklemi -1 ile çarpılır:

$$-x_1 - x_2 + e_5 = -12$$

Yeni tablo:

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	z
0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1
0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	0	2	x_1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	-12	e_5

Dikkat! Bu tabloda temel değişken olan x_1'in yeni eklenen satırdaki katsayısı 0 değildir. x_1'i TD olarak kullanabilmek için satır işlemi yapılır (R5' = R5 + R3):

z	x_1	x_2	x_3	s_1	**s_2**	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	z
0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1
0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	0	2	x_1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
0	0	0.25	0	0	**-0,5**	1.5	0	1	**-10**	**e_5**

İterasyonlar:

z	x_1	**x_2**	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	10	0	0	0	40	0	20	80	z
0	0	-1	0	1	0	-2	0	4	-16	s_1
0	0	**-1**	1	0	0	2	0	4	**-32**	**x_3**
0	1	1	0	0	0	0	0	-1	12	x_1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
0	0	-0,5	0	0	1	-3	0	-2	20	s_2

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
1	0	0	10	0	0	60	0	60	-240	z
0	0	0	-1	1	0	-4	0	0	16	s_1
0	0	1	-1	0	0	-2	0	-4	32	x_2
0	1	0	1	0	0	2	0	3	-20	x_1
0	0	0	1	0	0	2	1	4	**-27**	**s_4**
0	0	0	-0,5	0	1	-4	0	-4	36	s_2

Pivot satırdaki her değişken negatif olmayan katsayılara sahip:

DP'nin olurlu çözümü yoktur.

5.5.3 Başlangıçta optimallik koşullarını sağlayan problemlerin çözümü

Başlangıçta optimallik (en iyilik) koşullarını sağlayan problemlerin çözümünde dual simpleks kullanılabilir:

Min probleminde tüm amaç fonksiyonu katsayıları pozitif veya sıfır olmalıdır,

Maks probleminde tüm amaç fonksiyonu katsayıları negatif veya sıfır olmalıdır.

Örnek 4:

Aşağıdaki DP'yi çözünüz:

min $z = x_1 + 2x_2$

öyle ki $x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4$

$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Bu en küçükleme (min) probleminde amaç fonksiyonu katsayıları pozitiftir. Simpleks tablosu oluşturulduğunda R0'daki tüm katsayılar 0 veya negatiftir. Bu yüzden problem başlangıçta optimallik koşullarını sağlamaktadır. Dual Simpleks aşağıdaki gibi uygulanabilir.

z	**x_1**	x_2	x_3	e_1	e_2	ST	TD
1	-1	-2	0	0	0	0	z
0	-1	2	-1	1	0	-4	e_1
0	**-2**	-1	1	0	1	**-6**	**e_2**

z	x_1	x_2	**x_3**	e_1	e_2	ST	TD
1	0	-1.5	-0.5	0	-0.5	3	z
0	0	2.5	**-1.5**	1	-0.5	**-1**	**e_1**
0	1	0.5	-0.5	0	-0.5	3	x_1

z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	ST	TD
1	0	-2.333	0	-0.333	-0.333	3.3333	z
0	0	-1.667	1	-0.667	0.3333	0.6667	x_3
0	1	-0.333	0	-0.333	-0.333	3.3333	x_1

En iyi çözüm: $z = 10/3$, $x_1 = 10/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2/3$

6. DP'DE İLERİ KONULAR

6.1 DÜZELTİLMİŞ SİMPLEKS YÖNTEMİ

Klasik simpleks yöntemi bilgisayarlar için en etkin yöntem değildir. Çünkü mevcut adımda veya sonraki adımlarda gerekli olmayan veriler hesaplanır ve depolanır.

Düzeltilmiş simpleks, Simpleks yöntemi adımlarının daha az hesaplama ile uygulanmasını sağlayan sistematik bir prosedürdür. Özellikle bilgisayar programlarının daha az veri saklamasını sağlar.

Simpleks yöntemde her bir iterasyonda gerekli olan bilgiler şunlardır:

- Temel olmayan değişkenlerin Satır 0 (R0)'daki katsayıları,
- Çözüme girecek değişkenin diğer denklemlerdeki katsayıları,
- Sağ taraf değerleri.

Simpleks yönteminde tüm tablodaki değerler hesaplanırken düzeltilmiş simpleks yönteminde sadece yukarıda verilen bilgiler hesaplanarak etkin bir algoritma oluşturulur.

6.1.1 Simpleks yönteminin matris formunda gösterimi

Değişken sayısı=n, kısıt sayısı=m olmak üzere,

Maks Z = **cx**

Öyle ki; **Ax** = **b** , **x** ≥ 0.

Burada **x** karar değişkenleri vektörü, **c** amaç fonksiyonu katsayıları vektörü, **A** teknoloji katsayıları matrisi, **b** sağ taraf değerleridir.

Örneğin aşağıda verilen Dakota Mobilya DP'si için;

$$
\begin{aligned}
\text{maks } z &= 60x_1+30x_2+20x_3 \\
\text{öyle ki } \quad & 8x_1+6x_2+x_3 \leq 48 \\
& 4x_1+2x_2+1.5x_3 \leq 20 \\
& 2x_1+1.5x_2+.5x_3 \leq 8 \\
& x_2 \leq 5 \\
& x_1,x_2,x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [60,\ 30, 20\ ], \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Notasyon tablosu

c	$1 \times n$ satır vektörü, amaç fonksiyonu katsayıları
x	$n \times 1$ sütun vektörü, karar değişkenleri
A	$m \times n$ matrisi; teknoloji katsayıları
b	sağ taraf değerleri vektörü
BV	temel değişkenler kümesi (BV'nin ilk elemenı ilk kısıttaki temel değişken, BV'nin ikinci elemenı ikinci kısıttaki temel değişken, ….,
BV_j	j'inci kısıttaki temel değişken
NBV	temel olmayan değişkenlerin kümesi
$\mathbf{a}_j$	orijinal problemde kısıtların x_j sütunu
B	$m \times m$ matrisi; j'inci sütunu orijinal kısıtlarda BV_j için olan sütunlardan oluşur
N	$m \times (n - m)$ matrisi; sütunları orijinal kısıtlarda temel olmayan değişkenler için olan sütunlardan oluşur
c_j	amaç fonksiyonunda x_j nin katsayıları
$\mathbf{c}_B$	$1 \times m$ satır vektörü; j'inci elemanı BV_j'nin amaç fonksiyonu katsayısı
$\mathbf{c}_N$	$1 \times (n\text{-}m)$ satır vektörü; j'inci elemanı NBV'nin j'inci elemanına karşılık gelen amaç fonksiyonu katsayısı
$\mathbf{x}_B$	$m \times 1$ sütun vektörü, temel değişkenler
$\mathbf{x}_N$	$n\text{-}m \times 1$ sütun vektörü, temel dışı değişkenler

Simpleks yöntemde herhangi bir temel olurlu çözüm içerdiği temel değişkenler ile ifade edilebilir. Bunun için BV temel değişkenler kümesinin tanımlanması gerekir.

Herhangi bir BV için **A**, **x** ve **c** temel ve temel dışı değişkenlere karşı gelen sütunlara göre iki kısma ayrılırsa;

$\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$

$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N]$

$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N]$

elde edilir. Bunlara göre ilgilenilen DP aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

Maks $\mathrm{Z} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{c}_\mathrm{N}\mathbf{x}_\mathrm{N}$

Öyle ki; $\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathrm{NB} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x}_{BV}, \mathbf{x}_{NBV} \geq 0$

buradaki sembollerin tanımları notasyon tablosunda verilmiştir.

Bu modelde **B** matrisi doğrusal bağımsız vektörlerden oluştuğu için tersi alınabilirdir. Temel değişkenlerin ilgili temel olurlu çözümdeki değerlerini bulabilmek için kısıtların her iki tarafı $\mathbf{B}^{-1}$ ile çarpılır:

$$\mathbf{B^{-1}Bx_B} + \mathbf{B^{-1}Nx_N} = \mathbf{B^{-1}b}$$

$$\mathbf{x_B} + \mathbf{B^{-1}Nx_N} = \mathbf{B^{-1}b}$$

Burada $\mathbf{B^{-1}N}$ temel dışı değişkenlerin simpleks tablosundaki katsayılarını, $\mathbf{B^{-1}b}$ ise sağ taraf değerlerini verir.

Simpleks tablosundaki sıfırıncı satırı bulabilmek için $\mathrm{Z} = \mathbf{c_B x_B} + \mathbf{c_N x_N}$ denkleminde $\mathbf{x_B}$ yerine $\mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}Nx_N}$ yazılırsa;

$$\mathrm{Z} = \mathbf{c_B}(\mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}Nx_N}) + \mathbf{c_N x_N}$$

$$\mathrm{Z} + (\mathbf{c_B}B^{-1}N - \mathbf{c_N})\mathbf{x_N} = \mathbf{c_B}B^{-1}\mathbf{b}$$

Burada $(\mathbf{c_B}B^{-1}N - \mathbf{c_N})$ temel dışı değişkenlerin sıfırıncı satırdaki katsayıları, $\mathbf{c_B}B^{-1}\mathbf{b}$ ise sıfırıncı satırın sağ taraf değeridir. Bir temel dışı değişkenin sıfırıncı satırdaki katsayısı indirgenmiş maliyet olarak adlandırılır ve $z_j - c_j = \mathbf{c_{BV}B^{-1}a}_j - c_j$ şeklinde ifade edilebilir.

Verilen formülere göre herhangi bir temel olurlu çözümdeki BV için simpleks tablosu aşağıdaki gibi oturuşturulabilir.

	z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	ST	
z	1	**0**	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Satır 0 (R_0)
$\mathbf{x}_B$	**0**	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Satır 1 – *m* (R_1-R_m)

Bu tablo üzerinden en iyilik koşulu (maks problemi için) $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N \geq 0$'dır. Eğer herhangi bir *j* temel dışı değişkeni için $z_j - c_j = \mathbf{c_{BV}B^{-1}a}_j - c_j < 0$ ise mevcut tablo en iyi değildir. Hangi temel dışı değişkenin temel; hangi temel değişkenin temel dışı olacağına karar verilerek sonraki iterasyona geçilir.

Yukarıda verilen tabloda çözüme girmeyecek olan temel dışı değişkenler için hesaplanan $\mathbf{B^{-1}N}$ değerleri simpleks yöntemde kullanılmaz. Kullanılmayacak verilerin hesaplanması ve depolanması büyük problemlerde etkinliği düşürmektedir. Bu yüzden aşağıda adımları verilen düzeltilmiş simpleks yöntemi geliştirilmiştir.

6.1.2 Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Adımları

(Maks problemi için)

Adım 0: $\mathbf{B}^{-1}$ in okunacağı sütunların belirlenmesi. Başlangıçta, $\mathbf{B}^{-1} = I$.

Adım 1: Mevcut tablo için $\mathbf{w} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}\mathbf{B}^{-1}$ hesaplanır, (**w** simpleks çarpanı veya dual/ gölge fiyat olarak adlandırılır)

Adım 2: Tüm temel olmayan değişkenler için R0'daki katsayıları $(z_j - c_j = \mathrm{c_{BV}B^{-1}a}_j - c_j = \mathrm{wa}_j - c_j)$ hesaplanır.

- Tüm katsayılar negatif olmayan değerler almış ise, mevcut çözüm en iyidir.
- Mevcut çözüm en iyi değil ise en negatif katsayılı değişken çözüme girecek değişken olarak belirlenir. Bu değişkene x_k denir.

Adım 3: x_k 'nın hangi satırdan temel değişken olarak gireceğini belirlemek için,

- x_k'nin mevcut tablodaki sütunu hesaplanır ($\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$)
- Mevcut tablonun sağ taraf değeri hesaplanır ($\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$)
- Oran testi ile hangi değişkenin temel dışı olacağı belirlenir.
- Yeni BV kümesi bulunmuş olur.

Adım 4: Mevcut tablodaki x_k nın temele girmesi için gerekli ERO'lar belirlenir. Bu ERO'lar mevcut B^{-1}'e uygulanırsa yeni B^{-1} elde edilir. Adım 1'e dönülür.

Düzeltilmiş simplekste kullanılan formüller

Formül	**Açıklama**
$\mathbf{y_j} = \mathbf{B^{-1}a_j}$	BV tablosundaki x_j sütünu
$\mathbf{w} = \mathbf{c_B B^{-1}}$	Simpleks çarpanları – gölge fiyat
$z_j - c_j = \mathbf{c_B B^{-1} a_j} - \boldsymbol{c_j} = \mathbf{wa_j} - \boldsymbol{c_j}$	x_j nin R0'daki katsayıları – indirgenmiş maliyet
$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B^{-1}b}$	BV tablosundaki kısıt sağ taraf değerleri – temel değişken değerleri
$Z = \mathbf{c_B B^{-1} b} = \mathbf{c_B}\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{wb}$	BV tablosunda R0'daki sağ taraf değeri - Amaç fonksiyonu değeri

Örnek 1. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

$$\begin{aligned}
\text{Maks } Z &= x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6 \\
\text{Öyle ki; } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4
\end{aligned}$$

Tüm değişkenler ≥ 0

Öncelikle problem standart biçime dönüştürülür:

Maks $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6$

$$\begin{aligned} \text{Öyle ki; } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + s_1 = 6 \\ & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + s_2 = 4 \\ & x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + s_3 = 4 \end{aligned}$$

Tüm değişkenler ≥ 0

Başlangıçta gevşek değişkenler temel değişkendir. BV = $\{s_1, s_2, s_3\}$

Adım 0: $\mathbf{B} = [a_7, a_8, a_9] = \mathrm{I}$, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

<u>1. İterasyon</u>

Adım 1: BV = $\{s_1, s_2, s_3\}$, $\mathbf{B}^{-1} = \mathrm{I}$, $\mathbf{c}_\mathrm{B} = [0,0,0]$

$\mathbf{w} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{w} = [0,0,0]\mathbf{I} = [0,0,0]$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathrm{c}_{\mathrm{BV}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{a}_j - c_j = \mathrm{wa}_j - c_j)$ hesaplanır.

$$z_1 - c_1 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - 1 = -1 \;; \qquad z_2 - c_2 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} - 2 = -2$$

$$z_3 - c_3 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} - (-1) = 1 \;; \qquad z_4 - c_4 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 1 = -1$$

$$z_5 - c_5 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - 4 = -4 \;; \qquad z_6 - c_6 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - (-2) = 2$$

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişkenler var, bu yüzden çözüm en iyi değildir. En negatif indirgenmiş maliyet değerine sahip olan x_5 çözüme girer.

Adım 3: çıkan değişkenin belirlenmesi;

x_5 in mevcut tablodaki sütunu: $\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 = \mathbf{I}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$;

Mevcut tablonun sağ taraf değeri: $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}$

Oran testi: $\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix} / \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{matrix}6\\-\\2*\end{matrix} \quad s_3 \text{ çözümden çıkar}$

Yeni BV= $\{s_1, s_2, x_5\}$

Adım 4: Yeni BV için B^{-1} hesaplanır. $\mathbf{y}_5$'i $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ haline getirmek için gerekli ERO'lar B'ye uygulanır. $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ için R3' = R3 / 2; R1' = R1 – R3'; R2' = R2.

Bu işlemler $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$'e uygulanırsa yeni $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

<u>2. İterasyon</u>

Adım 1: BV= {s_1, s_2 , x_5 } , $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_\mathrm{B} = [0,0,4]$

$\mathbf{w} = \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{w} = [0,0,4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [0,0,2]$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathrm{c_{BV}B^{-1}a}_j - c_j = \mathrm{wa}_j - c_j)$ hesaplanır.

$z_1 - c_1 = [0,0,2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1$; $z_2 - c_2 = [0,0,2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 = -2$

$z_3 - c_3 = [0,0,2] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = 3$; $z_4 - c_4 = [0,0,2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = 1$

$z_6 - c_6 = [0,0,2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = 4;$ $z_9 - c_9 = [0,0,2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 2$;

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişkenler var, bu yüzden çözüm en iyi değildir. En negatif indirgenmiş maliyet değerine sahip olan x_2 çözüme girer.

Adım 3: Çıkan değişkenin belirlenmesi;

x_2 nin mevcut tablodaki sütunu: $\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

Mevcut tablonun sağ taraf değeri: $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Oran testi: $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 4 * \\ - \\ - \end{matrix}$ s_1 çözümden çıkar

Yeni BV= {x_2, s_2 , x_5 }

Adım 4: Yeni BV için B^{-1} hesaplanır. $\mathbf{y}_2$'yi $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ haline getirmek için gerekli ERO'lar B'ye uygulanır. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ için R1' = R1; R2' = R2 + R1'; R3' = R3.

Bu işlemler $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$'e uygulanırsa yeni $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$ olarak bulunur.

<u>3. İterasyon</u>

Adım 1: BV= {x_2, s_2 , x_5 }, $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_{\mathrm{B}}=[2{,}0{,}4]$,

$\mathbf{w}=\mathbf{c}_{\mathrm{B}}\mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{w}=[2{,}0{,}4]\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}=[2{,}0{,}1]$

Adım 2: $(z_j-c_j=\mathrm{c_{BV}B^{-1}a}_j-c_j=\mathrm{wa}_j-c_j)$ hesaplanır.

$z_1-c_1=[2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}-1=1$; $\quad z_3-c_3=[2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}-(-1)=4$;

$z_4-c_4=[2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-1=2$; $\quad z_6-c_6=[2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-(-2)=5$;

$z_7-c_7=[2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-0=2$; $\quad z_9-c_9=[2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}-0=1$;

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişken yok, bu yüzden çözüm en iyidir.

Temel değişkenlerin değeri $x_B=\bar{\mathbf{b}}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ formülü ile hesaplanırsa;

$\begin{bmatrix}x_2\\s_2\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\\2\end{bmatrix}$ olarak bulunur. Temel dışı değişkenlerin değeri 0'dır.

Amaç fonksiyon değeri $\boldsymbol{Z}=\mathbf{c_B B^{-1} b}=\mathbf{c_{BV}}\bar{\mathbf{b}}=\mathbf{wb}$ formülüne göre;

Z = $\mathbf{wb}=[2{,}0{,}1]\begin{bmatrix}6\\4\\4\end{bmatrix}=16$ olur.

6.1.3 Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Tablo Gösterimi

Düzeltilmiş simpleks yöntemi ile elle çözmek için tablo gösteriminden faydalanılabilir. Bunun için tabloda simpleks yönteminden farklı olarak sağ taraf değerleri, simpleks çarpanları **w** ve temel matrisin tersi değerleri saklanır. Gerekli olduğunda çözüme girecek değişkenin katsayıları tabloya ek olarak ilave edilir.

Başlatma adımı

$\mathbf{B}^{-1}$ ile bir temel olurlu çözüm bul. $\mathbf{w}=\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$, $\bar{\mathbf{b}}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ hesaplayarak aşağıdaki düzeltilmiş simpleks tablosunu oluştur:

Temel tersi	ST
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Ana adım

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla.

$z_k - c_k = \min_{j \in J}\{z_j - c_j\}$ belirle. Eğer $z_k - c_k \geq 0$ ise dur! Mevcut çözüm en iyi çözümdür.

Değil ise $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ hesapla. Eğer $\mathbf{y}_k \leq 0$ ise en iyi çözüm sınırsızdır. Eğer $\mathbf{y}_k \nleq 0$ ise $\begin{bmatrix} \frac{z_k - c_k}{\mathbf{y}_k} \end{bmatrix}$ sütununu tablonun sağına ekle.

Temel tersi	ST		x_k
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$		$z_k - c_k$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$		$\mathbf{y}_k$

r indisini standart oran testi ile belirle: $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$

y_{rk}'ya göre pivot işlemler yaparak tabloyu güncelle, ana adımı tekrar et.

Örnek 2. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

$$
\begin{aligned}
&\text{maks } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3\\
&\text{Öyle ki;}\quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48\\
&\qquad\qquad 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20\\
&\qquad\qquad 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8\\
&\quad x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Öncelikle problem standart biçime dönüştürülür:

$$
\begin{aligned}
&\text{maks } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3\\
&\text{Öyle ki;}\quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48\\
&\qquad\qquad 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20\\
&\qquad\qquad 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 8\\
&\qquad\qquad \text{Tüm değişkenler} \geq 0
\end{aligned}
$$

<u>Başlatma adımı</u>

Başlangıçta gevşek değişkenler temel değişkendir. BV = $\{s_1, s_2, s_3\}$,

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0, 0, 0]\mathbf{I} = [0, 0, 0]$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{I}\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}} = [0, 0, 0]\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 0$$

Düzeltilmiş simpleks tablosunu oluştur:

	Temel Tersi			ST
z	0	0	0	0
s_1	1	0	0	48
s_2	0	1	0	20
s_3	0	0	1	8

Ana adım – 1. iterasyon

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{wa}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla.

$$z_1 - c_1 = \mathbf{wa}_1 - \mathbf{c}_1 = [0,0,0]\begin{bmatrix}8\\4\\2\end{bmatrix} - 60 = -60$$

$$z_2 - c_2 = \mathbf{wa}_2 - \mathbf{c}_2 = [0,0,0]\begin{bmatrix}6\\2\\1{,}5\end{bmatrix} - 30 = -30$$

$$z_3 - c_3 = \mathbf{wa}_3 - \mathbf{c}_3 = [0,0,0]\begin{bmatrix}1\\1{,}5\\0{,}5\end{bmatrix} - 20 = -20$$

$\boldsymbol{z_k - c_k} = \min\limits_{j \in J}\{z_j - c_j\} = \boldsymbol{min}\{-60,-30,-20\} = -60 < 0$; mevcut temel olurlu çözüm en iyi değildir.

x_1 çözüme girer; k = 1. $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \mathbf{I}\begin{bmatrix}8\\4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\4\\2\end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix}\frac{z_k - c_k}{\mathbf{y}_k}\end{bmatrix}$ sütununu tablonun sağına ekle.

	Temel Tersi			ST	x_1	Oran
z	0	0	0	0	-60	
s_1	1	0	0	48	8	48/8 = 6
s_2	0	1	0	20	4	20/4=5
s_3	0	0	1	8	2	8/2=4**

Oran testi ile çıkan değişken s_3 olarak belirlenir. Yeni tabloyu elde etmek için düzeltilmiş simpleks tablosuna eklenen sütuna göre pivot işlem yapılır $\begin{bmatrix}-60\\8\\4\\2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

R3' = R3 / 2; R2' = R2 – 4R3', R1' = R1 – 8R3', R0' = R0 + 60R3'

	Temel Tersi			ST
z	0	0	30	240
s_1	1	0	-4	16
s_2	0	1	-2	4
x_1	0	0	0,5	4

Ana adım – 2. iterasyon

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{wa}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla. $\mathbf{w}$ vektörünü düzeltilmiş simpleks tablosu R0'dan al!

$$z_2 - c_2 = \mathbf{wa}_2 - \mathbf{c}_2 = [0,0,30]\begin{bmatrix}6\\2\\1{,}5\end{bmatrix} - 30 = 15$$

$$z_3 - c_3 = \mathbf{wa_3} - \mathbf{c_3} = [0, 0, 30]\begin{bmatrix}1\\1{,}5\\0{,}5\end{bmatrix} - \mathbf{20} = -5$$

$$z_6 - c_6 = \mathbf{wa}_6 - \mathbf{c}_6 = [0, 0, 30]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 30$$

$\boldsymbol{z_k - c_k} = \min\limits_{j\in J}\{\boldsymbol{z_j - c_j}\} = \boldsymbol{min}\{15, -5, 30\} = -5 < 0$; mevcut çözüm en iyi değildir.

x_3 çözüme girecek; $k = 3$. $\mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1{,}5\\0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0{,}5\\0{,}25\end{bmatrix}$. $\left[\frac{z_k - c_k}{\mathbf{y}_k}\right]$ sütununu tablonun sağına ekle.

	Temel Tersi			ST	x_3	Oran
z	0	0	30	240	-5	
s_1	1	0	-4	16	-1	--
s_2	0	1	-2	4	$\boxed{0{,}5}$	4/0,5=8**
x_1	0	0	0,5	4	0,25	4/0,25=16

Oran testi ile çıkan değişken s_2 olarak belirlenir. Yeni tabloyu elde etmek için düzeltilmiş simpleks tablosuna eklenen sütuna göre pivot işlem yapılır $\begin{bmatrix}-5\\-1\\0{,}5\\0{,}25\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$.

R2' = R2 / 0,5; R1' = R1 + R2', R3' = R3 – 0,25 R2', R0' = R0 + 5R2'

	Temel Tersi			ST
z	0	10	10	280
s_1	1	2	-8	24
x_3	0	2	-4	8
x_1	0	-0,5	1,5	2

<u>Ana adım – 3. iterasyon</u>

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{wa}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla. $\mathbf{w}$ vektörünü düzeltilmiş simpleks tablosu R0'dan al!

$$z_2 - c_2 = \mathbf{wa}_2 - \mathbf{c}_2 = [0, 10, 10]\begin{bmatrix}6\\2\\1{,}5\end{bmatrix} - 30 = 5$$

$$z_5 - c_5 = \mathbf{wa_5} - \mathbf{c_5} = [0, 10, 10]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \mathbf{0} = 10$$

$$z_6 - c_6 = \mathbf{wa}_6 - \mathbf{c}_6 = [0, 10, 10]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 10$$

$\boldsymbol{z_k - c_k} = \min\limits_{j\in J}\{\boldsymbol{z_j - c_j}\} = \boldsymbol{min}\{5, 10, 10\} = 5 \geq 0$; mevcut temel olurlu çözüm en iyidir.

Değişkenlerin çözümdeki değerleri tablodan görülebilir:

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $z = 280$.

Örnek 3. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

Maks $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6$
Öyle ki;

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + \qquad\qquad x_6 &\geq 6 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \qquad &\leq 9 \\
x_3 + \quad x_5 + x_6 &= 3
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, i =1,2,…,6.

Dikkat! Bu DP'de başlangıç temel olurlu çözüm bulabilmek için Büyük M yöntemi kullanılır.

Örnek 4. Aşağıdaki DP için BV= $\{x_1, x_2, x_3\}$ çözümünün temel olurlu çözüm olduğunu gösteriniz. Bu çözümden başlayarak en iyi çözümü bulunuz.

Maks $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6$
Öyle ki;

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + \qquad\qquad x_6 &\geq 6 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \qquad &\leq 9 \\
x_3 + \quad x_5 + x_6 &= 3
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, i =1,2,…,6.

Dikkat! Bu DP'yi çözmek için BV= $\{x_1, x_2, x_3\}$ ile ilgili **B** matrisinin belirlenmesi ve $\mathbf{B}^{-1}$ matrisinin hesaplanması gerekmektedir.

6.2 SİMPLEKS KULLANARAK DUYARLILIK

Simpleks kullanarak yapılabilecek duyarlılık analizleri Dakota mobilya örneğinde incelenecektir. Dakota mobilya probleminde x_1, x_2, x_3 sırasıyla üretilen sıra, masa ve sandalye miktarı olarak tanımlanmıştır.
Karı enbüyüklemek için kurulan DP:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{maks } z = & 60x_1 & +30x_2 & +20x_3 & & & & \\
& 8x_1 & +6x_2 & +x_3 & +s_1 & & & = 48 \quad \text{Tahta} \\
& 4x_1 & +2x_2 & +1.5x_3 & & +s_2 & & = 20 \quad \text{Montaj} \\
& 2x_1 & +1.5x_2 & +.5x_3 & & & +s_3 & = 8 \quad \text{Marangozluk}
\end{array}
$$

Bu problemin en iyi çözümü (Simpleks tablosu):

$$
\begin{array}{lllllllll}
z & & +5x_2 & & & +10s_2 & +10s_3 & = 280 \\
& & -2x_2 & & +s_1 & +2s_2 & -8s_3 & = 24 \\
& & -2x_2 & +x_3 & & +2s_2 & -4s_3 & = 8 \\
& +x_1 & +1.25x_2 & & & -.5s_2 & +1.5s_3 & = 2
\end{array}
$$

En iyi çözümde BV: {s_1, x_3, x_1} , NBV:{x_2,s_2,s_3}, $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$= [0,10,10] ve

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Düzeltilmiş simpleks tablosu:

	Temel Tersi			ST
z	0	10	10	280
s_1	1	2	-8	24
x_3	0	2	-4	8
x_1	0	-0,5	1,5	2

Analiz 1: Temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi

x_j temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı c'_j olursa; bu değişkenin en iyi tablodaki indirgenmiş maliyeti [$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}a_j - c'_j$] kontrol edilir.

Eğer $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır ve mevcut çözüm değişmez.

Eğer $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

x_j temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı için mevcut temel çözümün en iyi kalacağı aralığı bulunmak için; $c'_j = c_j + \delta$ kabul edilerek δ'nın $z_j - c_j \geq 0$ (Maks problemi için) eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 1. Dakota Mobilya problemi için x_2'nin amaç fonksiyonu katsayısı hangi aralıklarda değişirse mevcut temel çözüm en iyi kalır?

$$c'_2 = 30 + \delta \quad \Rightarrow \quad z_2 - c_2 = [0{,}10{,}10]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - (30 + \delta) \geq 0$$

$$5 - \delta \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta \leq 5$$

veya $c'_2 \leq 35$ iken mevcut temel değişmez.

Örnek 2. Dakota Mobilya probleminde masanın satış fiyatı 40 birim olursa yeni çözüm ne olur?

Masanın satış fiyatı x_2'nin amaç fonksiyonu katsayısıdır. 40 olursa Örnek 1'den görülebileceği gibi mevcut temel en iyi değildir. $z_2 - c_2 = [0{,}10{,}10]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - (40) = -5$ olarak hesaplanır ve x_2 çözüme girer. Oran testi ile x_1'in çözümden çıkacağı belirlenir ve simpleks ile yeni çözüm bulunur (lütfen kendiniz bulunuz).

Analiz 2. Temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi

x_k temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı c'_k olursa; tüm temel dışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri [$z_j - c_j = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}a_j - c_j$] kontrol edilir.

Eğer tüm temel dışı değişkenler için $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır. Mevcut çözümdeki amaç fonksiyonu değeri değişir ve $Z = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c_B}\bar{\mathbf{b}}$ formülü ile hesaplanır.

Eğer en az bir temel dışı değişken için $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, en negatif katsayılı x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

x_k temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı için temel çözümün en iyi kalmasını sağlayacak aralığı bulunmak için; $c'_k = c_k + \delta$ kabul edilerek δ'nın tüm temel dışı değişkenler için $z_j - c_j \geq 0$ (Maks problemi için) eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 3. Dakota Mobilya probleminde sıranın satış fiyatı (x_1'in amaç fonksiyonu katsayısı) hangi aralıklarda değişirse mevcut temel çözüm en iyi kalır?

$c'_1 = 60 + \delta$

$$z_2 - c_2 = [0, 20, 60+\delta]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - 30 \geq 0 \Rightarrow 5 + 1.25\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4$$

$$z_5 - c_5 = [0, 20, 60+\delta]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow 10 - 0.5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 20$$

$$z_6 - c_6 = [0, 20, 60+\delta]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow 10 + 1.5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -20/3$$

Sonuç olarak $-4 \leq \delta \leq 20$; veya $56 \leq c'_1 \leq 80$ ise mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 4. Dakota Mobilya probleminde sıranın satış fiyatı (x_1'in amaç fonksiyonu katsayısı) 50 olursa çözüm ne olur?

Örnek 3'te hesaplandığı gibi eğer x_1'in amaç fonksiyonu katsayısı 50 olursa mevcut temel en iyi değildir. Yeni çözümü bulabilmek için düzeltilmiş simpleks tablosu oluşturulur (Orjinal en iyi tablo üzerinde z satırı güncellenir):

	Temel Tersi			ST
z	0	15	-5	260
s_1	1	2	-8	24
x_3	0	2	-4	8
x_1	0	-0,5	1,5	2

Temel dışı değişkenler için indirgenmiş maliyetler hesaplanır:

$z_2 - c_2 = -7.5; \quad z_5 - c_5 = 15; \quad z_6 - c_6 = -5$

x_2 çözüme girer. x_2 sütunu tabloya eklenir:

	Temel Tersi			ST	x_2	Oran
z	0	15	-5	260	-7,5	
s_1	1	2	-8	24	-2	-
x_3	0	2	-4	8	-2	-
x_1	0	-0,5	1,5	2	1,25	1.6*

x_1 çözümden çıkar. Yeni tablo:

	Temel Tersi			ST
z	0	12	4	272
s_1	1	1,2	-5,6	27,2
x_3	0	1,2	-1,6	11,2
x_2	0	-0,4	1,2	1,6

Bu çözümün en iyiliği kontrol etmek için temel dışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri hesaplanmalıdır. Hesaplandığında hepsinin pozitif olduğu görülebilir (lütfen kendiniz hesaplayınız).

Sonuç olarak sıranın satış fiyatı 50 olursa firma sıra üretmeyi bırakmalı onun yerine masa üretmelidir. Üretim miktarları x_2 = 1.6; x_3 = 11.2; kar ise 272 olacaktır.

Analiz 3. Kısıt sağ taraf değerinin değişmesi

i'nci kıstın sağ taraf değeri b'_i olursa; en iyi simpleks tablosunun sağ taraf değerleri $[\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}]$ kontrol edilir.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ ise mevcut temel en iyi kalır. Karar değişkenlerindeki ve amaç fonksiyonu değerindeki değişim değişir, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ve $Z = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c_B}\bar{\mathbf{b}}$ formülleri ile hesaplanır.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \ngeq \mathbf{0}$ (en az bir sağ taraf değeri negatif) ise mevcut çözüm yeni durum için olurlu değildir. Bu durumda dual simpleks yöntemi ile en iyi çözüm bulunur.

i'nci kıstın sağ taraf değeri için temel çözümü değiştirmeyecek aralık bulunmak istenirse; $b'_i = b_i + \delta$ kabul edilerek δ'nın $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 5. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (İkinci kısıt sağ taraf değeri) hangi aralıklarda değişirse mevcut çözüm en iyi kalır?

$b'_2 = 20+\delta$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20+\delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+2\delta \\ 8+2\delta \\ 2-0.5\delta \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \delta \geq -12 \\ \delta \geq -4 \\ \delta \leq 4 \end{matrix}$$

Sonuç olarak $-4 \leq \delta \leq 4$ veya $16 \leq b'_2 \leq 24$ için mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 6. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (İkinci kısıt sağ taraf değeri) 18 saat olursa çözüm ne olur?

Önerilen değişim mevcut cilalama miktarı için izin verilen aralıkta olduğu için mevcut temel en iyidir. Yeni karar değişkeni değerleri $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ olarak (x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 4) bulunur. Yeni amaç fonksiyonu değeri ise $Z = \mathbf{c_B}\bar{\mathbf{b}} = [0, 20, 60]\begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 260$ 'tır.

Örnek 7. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (İkinci kısıt sağ taraf değeri) 30 saat olursa çözüm ne olur?

Önerilen değişim mevcut cilalama miktarı için <u>izin verilen aralıkta değil</u>dir. Yeni çözümü bulabilmek için dual simpleks yöntemi kullanılmalıdır. Bunun için öncelikle simpleks tablosu oluşturulur:

<table>
<tr><th>z</th><th>x₁</th><th>x₂</th><th>x₃</th><th>s₁</th><th>s₂</th><th>s₃</th><th>ST</th><th>TD</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>$z_j - c_j = \mathbf{c_B B^{-1} a_j} - c_j$</td><td>0</td><td colspan="3">w= $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$</td><td>$Z = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$</td><td>z</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td rowspan="3">$y_j = B^{-1}a_j$</td><td>0</td><td colspan="3" rowspan="3">B^{-1}</td><td rowspan="3">$\bar{\mathbf{b}} = B^{-1}\mathbf{b}$</td><td>$s_1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>x_3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>x_1</td></tr>
</table>

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	ST	TD
1	0	5	0	0	10	10	380	z
0	0	-2	0	1	2	-8	44	s_1
0	0	-2	1	0	2	-4	28	x_3
0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	-3	x_1

Çözümden x_1 çıkar, s_2 girer.

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	ST	TD
1	20	30	0	0	0	40	320	z
0	4	3	0	1	0	-2	32	s_1
0	4	3	1	0	0	2	16	x_3
0	-2	-2,5	0	0	1	-3	6	s_2

En iyi çözüm bulunmuştur. En iyi çözümde x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 16 ve Z = 320'dir.

Analiz 4. Yeni bir karar değişkeni eklenmesi

Probleme yeni bir x_j karar değişkeni eklenirse; mevcut en iyi çözümün değişip değişmeyeceği bu karar değişkeni için indirgenmiş maliyet [$z_j - c_j = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}a_j - c_j$] hesaplanarak kontrol edilir.

Eğer $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır ve mevcut çözüm değişmez.

Eğer $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

Örnek 8. Dakota Mobilya probleminde yeni bir ürün olarak sehpa üretilmesi değerlendirilmektedir. Sehpa üretimi için birer birim marangozluk, cilalama ve tahta kullanılmaktadır ve sehpanın satış fiyatı 15$'dır. Dakota için sehpa üretmek karlı olup olmadığını belirleyiniz.

x_7 üretilen sehpa miktarı olmak üzere c_7 = 15, $a_7 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ olsun. Öncelikle x_7 için indirgenmiş maliyet hesaplanır: [$z_8 - c_8 =$ [0, 10, 10] $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 15 = 5$. İndirgenmiş maliyet pozitif olduğu için mevcut çözüm en iyidir. Sonuç olarak $x_7 = 0$ elde edilir, yani Dakota için sehpa üretmek karlı değildir.

Örnek 9. Örnek 8'de verilen durumda sehpa üretiminin Dakota Mobilya için karlı olması için sehpanın fiyatı ne olmalıdır? Sehpa fiyatı 8$ olursa yeni çözüm ne olur?

Analiz 5. Yeni bir kısıt eklenmesi

Probleme yeni bir kısıt eklenirse en iyi çözümün değişip değişmeyeceği eklenen yeni kısıt için en iyi tabloda sağ taraf değeri [$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$] hesaplanarak kontrol edilir. Burada yeni kısıt ile birlikte temel değişken kümesine yeni kısıtla ilgili gevşek değişken eklenecektir. Dolayısıyla **B** temel matrisi ile $\mathbf{B}^{-1}$ temel matris tersi değişecektir. Bu analizi yapabilmek için öncelikle yeni $\mathbf{B}^{-1}$ bulunmalı ve $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ hesaplanmalıdır.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ ise mevcut temel çözüm yeni kısıtı sağladığı anlaşılır. Mevcut temel en iyi kalır, karar değişkenlerinin ve amaç fonksiyonun değeri değişmez.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \ngeq \mathbf{0}$ (yeni kısıtn sağ taraf değeri negatif) ise mevcut temel çözümüm yeni kısıtı sağlamadığı anlaşılır. Mevcut çözüm yeni durum için olurlu değildir. Bu durumda simpleks tablosu oluşturularak dual simpleks yöntemi ile en iyi çözüm bulunur.

Örnek 10. Dakota Mobilya probleminde ürünler bittikten sonra son bir kalite kontrolü yapılması gerektiği ortaya çıkmıştır. Her ürün 0.5 saatte kontrol edilmektedir ve haftalık toplam 7 saat mevcuttur. Yeni durum için en iyi çözümü bulunuz.

Yeni kısıt: $0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 7 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_4 = 7$

Yeni temel çözüm: BV= $\{s_1, x_3, x_1, s_4\}$, NBV=$\{x_2, s_2, s_3\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \text{ kullanılarak; } \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1.25 & 1 \end{bmatrix} \text{ hesaplanır.}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ olduğu için mevcut çözüm}$$

değişmez.

7. ULAŞTIRMA SORUNLARI

7.2 ULAŞTIRMA SORUNLARININ FORMÜLASYONU

Genel olarak, bir ulaştırma sorunu aşağıdaki bilgileri barındırır:

- Bir ürün/hizmet gönderen m adet ***arz noktası*** (supply point). i arz noktası en fazla s_i birim arz edebilir.
- Ürünün/hizmetin gönderildiği n adet ***talep noktası*** (demand point). j talep noktası en az d_j birime gereksinim duyar.
- Bir birimin i arz noktasından j talep noktasına gönderilmesi maliyeti c_{ij}'dir.

Söz konusu bilgi aşağıdaki ***ulaştırma tablosu*** ile formüle edilebilir:

	Talep noktası 1	Talep noktası 2	.....	Talep noktası n	ARZ
Arz noktası 1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	s_1
Arz noktası 2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	s_2
.....					
Arz noktası m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	s_m
TALEP	d_1	d_2		d_n	

Eğer toplam talep miktarı toplam arz miktarına eşitse sorun ***dengeli ulaştırma sorunu*** olarak isimlendirilir.

x_{ij} = i arz noktasından j talep noktasına gönderilen miktar olsun.

Bu durumda ulaştırma sorununun genel DP gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\min \textstyle\sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij}$$

öyle ki $\sum_j x_{ij} \leq s_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ Arz kısıtları

$\sum_i x_{ij} \geq d_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ Talep kısıtları

$x_{ij} \geq 0$

Yukarıdaki sorun, bir enbüyükleme sorunu (ulaştırma sonucu kar elde edilmesi gibi) da olsa, kısıtlarının benzer özellikler taşıması durumunda yine bir ulaştırma sorunudur.

7.2.1 Dengeli Ulaştırma Sorununun Formülasyonu

Örnek 1. Powerco

Powerco şirketinin dört şehre hizmet veren üç adet elektrik santrali vardır. Her bir santral sırasıyla 35 milyon, 50 milyon ve 40 milyon kWh elektrik üretmektedir. Şehirlerin en yoğun saatlerde talep ettiği elektrik miktarı ise sırasıyla 45 milyon, 20 milyon, 30 milyon ve 30 milyon kWh'dir. 1 milyon kWh elektriğin bir santralden bir şehre gönderilmesinin maliyeti aşağıdaki tabloda verilmiştir. Her şehrin talebini en az maliyetle karşılamak üzere bir ulaştırma tablosunda dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz ve sorunun DP modelini gösteriniz.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Santral 1	$8	$6	$10	$9
Santral 2	$9	$12	$13	$7
Santral 3	$14	$9	$16	$5

Ulaştırma sorununun tablo gösterimi:

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	35
Santral 2	9	12	13	7	50
Santral 3	14	9	16	5	40
TALEP	45	20	30	30	125

Toplam talep ve toplam arz eşit olduğundan (125 milyon kWh) sorun "dengeli"dir.

Sorunun DP modeli:

x_{ij}: Santral *i*'de üretilen ve Şehir *j*'ye gönderilen elektrik miktarı (million kwh)

min $z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$

s.t. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$ (arz kısıtları)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$ (talep kısıtları)

$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$

$x_{ij} \geq 0$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4)$

7.2.2 Dengesiz bir Ulaştırma Sorununun Dengelenmesi

Fazla Arz

Eğer toplam arz miktarı toplam talep miktarını geçerse, sorunu dengelemek için talep miktarı aradaki fark (fazla arz miktarı) kadar olan bir ***yapay talep noktası*** yaratılır. Söz konusu noktaya yapılacak gönderimler aslında olmayacağı için bu noktaya arz noktalarından yapılacak ulaştırma maliyeti **0** olacaktır.

Karşılanmayan Talep

Eğer toplam arz miktarı toplam talep miktarından azsa, aslında olurlu bir çözüm yoktur (talepler karşılanamaz). Bu durumda karşılanamayan talep kadar arzı olan bir ***yapay arz noktası*** yaratılır. Talebin olmayan bir arz noktasından karşılanması (veya talebin gerçekte karşılanamaması) beraberinde bir "ceza maliyeti" getirir.

Örnek 2. Fazla Arz için Değiştirilmiş Powerco

Şehir 1'in talebinin 40 milyon kwh olduğunu farz edelim. Bu durumda dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz.

Toplam talep 120 ve toplam arz 125 olduğundan sorun dengeli değildir.

Sorunu dengelemek için bir yapay talep noktası eklenir. Söz konusu noktanın talebi 125 – 120 = 5 milyon kwh olacaktır.

Her santralden yapay talep noktasına 1 milyon kwh elektrik göndermenin maliyeti 0 olacaktır.

Tablo 4. Fazla Arz Örneği için Ulaştırma Tablosu

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Yapay	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	0	35
Santral 2	9	12	13	7	0	50
Santral 3	14	9	16	5	0	40
TALEP	40	20	30	30	5	125

Örnek 3. Karşılanmayan Talep için Değiştirilmiş Powerco

Şehir 1'in talebinin 50 milyon kwh olduğunu farz edelim. Karşılanamayan her 1 milyon kWh elektrik için 80$ ceza maliyeti kesilirse dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz.

5 milyon kWh elektrik arz eden bir yapay arz noktası eklenir. Gerçekte; yapay arz noktasına atanan talep karşılanmayacağı için maliyet olarak ceza maliyeti (80$) girilir.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	35
Santral 2	9	12	13	7	50
Santral 3	14	9	16	5	40
Yapay arz	80	80	80	80	5
TALEP	50	20	30	30	130

Örnek 4. Su Kaynağı Örneği

Üç şehrin ihtiyaçlarını karşılamak üzere iki su kaynağı mevcuttur. Her bir kaynaktan günlük 50 milyon galon su tedarik edilebilir. Her bir şehrin günlük 40 milyon galon su ihtiyacı vardır. Karşılanmayan talepler cezalandırılır. 1. şehir için ceza 20$/milyon galon, 2. şehir için ceza 22$ / milyon galon, 3. şehir için ceza 23$/ milyon galon. Aşağıdaki tabloda bir milyon galon suyu şehirlere taşıma maliyetleri verilmiştir.

Dengeli ulaştırma sorununu tanımlayınız.

	Şehir 1	**Şehir 2**	**Şehir 3**
Su kaynağı 1	7$	8$	10$
Su kaynağı 2	9$	7$	8$

7.3 TEMEL OLURLU ÇÖZÜMÜN BULUNMASI

Bir ulaştırma problemini Ulaştırma Simpleksi ile çözebilmek için öncelikle bir temel olurlu çözüm (basic feasible solution - bfs) bulmak gereklidir.

Dengeli bir ulaştırma sorunu için genel DP gösterimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

öyle ki $\sum_j x_{ij} = s_i$ (i=1,2, ..., m) Arz kısıtları

$\sum_i x_{ij} = d_j$ (j=1,2, ..., n) Talep kısıtları

$x_{ij} \geq 0$

Söz konusu soruna bir bfs bulmak için aşağıdaki önemli gözlemi kullanılır:

"Eğer dengeli bir ulaştırma sorununda x_{ij}'lerin değerler kümesi bir kısıt haricinde tüm kısıtları sağlarsa, bu değerler o kısıdı da sağlar."

Bu gözlem ulaştırma sorununun çözümü sırasında herhangi bir kısıtı göz ardı edebileceğimizi ve $m+n-1$ kısıttan oluşan bir DP çözeceğimizi gösterir. Genel olarak ilk arz kısıtı değerlendirme dışı bırakılır.

Geri kalan $m+n-1$ kısıda bfs bulmak için herhangi bir $m+n-1$ değişkenin temel çözüm verebileceğini düşünülebilir: fakat söz konusu $m+n-1$ değişkenin temel çözümde olabilmesi için bir **döngü oluşturmamaları** gerekir.

En az dört hücrenin bir döngü oluşturması için:

- Herhangi ardışık iki hücrenin aynı satır veya sütunda olması gerekir,
- Aynı satır veya sütunda ardışık üç hücre olmamalıdır,
- Serinin son hücresi ilk hücre ile aynı satır veya sütunda olup döngüyü kapatmalıdır.

Dengeli bir ulaştırma sorununa temel olurlu çözüm bulmak için üç farklı yöntem kullanılabilir (**Dikkat!** Bu yöntemler ulaştırma problemini tamamen çözmek için değil <u>bir temel olurlu çözüm bulabilmek için</u> uygulanırlar).

1. Kuzeybatı Köşe (Northwest Corner) Yöntemi
2. Enküçük Maliyet (Minimum Cost) Yöntemi
3. Vogel'in Yaklaşımı

7.3.1 Kuzeybatı Köşe Yöntemi

Ulaştırma tablosunun en sol üst köşesinden başlanır ve x_{11}'e mümkün olduğunca büyük bir değer atanır (tabii ki; x_{11} en çok s_1 ve d_1 ikilisinin en küçük değeri kadar olabilir).

- Eğer $x_{11}=s_1$ ise ilk satır iptal edilir ve d_1, d_1-s_1 olarak güncellenir,
- Eğer $x_{11}=d_1$ ise ilk sütun iptal edilir ve s_1, s_1-d_1 olarak güncellenir,
- Eğer $x_{11}=s_1=d_1$ ise ya ilk satır ya da ilk sütun iptal edilir (her ikisini de değil!)
  - Eğer satır iptal edilirse d_1 sıfır yapılır,
  - Eğer sütun iptal edillirse s_1 sıfır yapılır.

Bu şekilde devam ederek (her seferinde geri kalan hücrelerde yeni sol-üst köşeye atama yaparak) tüm atamalar yapılır. Sonuçta, bir hücre geriye kalacaktır. Satır veya sütundaki değeri atayarak ve hem satırı hem de sütunu iptal ederek işlemi bitirilir: böylece bir bfs elde edilmiştir.

Örnek 1. Aşağıdaki dengeli ulaştırma sorunu için KBK yöntemiyle bir bfs bulunuz. (Bu yöntemde maliyetler gerekmediğinden verilmemiştir!).

				5
				1
				3
2	4	2	1	

Toplam talep toplam arza eşittir (9): sorun dengelidir.

2				3
				1
				3
X	4	2	1	

2	3			X
				1
				3
X	1	2	1	

2	3			X
	1			X
				3
X	0	2	1	

2	3			X
	1			X
	0	2	1	3
X	0	2	1	

$m+n-1$ (3+4-1 = 6) adet değişken atanmış olur. KBK yöntemi ile seçilen değişkenler bir döngü oluşturmadıklarından bir bfs bulunmuştur.

7.3.2 En küçük Maliyet Yöntemi

KBK yöntemi maliyetleri göz önüne almadığından başlangıç bfs'si maliyeti yüksek olan bir çözüm olabilir ve en iyi çözümün bulunması için çok sayıda işlem gerekebilir.

Bu durumla karşılaşmamak için kullanılabilecek olan en küçük maliyet yönteminde en düşük taşıma maliyeti olan hücreye atama yapılır. Bu hücreye yapılacak x_{ij} ataması yine min $\{s_i, d_j\}$ kadardır.

KBK yöntemindeki gibi atama yapılan hücrenin olduğu satır veya sütun iptal edilip arz ya da talep değeri güncellenir ve tüm atamalar yapılıncaya kadar devam edilir.

Örnek 2. Aşağıdaki ulaştırma sorunu için En küçük maliyet yöntemiyle bir bfs bulunuz.

2	3	5	6	5
2	1	3	5	10
3	8	4	6	15
12	8	4	6	

2	3	5	6	5
2	**1** 8	3	5	2
3	8	4	6	15
12	X	4	6	

2	3	5	6	5
2 2	1 8	3	5	X
3	8	4	6	15
10	X	4	6	

2 5	3	5	6	X
2 2	1 8	3	5	X
3	8	4	6	15
5	X	4	6	

[2] 5	[3]	[5]	[6]	X
[2] 2	[1] 8	[3]	[5]	X
[3] 5	[8]	[4] 4	[6] 6	X
X	X	X	X	

7.3.3 Vogel Yaklaşımı

Her satır ve sütun için ceza hesaplanarak yönteme başlanır. Ceza o satır veya sütundaki en küçük iki maliyet arasındaki farktır.

Daha sonra cezası enbüyük olan satır veya sütun bulunur. Söz konusu satır veya sütundaki en düşük maliyetli hücre ilk temel değişkeni verir.

Yine KBK yöntemindeki gibi bu değişkene atanacak değer, ilgili hücrenin arz ve talep miktarlarına bağlıdır. Gerekli iptaller ve güncellemeler yapılır. Yeniden geri kalan tablo için yeni cezalar hesaplanır ve prosedüre benzer adımlarla devam edilir.

Örnek 3. Aşağıdaki dengeli ulaştırma sorunu için Vogel yaklaşımıyla bir bfs bulunuz

				Arz	Satır cezası
	[14]	[22]	[24]	5	22-14=8
	[6]	[7]	[8]	8	7-6=1
	[15]	[80]	[78]	15	78-15=**63**
Talep	12	7	9		
Sütun cezası	14-6=8	22-7=15	24-8=16		

				Arz	Satır cezası
	[14] X	[22]	[24]	5	24-22=2
	[6] X	[7]	[8]	8	8-7=1
	[15] 12	[80]	[78]	3	80-78=2
Talep	X	7	9		
Sütun cezası		22-7=15	24-8=**16**		

				Arz	Satır cezası
	X (14)	(22)	(24)	5	24-22=2
	X (6)	X (7)	8 (8)	X	
	12 (15)	(80)	(78)	3	80-78=2
Talep	X	7	1		
Sütun cezası		80-22=**58**	78-24=54		

				Arz	Satır cezası
	X (14)	5 (22)	X (24)	X	
	X (6)	X (7)	8 (8)	X	
	12 (15)	(80)	(78)	3	80-78=2
Talep	X	2	1		
Sütun cezası		-	-		

Vogel yaklaşımı ile elde edilen temel olurlu çözüm:

				Arz
	X (14)	5 (22)	X (24)	5
	X (6)	X (7)	8 (8)	8
	12 (15)	2 (80)	1 (78)	15
Talep	12	7	9	

7.4 ULAŞTIRMA SİMPLEKSİ

Ulaştırma simpleksi, simpleks yöntemin ulaştırma probleminin özel yapısına göre düzenlemesi ile geliştirilmiştir. Simpleks yöntemin temel adımları ulaştırma simpleksinde de uygulanır. Herhangi bir bfs'nin en iyi olup olmadığını kontrol etmek için temel dışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri hesaplanmalıdır. Bunun için $\hat{c}_{ij} = \mathbf{c_B B^{-1} a}_{ij} - c_{ij} = \mathbf{wa}_{ij} - c_{ij}$ formülü kullanılır. Burada **w** her kısıt için gölge fiyatları (dual değişkenleri) içeren bir vektördür. Ulaştırma probleminde *m* arz noktası *n* talep noktası olursa; *m* + *n* adet kısıt yer aldığı için **w** içerisinde de bu sayıda eleman bulunur. Diyelim ki; $\mathbf{w} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$ olsun; burada $u_1, \ldots, u_m$, arz kısıtları ile ilgili dual değişkenler, $v_1, \ldots, v_n$ ise talep kısıtları ile ilgili dual değişkenlerdir. a_{ij} ise $\boldsymbol{x}_{ij}$

değişkeninin kısıt katsayılarıdır. Ulaştırma probleminde a_{ij}, *i*'inci ve *m+j*'inci elemanları 1, diğer elemanları 0 olan bir vektördür. Sonuç olarak $\hat{c}_{ij} = \mathbf{w}\mathrm{a}_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ olarak hesaplanır. u_i *ve* v_j değerlerini bulabilmek için $\mathbf{w} = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ ifadesinden $\mathbf{w}\boldsymbol{B} = \mathbf{c}_{BV}$ elde edilir; **B** içerisinde temel değişkenlerin $\mathbf{a}_{ij}$ değerleri yer aldığından her bir temel değişken için $\mathbf{w}\mathbf{a}_{ij} = u_i + v_j = c_{ij}$ yazılabilir. Burada verilen kavramsal açıklama çerçevesinde yöntemin adımları aşağıda verilmiştir.

Yöntemin Adımları

1. Eğer ulaştırma sorunu dengesiz ise dengelenir,
2. KBK, Enküçük Maliyet veya Vogel yöntemlerinden biri kullanılarak bir bfs bulunur,
3. $u_1 = 0$ olarak kabul edip mevcut bfs'deki tüm temel değişkenler için $u_i + v_j = c_{ij}$ denklemi kullanarak *u*'lar ve *v*'ler hesaplanır.
4. (Enküçükleme sorunları için) Tüm temel dışı değişkenler için $\hat{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ ise, en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer bu koşul sağlanmazsa $\hat{c}_{ij}$ değeri en pozitif olan değişken *pivot işlemleri* ile temele girer ve temeldeki değişkenlerden biri çözümden çıkar. Böylece yeni bir bfs bulunmuş olur. Adım 3'e gidiniz.

   (Enbüyükleme sorunları için) Tüm temel dışı değişkenler için $\hat{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$ ise, en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer bu koşul sağlanmazsa $\hat{c}_{ij}$ değeri en negatif olan değişken *pivot işlemleri* ile temele girer ve temeldeki değişkenlerden biri çözümden çıkar. Böylece yeni bir bfs bulunmuş olur. Adım 3'e gidiniz.

Pivot işlemleri

1. Çözüme girecek olan değişken ile temel değişkenlerin bazıları veya hepsi bir döngü oluşturur (sadece bir olası döngü vardır!).
2. Döngüdeki hücreleri çözüme giren hücreden başlayarak sayılır. Sayısı çift olanları (0, 2, 4, vb.) *çift hücreler* olarak işaretlenir. Döngüdeki diğer hücreleri de *tek hücreler* olarak işaretlenir.
3. Tek hücrelerde değeri en küçük olan değişken bulunur. Bu değişken temel dışı kalacaktır. Bulunan en küçük değere Φ denirse; tüm tek hücrelerdeki değerlerden Φ çıkartılır ve çift hücrelerdeki değerlere Φ eklenir. Döngüde olmayan değişkenlerin değeri değişmez. Eğer $\Phi = 0$ ise giren değişken 0 değeri ile çözüme girecektir.

Örnek 1. Powerco

Sorun dengelidir (toplam talep toplam arza eşittir). Powerco örneğine KBK yöntemi uygulanırsa, aşağıdaki tabloda görülen bfs elde edilir (m+n–1=6 temel değişken!).

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 35	6	10	9	35
Santral 2	9 10	12 20	13 20	7	50
Santral 3	14	9	16 10	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

1. İterasyon:

$u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 8$

$u_2 + v_1 = 9 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 1$

$u_2 + v_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 11$

$u_2 + v_3 = 13 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 12$

$u_3 + v_3 = 16 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 4$

$u_3 + v_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 1$

Tüm temel dışı değişkenler için $\hat{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ hesaplanır:

$\hat{c}_{12} = 0 + 11 - 6 = 5$

$\hat{c}_{13} = 0 + 12 - 10 = 2$

$\hat{c}_{14} = 0 + 1 - 9 = -8$

$\hat{c}_{24} = 1 + 1 - 7 = -5$

$\hat{c}_{31} = 4 + 8 - 14 = -2$

$\hat{c}_{32} = 4 + 11 - 9 = 6$

$\hat{c}_{32}$ en pozitif olan değeri verdiğinden, x_{32} temel değişken olacaktır.

x_{32}'nin de olduğu döngü (3,2)-(3,3)-(2,3)-(2,2) şeklindedir: Φ = 10 bulunur.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 35	6	10	9	35
Santral 2	9 10	12 **20–Φ**	13 **20+Φ**	7	50
Santral 3	14	9 **Φ**	16 **10–Φ**	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{33} temel dışı değişken olacaktır. Yeni bfs aşağıdaki tabloda verilmiştir:

<u>2. *İterasyon:*</u>

u_i/v_j	8	11	12	7	ARZ
0	8 35	6	10	9	35
1	9 10	12 10	13 30	7	50
-2	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$\hat{c}_{12} = 5$, $\hat{c}_{13} = 2$, $\hat{c}_{14} = -2$, $\hat{c}_{24} = 1$, $\hat{c}_{31} = -8$, $\hat{c}_{33} = -6$

$\hat{c}_{12}$ en pozitif değeri verdiğinden, x_{12} çözüme girer.

x_{12}'nin de olduğu döngü (1,2)-(2,2)-(2,1)-(1,1) şeklindedir ve Φ = 10'dur.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 **35–Φ**	6 **Φ**	10	9	35
Santral 2	9 **10+Φ**	12 **10–Φ**	13 30	7	50
Santral 3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{22} çözümden çıkar. Yeni bfs aşağıdaki tabloda verilmiştir:

<u>3. *İterasyon:*</u>

u_i/v_j	8	6	12	2	ARZ
0	8 25	6 10	10	9	35
1	9 20	12	13 30	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$\hat{c}_{13} = 2$, $\hat{c}_{14} = -7$, $\hat{c}_{22} = -5$, $\hat{c}_{24} = -4$, $\hat{c}_{31} = -3$, $\hat{c}_{33} = -1$

$\hat{c}_{13}$ en pozitif olan değeri verdiğinden, x_{13} temel değişken olacaktır.

x_{13}'ün de olduğu döngü (1,3)-(2,3)-(2,1)-(1,1) şeklindedir. Φ = 25

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 **25–Φ**	6 10	10 **Φ**	9	35
Santral 2	9 **20+Φ**	12	13 **30–Φ**	7	50
Santral 3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{11} temel dışı değişken olur. Yeni bfs:

4. İterasyon:

u_i/v_j	6	6	10	2	ARZ
0	8	6 10	10 25	9	35
3	9 45	12	13 5	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$\hat{c}_{11} = -2$, $\hat{c}_{14} = -7$, $\hat{c}_{22} = -3$, $\hat{c}_{24} = -2$, $\hat{c}_{31} = -5$, $\hat{c}_{33} = -3$

Tüm $\hat{c}_{ij}$'ler negatif olduğundan en iyi çözüm bulunmuştur.

Rapor

Santral 2'den Şehir 1'e 45 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 1'den Şehir 2'ye 10 milyon kwh elektrik gönderilmelidir. Benzer şekilde Santral 3'den Şehir 2'ye 10 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 1'den Şehir 3'e 25 milyon kwh ve Santral 2'den Şehir 3'e 5 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 3'den Şehir 4'e 30 milyon kwh elektrik gönderilmelidir

Toplam taşıma maliyeti: z = .9(45) + 6(10) + 9(10) + 10(25) + 13(5) + 5(30) = $1020.

7.5 ULAŞTIRMA SORUNLARI İÇİN DUYARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde ulaştırma sorunları için duyarlılık analizi ile ilgili aşağıdaki noktalar incelenmektedir:

- Temel Dışı Değişkenin (NBV) amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi.
- Temel Değişkenin (BV) amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi.
- Bir arzın Δ kadar artırılması ve bir talebin Δ kadar artırılması.

Bu değişiklikler Powerco sorunu kullanılarak açıklanmaktadır. Anımsanacağı gibi Powerco sorunu için en iyi çözüm z=$1,020'dir ve en iyi tablo önceki verilmiştir.

Temel Dışı Değişkenin Amaç Fonksiyon Katsayısının Değiştirilmesi

Temel dışı bir x_{ij} değişkeninin amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi en iyi tablonun sağ taraf değerini değiştirmez. Bu nedenle mevcut temel hala olurludur.
$\mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}$ değişmediğinden u_i'ler ve v_j'ler değişmez. 0. satırda yalnız x_{ij}'nin katsayısı değişir. Bu nedenle x_{ij}'nin katsayısı en iyi tablonun 0. satırında pozitif olmayan bir değer aldığı sürece mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 1. 1 milyon kwh elektriğin Santral 1'den Şehir 1'e iletim maliyetinin hangi aralıktaki değerleri için mevcut temel en iyi kalır?
c_{11}'in 8'den 8+Δ'ya değiştirildiği varsayılsın. Δ'nın hangi değerleri için mevcut temel en iyi kalır? $\bar{c}_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 6 - (8 + \Delta) = -2 - \Delta$.
Bu nedenle mevcut temel $-2 - \Delta \leq 0$, ya da $\Delta \geq -2$, ve $c_{11} \geq 8 - 2 = 6$ olduğu sürece mevcut temel en iyi kalır.

Temel Değişkenin Amaç Fonksiyon Katsayısının Değiştirilmesi

$\mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}$ değeri değiştirildiği için 0. satırdaki her temel dışı değişkenin katsayısı değişebilir. Mevcut temelin en iyi kalıp kalmadığını belirlemek için yeni u_i'ler ve v_j'ler bulunmalı ve bu değerler kullanılarak her temel dışı değişken için olurluluk koşulu denetlenmelidir. Mevcut temel, temel dışı değişkenlerin olurluluk denetimi pozitif olmayan bir sonuç verdiği sürece en iyi kalır.

Örnek 2. 1 milyon kwh elektriğin Santral 1'den Şehir 3'e iletim maliyetinin hangi aralıktaki değerleri için mevcut temel en iyi kalır?
c_{13}'ün 10'dan 10+Δ'ya değiştiği varsayılsın. O zaman $\bar{c}_{13} = 0$ denklemi $u_1 + v_3 = 10$'dan $u_1 + v_3 = 10 + \Delta$'ya dönüşür. Bu nedenle u_i'lerin ve v_j'lerin bulunması için, aşağıdaki denklemler çözülmelidir.

$u_1=0$
$u_2 + v_1 = 9$
$u_1 + v_2 = 6$
$u_2 + v_3 = 13$
$u_3 + v_2 = 9$
$u_1 + v_3 = 10 + \Delta$
$u_3 + v_4 = 5$

Bu denklemlerin çözülmesi ile $u_1 = 0$, $v_2 = 6$, $v_3 = 10 + \Delta$, $v_1 = 6 + \Delta$, $u_2 = 3 - \Delta$, $u_3 = 3$, ve $v_4 = 2$ sonuçları elde edilir.

Bundan sonra her temel dışı değişken için olurluluk denetimi yapılır. Her temel dışı değişken 0. satırda pozitif olmayan bir katsayıya sahip olduğu sürece mevcut temel en iyi kalır.

$$\bar{c}_{11} = u_1 + v_1 - 8 = \Delta - 2 \leq 0 \qquad \Delta \leq 2$$
$$\bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - 9 = -7$$
$$\bar{c}_{22} = u_2 + v_2 - 12 = -3 - \Delta \leq 0 \qquad \Delta \geq -3$$
$$\bar{c}_{24} = u_2 + v_4 - 7 = -2 - \Delta \leq 0 \qquad \Delta \geq -2$$
$$\bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - 14 = -5 + \Delta \leq 0 \qquad \Delta \leq 5$$
$$\bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - 16 = \Delta - 3 \leq 0 \qquad \Delta \leq 3$$

Bu nedenle mevcut temel $-2 \leq \Delta \leq 2$, ya da $8 \leq c_{13} \leq 12$ eşitsizlikleri geçerli olduğu sürece en iyi kalır.

Hem s_i Arzının Hem de d_j Talebinin Δ Kadar Artırılması

Bu değişiklik ulaştırma sorununun dengeli kalmasını sağlar. u_i'ler and v_j'ler her kısıtın gölge fiyatının negatifi olarak düşünülebileceğinden mevcut temelin en iyi kalması durumunda yeni *z*-değeri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

yeni *z*-değeri = eski *z*-değeri + Δ (u_i) + Δ (v_j)

Örneğin, 1. Santralin arzı ve 2. Şehrin talebi 1 birim arttığında

yeni maliyet = 1,020 + 1 (0) + 1 (6) = \$ 1,026.

Karar değişkenlerinin yeni değerleri ise şu şekilde bulunabilir:

1. x_{ij} en iyi çözümdeki temel değişkense x_{ij} Δ kadar arttırılır.
2. x_{ij} en iyi çözümdeki temel dışı değişken ise x_{ij}'yi ve bazı temel değişkenleri içeren döngü bulunur. *i* satırında ve döngüde olan tek hücre bulunur. Bu tek hücrenin değeri Δ kadar artırılır ve döngüde dolaşılarak ve değişimli olarak değerler artırılarak ve azaltılarak mevcut temel değişkenlerin yeni değerleri bulunur.

Örnek 3. 1. Santralin arzı (s_1) 2. Şehrin talebi (d_2) 2 birim artarsa yeni çözüm ne olur? x_{12} en iyi çözümdeki bir temel değişken olduğu için, yeni en iyi çözüm:

	u_i/v_j	Şehir 1 6	Şehir 2 6	Şehir 3 10	Şehir 4 2	Arz
Santral 1	0	[8]	[6] 12	[10] 25	[9]	37
Santral 2	3	[9] 45	[12]	[13] 5	[7]	50
Santral 3	3	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Talep		45	22	30	30	

Yeni z-değeri 1,020 + $2u_1$ + $2v_2$ = \$ 1,032.

Örnek 4. 1. Santralin arzı (s_1) 1. Şehrin talebi (d_1) 1 birim artarsa yeni çözüm ne olur? x_{11} mevcut en iyi çözümde temel dışı bir değişken olduğu için x_{11}'i ve bazı temel değişkenleri içeren bir döngü bulunmalıdır. Döngü (1, 1) – (1, 3) – (2, 3) – (2, 1) şeklindedir. İlk satırda olup döngü içinde yer alan tek hücre x_{13}'tür. Bu nedenle yeni en iyi çözüm x_{13} ve x_{21}'yi 1 artırarak ve x_{23}'ü 1 azaltarak bulunmaktadır. Bu değişiklik sonucu aşağıdaki en iyi çözüm ortaya konulur:

	u_i/v_j	Şehir 1 6	Şehir 2 6	Şehir 3 10	Şehir 4 2	Arz
Santral 1	0	[8]	[6] 10	[10] 26	[9]	36
Santral 2	3	[9] 46	[12]	[13] 4	[7]	50
Santral 3	3	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Talep		46	20	30	30	

Yeni z-değeri = 1,020 + u_1 + v_1 = \$ 1,026'dır.

Dikkat! Hem s_1 hem d_1 5 birimden fazla arttırılırsa mevcut temel çözüm olurlu olmaz! Neden?

7.6 GEÇİCİ KONAKLAMA SORUNLARI

Bazı durumlarda gönderim sürecindeki bir nokta hem ürün/hizmet gönderebilir, hem de söz konusu noktaya ürün/hizmet gönderilebilir. Ürün/hizmetin arz noktasından talep noktasına gönderimi sırasında geçici olarak konakladığı bu nokta **geçici konaklama noktası** olarak isimlendirilir.

Bu özelliği olan bir gönderim sorunu geçici konaklama sorunudur.

Geçici konaklama sorununa en iyi çözüm söz konusu sorunu ulaştırma sorununa dönüştürerek bulunabilir.

Uyarı

"Ulaştırma Sorunlarının Formülasyonu" bölümünde belirtildiği gibi, bir başka noktaya bir ürün/hizmet gönderen fakat hiç bir noktadan ürün/hizmet alamayan nokta **arz noktası** olarak isimlendirilir.

Benzer şekilde, bir **talep noktası** da diğer noktalardan ürün/hizmet alabilir fakat hiç bir noktaya ürün/hizmet gönderemez.

Bu açıdan **geçici konaklama noktası**; başka noktalara ürün/hizmet gönderebilen ve başka noktalardan ürün/hizmet alabilen noktalar olarak tanımlanabilir.

Adımlar

1. Eğer sorun dengesiz ise sorunu dengeleyiniz.
   s = dengeli sorun için toplam arz (veya talep) miktarı olsun.
2. Aşağıdaki şekilde bir ulaştırma tablosu kurunuz:
   Her arz ve geçici konaklama noktası için tabloda bir satır gerekecektir,
   Her talep ve geçici konaklama noktası için bir sütun gerekecektir,
   Her arz noktasının arzı o noktanın arz miktarı kadar olacaktır,
   Her talep noktasının talebi o noktanın talep miktarı kadar olacaktır,
   Her geçici konaklama noktasının arzı "o noktanın arz miktarı + *s*" kadar olacaktır,
   Her geçici konaklama noktasının talebi "o noktanın talep miktarı + *s*" olacaktır.
3. Ulaştırma sorununu çözünüz.

Örnek 1. Kuruoğlu

(Winston 7.6.'dan esinlenilmiştir)

Kuruoğlu Malatya ve G.Antep'deki fabrikalarında akrilik iplik üretmektedir. Malatya'daki fabrika günde en fazla 150 ton, G.Antep'teki fabrika ise günde en fazla 200 ton iplik üretebilmektedir. Üretilen iplikler karayolu ile İstanbul, İzmir ve Ankara'daki müşterilere gönderilmektedir. İzmir ve İstanbul'daki müşterilerin talepleri 130 ton iken Ankara'daki müşterilerin talebi 50 tondur. Gönderim maliyetlerindeki değişiklikler yüzünden ürünlerin fabrikalardan uçakla öncelikle Ankara veya Eskişehir'e gönderilmesi ve daha sonra nihai müşterilere bu şehirlerden ulaştırılması düşünülmektedir. Aşağıdaki tabloda şehirler arası birim taşıma maliyetleri verilmiştir. Kuruoğlu toplam taşıma maliyetlerini enazlayacak şekilde müşteri taleplerini karşılamak istemektedir.

TL/ton	Ankara	Eskişehir	İstanbul	İzmir
Malatya	8	13	25	28
G.Antep	15	12	26	25
Ankara	0	6	16	17
Eskişehir	6	0	14	16

Bu sorunda Malatya ve G.Antep arz noktası; İstanbul ve İzmir talep noktası; Ankara ve Eskişehir *geçici konaklama* noktasıdır.

Adım 1. Sorunu dengeleme

Toplam arz = 150 + 200 = 350

Toplam talep = 130 + 130 + 50 = 310

Yapay talep = 350 – 310 = 40

s = 350 (dengeli sorun için toplam arz veya talep miktarı)

Adım 2. Bir ulaştırma tablosu kurma

Geçici konaklama noktası talebi = O noktanın talep miktarı + *s*

Ankara için talep: 50 + 350 = 400 Eskişehir için talep: 0 + 350 = 350

Geçici konaklama noktası arzı = O noktanın arz miktarı + *s*

Ankara için arz: 0 + 350 = 350 Eskişehir için arz: 0 + 350 = 350

	Ankara	Eskişehir	İstanbul	İzmir	Yapay	Arz
Malatya	8	13	25	28	0	150
G.Antep	15	12	26	25	0	200
Ankara	0	6	16	17	0	350
Eskişehir	6	0	14	16	0	350
Talep	400	350	130	130	40	1050

Adım 3. Ulaştırma sorununun çözümü (Adım 2'de oluşturulan ulaştırma tablosunun ulaştırma simpleksi kullanılarak çözümü aşağıda verilmiştir – ulaştırma simpleksinin adımları gösterilmemiştir.)

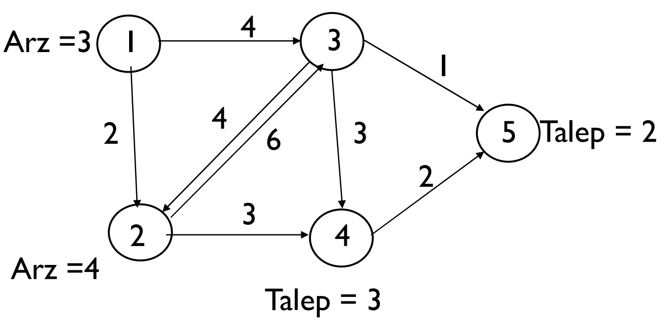
	Ankara	Eskişehir	Istanbul	Izmir	Yapay	Arz
Malatya	8 150	13	25	28	0	150
G.Antep	15	12 30	26	25 130	0 40	200
Ankara	0 250	6	16 100	17	0	350
Eskişehir	6	0 320	14 30	16	0	350
Talep	400	350	130	130	40	1050

Rapor:

Kuruoğlu Malatya'da 150 ton akrilik iplik üretip bunların tamamını Ankara'ya göndermelidir. Ankara'ya gelen 150 ton ürünün 50'si Ankara'nın talebi için kullanılırken; 100'ü İstanbul'a gönderilir. G.Antep'de 160 ton iplik üretilmelidir (Yapayın 40 çıkması G.Antep'in 200 üretim kapasitesinin 40'nın kullanılmayacağını göstermektedir). Üretimin 130'u doğrudan İzmir'e, 30'u Eskişehir üzerinden İstanbul'a gönderilmelidir.

Bu durumda toplam taşıma maliyeti 6830 TL olacaktır.

Örnek 2. Aşağıda bir geçici konaklama problemi ağ yapısı ile gösterilmiştir. Noktaların üzerinde arz/talep miktarları verilmiştir. Olası ulaşım seçenekleri ve birim maliyetleri bağlantılar ve bağlantılar üzerindeki maliyetler ile ifade edilmiştir. Problemi ulaştırma problemine dönüştürerek ulaştırma tablosunu oluşturunuz.



7.7 ATAMA SORUNLARI

Ulaştırma sorunlarında her arz noktasının bir talep noktasına atanmasını ve her talebin karşılanmasını gerektiren özel bir durum söz konusudur. Bu tip sorunlar "atama sorunları" olarak isimlendirilir. Örneğin hangi işçinin veya makinenin hangi işi yapacağını belirlemek bir atama sorunudur.

7.7.1 DP Gösterimi

Bir atama sorununda bir arz noktasını bir talep noktasına atamanın maliyeti c_{ij}'dir.

Öte yandan, bir x_{ij} 0-1 tamsayı değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır:

x_{ij} = 1 eğer *i*. arz noktası *j*. talep noktasının talebini karşılamak üzere atanırsa

x_{ij} = 0 eğer *i*. arz noktası *j*. talep noktasının talebini karşılamazsa

Bu durumda, bir atama sorununun genel DP gösterimi aşağıdaki gibidir:

min $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

öyle ki $\sum_j x_{ij} = 1$ (i=1,2, ..., m) Arz kısıtları

$\sum_i x_{ij} = 1$ (j=1,2, ..., n) Talep kısıtları

$x_{ij} = 0$ veya $x_{ij} = 1$

7.7.2 Macar Yöntemi

Tüm arz ve talep miktarları tamsayı olduğundan, en iyi çözümdeki tüm değişkenler de tamsayı olmalıdır. Her kısıtın ST değeri 1'e eşit olduğundan, her x_{ij} 1'den büyük olmayan ve negatif olmayan bir tamsayı olmalıdır. Bu durumda her x_{ij} 0 veya 1 olmalıdır.

$x_{ij} = 0$ veya $x_{ij} = 1$ kısıtlamasını DP gösteriminde ihmal edersek, her arz noktasının bir adet arz ettiği ve her talep noktasının bir adet talep ettiği dengeli bir ulaştırma sorunu ile karşılaşırız.

Fakat atama sorununun ulaştırma simpleks yöntemi ile çözülmesi yukarıda verilen kısıtlamayı kullanmayacağı için etkin olmayacaktır.

Bu yüzden simpleks'den daha basit bir algoritma olan Macar Yöntemi ile atama sorunları çözülür.

Uyarı

1. Amaç fonksiyonunun enbüyüklenmesi istenilen atama sorunlarında karlar matrisindeki elemanların –1 ile çarpılarak sorunun **enküçükleme** sorunu olarak Macar Yöntemi ile çözülmesi gerekir

2. Eğer maliyet matrisinde satır ve sütun sayıları eşit değilse atama sorunu **dengesiz**dir. Bu durumda sorunu Macar Yöntemi ile çözmeden önce bir veya daha fazla sayıda yapay nokta eklenerek dengelenmelidir..

Adımlar

1. $m \times m$'lik maliyet matrisinin her satırındaki en küçük maliyeti bulunuz.
2. Her maliyetten kendi satırındaki en küçük maliyeti çıkararak bir matris kurunuz.
3. Yeni matrisde her sütunun en küçük maliyetini bulunuz.
4. Bu sefer her maliyetten kendi sütunundaki en küçük maliyeti çıkararak yeni bir matris (indirgenmiş maliyet matrisi) kurunuz.
5. İndirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfırları örtecek şekilde en az sayıda (yatay veya düşey) çizgi çiziniz. Eğer bu işlem için *m* adet çizgi gerekli ise en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer gerekli çizgi sayısı *m* adetten az ise bir sonraki adıma geçiniz.
6. İndirgenmiş maliyet matrisinde Adım 5'de çizilen çizgiler ile örtülmemiş en küçük maliyeti (*k*) bulunuz.
7. Her üstünden çizgi geçmeyen maliyetten *k*'yı çıkarınız ve çift çizgi ile örtülen her maliyete *k*'yı ekleyiniz. Adım 5'e dönünüz.

Örnek 1. Uçuş Ekibi

(Winston 7.5.'den esinlenilmiştir)

Dört adet kaptan pilot (P1, P2, P3, P4) uçuşlarda beraber oldukları dört adet uçuş teknisyenini (T1, T2, T3, T4) yetkinlik, uyum ve moral motivasyon açısından 1-20 ölçeğinde değerlendirmişlerdir (1: çok iyi, 20: çok kötü). Değerlendirme notları tabloda verilmiştir. Havayolu şirketi her uçuş teknisyeninin kaptan pilotlara atamasını bu değerlendirmelere göre yapmak istemektedir.

	T1	T2	T3	T4
P1	2	4	6	10
P2	2	12	6	5
P3	7	8	3	9
P4	14	5	8	7

Yanıt: Adım 1 & 2 Tablodaki her satır için en küçük maliyetler bulunur ve her maliyetten kendi satırındaki en küçük maliyet çıkarılır.

				Satır min					
2	4	6	10	2		0	2	4	8
2	12	6	5	2	$\Rightarrow$	0	10	4	3
7	8	3	9	3		4	5	0	6
14	5	8	7	5		9	0	3	2

Adım 3 & 4. Yeni matrisin her sütunun en küçük maliyeti bulunur. Her maliyetten kendi sütunundaki en küçük maliyeti çıkararak indirgenmiş maliyet matrisi elde edilir.

	0	2	4	8		0	2	4	6
	0	10	4	3	⇒	0	10	4	1
	4	5	0	6		4	5	0	4
	9	0	3	2		9	0	3	0
Sütun min	0	0	0	2					

Adım 5. Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi 3. ve 4. satır ile 1. sütunda çizilecek çizgiler indirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfırları örter. Gerekli en az çizgi sayısı 3'dür. 4'den az çizgi gerektiğinden çözüm en iyi değildir. Bir sonraki adıma geçilir.

0	2	4	6
0	10	4	1
4	5	0	4
9	0	3	0

Adım 6 & 7. Örtülememiş en küçük maliyet 1'dir. Her örtülmemiş maliyetten 1 çıkarılır ve iki çizgi ile örtülenlere 1 eklenir.

0	**2**	**4**	**6**		0	1	3	5
0	**10**	**4**	**1**	⇒	0	9	3	0
4	5	0	4		5	5	0	4
9	0	3	0		10	0	3	0

Yeni tabloda tüm sıfırları dörtten daha az çizgi ile örtmek mümkün değildir. En iyi çözüm bulunmuştur.

Sütun 3'deki tek sıfır x_{33}'de ve Sütun 2'deki tek sıfır x_{42}'dedir. Satır 4 tekrar kullanılmayacağı için Sütun 4 için kalan sıfır x_{24}'dedir. Son olarak x_{11}'i seçeriz. Seçilen tüm karar değişkenleri 1'e eşittir.

Rapor:

P1 T1 ile, P2 T4 ile, P3 T3 ile ve P4 T2 ile uçmalıdır.

Örnek 2. Enbüyükleme sorunu

	F	G	H	I	J
A	6	3	5	8	10
B	2	7	6	3	2
C	5	8	3	4	6
D	6	9	3	1	7
E	2	2	2	2	8

Rapor:

En iyi kar = 36, Atamalar: A-I, B-H, C-G, D-F, E-J

Alternatif en iyi çözüm: A-I, B-H, C-F, D-G, E-J

Örnek 3. Dört iş beş işçi tarafından aşağıda verilen tablodaki zamanlarda yapılabilmektedir. Süreler dakika cinsinden verilmiştir. Çizgiler (--) o işçinin o işi yapamayacağını göstermektedir. Toplam gerekli zamanı en küçüklemek için hangi iş hangi işçiye atanmalıdır?

İşçi	İş A	İş B	İş C	İş D
1	22	18	30	18
2	18	--	27	22
3	26	20	28	28
4	16	22	--	14
5	21	--	25	28

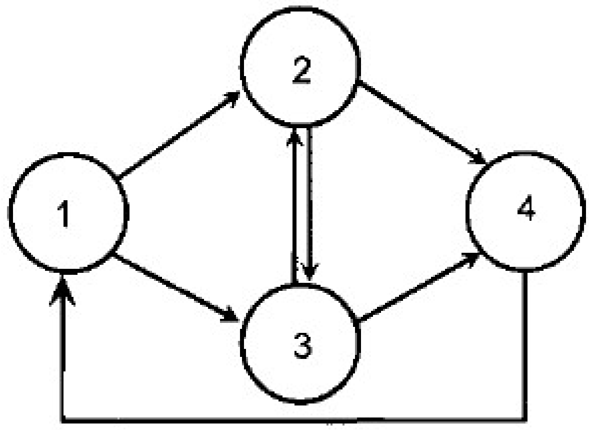
8. AĞ MODELLERİNE GİRİŞ

Telefon hatları, internet, kara yolları, elektrik sistemleri ve su dağıtım sistemleri gibi bir çok fiziksel yapı yaşamımızın içerisinde olan çok bilinen ağlardır. Bu sistemler, ürünlerin en kısa yolla veya en düşük maliyet ile istenilen yerlere gönderilmesi gibi ortak problemler içerirler. Bu fiziksel ağlar gibi bir çok en iyileme problemi de ağ gösterimi ile analiz edilebilir.

Ağ enyilemesi konusunun kökleri 1940'lara doğrusal programlamanın gelişmesine kadar gider. Bundan sonra teorik ve uygulama araştırmalarının artması ve pratik birçok probleme uygulanması ile ağ enyilemesi konusu hızla gelişmiştir.

Ders kapsamında birkaç önemli ağ modelinin tanıtımı yapılacaktır: bu konular içerisinde en kısa yol problemi, en büyük akış problemi, en küçük maliyetli akış problemi ve proje yönetimi vardır.

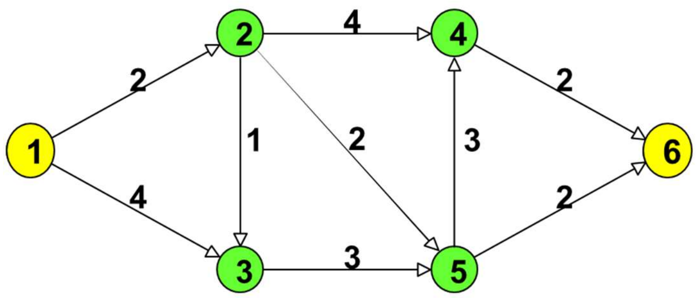
Bir ağ veya çizge iki ana unsur ile tanımlanır. Bir yönlü $G(N,S)$ ağı sonlu düğüm (köşe, nokta) kümesi N = {1,2,..., *m*} ve bu düğümleri birbirlerine bağlayan sonlu yönlü bağlantı (yay, dal, çizgi) kümesi S = {(*i*,*j*), (k,*l*),...,(*s*, *t*)} ile tanımlanır. (*i*,*j*) bağlantısı *i* ve *j* düğümlerini *i*'den *j* yönüne bağlar. Bir ağın *m* düğüm ve *n* bağlantıdan oluştuğu varsayılabilir. Örneğin aşağıdaki ağ dört düğüm ve yedi bağlantıdan oluşmaktadır ve *N* = {1,2,3,4}, *S* = {(1,2), (1,3), (2,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1)}.



8.2 EN KISA YOL PROBLEMİ

m düğüm ve *n* bağlantıdan oluşan bir *G*(*N*,*S*) ağını göz önüne alalım. Her $(i,j) \in S$ bağlantısı için bir c_{ij} maliyeti verilsin. Bir başlangıç noktasından (düğüm 1) bitiş noktasına (düğüm *m*) en kısa rotayı bulma problemine en kısa yol problemi denir.

Örnek 1. Firmalara kargo hizmeti veren ATK-Brown şirketi, bir müşterisinin ürünlerini dağıtım merkezinden (düğüm 1) müşterinin deposuna (düğüm 6) taşımak istemektedir. Olası yollar ve km cinsinden uzunlukları aşağıdaki şekilde verilmiştir. Burada problem 1. noktadan 6. noktaya ulaşmak için en kısa rotayı belirlemektir.



8.2.1 En kısa yol probleminin DP gösterimi

x_{ij} = 0 veya 1; (*i*,*j*) bağlantısının en kısa yol üzerinde olup olmadığı göstermek üzere,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Öyle ki; $\sum_{j=1}^{m} x_{1j} = 1$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = 0 \qquad i=2,\ldots,m-1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{im} = 1$$

x_{ij} = 0 veya 1, i,j=1,2,…,*m*.

Burada toplamlar ağdaki mevcut olan bağlantılar için hesaplanır.

8.2.2 Dijkstra Algoritması

Tüm $c_{ij} \geq 0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durum için bir noktadan (düğüm 1) diğer tüm noktalara en kısa yolu veren çok basit ve etkin bir yöntem vardır: Dijkstra Algoritması. Bu yöntem bir etiketleme algoritmasıdır ve düğümleri önce geçici sonra da kalıcı olarak etiketleyerek ilerler.

BAŞLANGIÇ ADIMI

Başlangıç düğümü (düğüm 1) 0 olarak kalıcı etiketlenir.

Diğer tüm düğümler ∞ olarak geçici etiketlenir.

ANA ADIM

1) Tüm geçici etiketleri güncelle:

j düğümü geçici etiketi=

$$\min\begin{cases} j \text{ düğümünün mevcut geçici etiketi} \\ i \text{ düğümünün kalıcı etiketi} + (i,j)\text{bağlantısının uzunluğu}, (i,j) \in S \text{ için} \end{cases}$$

2) En küçük geçici etikete sahip düğümün geçici etiketini kalıcıya çevir.

3) Ana adımı varış düğümünün kalıcı etiketini buluncaya kadar yürüt, bulunca dur.

En kısa rotayı bulabilmek için *m*'den 1'e geriye doğru; etiketleri arasındaki fark aralarındaki mesafeye eşit olan düğümlerden geçerek gidilir.

Örnek 2. Örnek 1'deki problem için en kısa yolu bulunuz.
Yanıt: P(*i*): *i*'nin kalıcı etiketi; T(*i*): *i*'nin geçici etiketi olmak üzere;

BAŞLANGIÇ ADIMI
P(1) = 0, T(i) = ∞, i = 2,…,6.

ANA ADIM – 1'nci koşum
T(2) = min (∞, P(1) + c_{12}) = min (∞, 2) = 2
T(3) = min (∞, P(1) + c_{13}) = min (∞, 4) = 4
T(4) = T(5) = T(6) = ∞
Düğüm 2'nin geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(2) = 2.

ANA ADIM – 2'nci koşum
T(3) = min (4, P(2) + c_{23}) = min (4, 2+1) = 3
T(4) = 6, T(5) = 4, T(6) = ∞
Düğüm 3'nin geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(3) = 3.

ANA ADIM – 3'üncü koşum
T(4) = 6
T(5) = min (4, P(3) + c_{35}) = min (4, 6) = 4
T(6) = ∞
Düğüm 5'in geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(5) = 4.

ANA ADIM – 4'üncü koşum
T(4) = min (6, P(5) + c_{54}) = min (6, 7) = 6
T(6) = min (∞, P(5) + c_{56}) = (∞, 6) = 6
Düğüm 6'nın geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; P(6) = 6. Varış düğümünün kalıcı etiketi bulundu, dur.

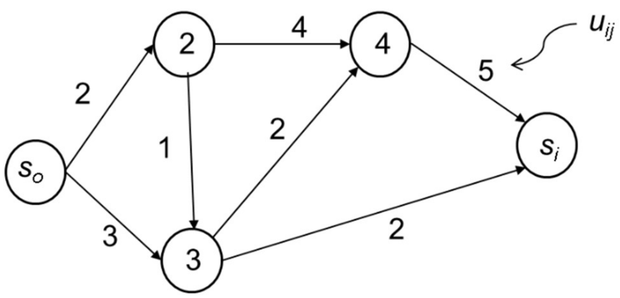
En kısa yol 1-2-5-6 düğümlerinden geçmektedir. Toplam maliyet (toplam uzaklık) 6 km'dir.

8.3 EN BÜYÜK AKIŞ PROBLEMİ

m düğüm ve *n* bağlantıdan oluşan bir $G(N,S)$ ağını göz önüne alalım. Ağ üzerinden tek bir ürünün akışı planlanmak istensin. Her $(i,j) \in S$ bağlantısının üzerinde akan ürün miktarı bir u_{ij} üst limiti ile sınırlandırılsın. Bu şekilde tanımlanan bir ağda bir başlangıç noktasından (düğüm 1) bitiş noktasına (düğüm *m*) en fazla ürün akışını bulma en büyük akış problemi olarak tanımlanır. Problemde herhangi bir maliyet söz konusu değildir.

Örnek 3. (Winston 8.3'ten esinlenilmiştir.)

ATK-Petrol aşağıda verilen ağ üzerinde s_o 'dan s_i'ye bir saatte gönderilecek ham petrolü miktarını enbüyüklemek istemektedir. Ham petrol s_o 'dan s_i'ye taşınırken 2, 3 ve 4 numaralı istasyonların hepsinden veya bir kısmından geçmelidir. Şekildeki bağlantılar farklı çaptaki boru hatlarını göstermektedir. Her bir bağlantı üzerinden bir saatte taşınabilecek en fazla petrol miktarları milyon varil cinsiden şekil üzerinde verilmiştir. Burada problem verilen şartlarda s_o 'dan s_i'ye bir saatte gönderilecek en fazla ham petrol miktarını bulmaktır.



8.3.1 En büyük akış probleminin DP gösterimi

Düğüm 1'den düğüm *m*'ye akış *f* ile; (i,j) bağlantısı üzerindeki akış x_{ij} ile gösterilmek üzere;

Maks f

Öyle ki; $\sum_{j=1}^{m} x_{1j} = f$

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = 0$ i=2,…,*m*-1

$$\sum_{i=1}^{m} x_{im} = f$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad i,j = 1,2,\dots,m.$$

$x_{ij} \geq 0$, $i,j=1,2,\dots,m$.

Burada toplamlar ve eşitsizlikler ağdaki mevcut olan bağlantılar için tanımlanmıştır.

Örnek 4. Örnek 3'te verilen problemi çözmek için gerekli DP'yi kurunuz.

Yanıt:

Maks f

Öyle ki;

$$\begin{aligned}
&x_{12} + x_{13} = f \\
&x_{23} + x_{24} - x_{12} = 0 \\
&x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} = 0 \\
&x_{45} - x_{24} - x_{34} = 0 \\
&x_{45} + x_{35} = f \\
&x_{12} \leq 2 \\
&x_{13} \leq 3 \\
&x_{23} \leq 1 \\
&x_{24} \leq 4 \\
&x_{34} \leq 2 \\
&x_{35} \leq 2 \\
&x_{45} \leq 7
\end{aligned}$$

Tüm değişkenler ≥ 0

(not: s_0 ve s_i noktalarının indis numaraları 1 ve 5 olarak alınmıştır.)

Örnek 5. Projeye işgücü planlama

Bir inşaat firması gelecek dört ay içinde üç projeyi bitirmek zorundadır. Projelerin bitirilmesi gereken zamanları ve bu sürede gerekli toplam işgücü miktarı (adam*ay olarak) tabloda verilmiştir. Firmanın elinde 8 adet işçi bulunmaktadır. Bir projede bir ayda en fazla 6 işçi görevlendirilebilir. Üç projenin zamanında tamamlanıp tamamlanmayacağını bulabilmek için bir en büyük akış problemi tanımlayınız. (İpicu: Eğer en büyük akış 30 olursa projeler zamanında tamamlanır.)

Proje no	Bitirme zamanı	Gerekli işgücü
1	3. ay sonu	8 adam*ay
2	4. ay sonu	10 adam*ay
3	2. ay sonu	12 adam*ay

8.4 EN KÜÇÜK MALİYETLİ AKIŞ PROBLEMİ

En küçük maliyetli akış problemi ders kapsamında işlenen ulaştırma, atama, geçici konaklama, en küçük maliyetli akış, en büyük akış ve CPM problemlerinin en genel halidir. En küçük maliyetli akış problemine düğümler için talep ve arz değerleri ile bağlantılarla ilgili maliyetler ve üst / alt sınırlar dahil edilebilir. Problemin tanımı aşağıda verilmiştir.

m düğüm ve *n* bağlantıdan oluşan bir *G*(*N*,*S*) ağını göz önüne alalım. *N* kümesindeki her *i* düğümü için bir b_i tanımlanır. b_i, eğer $b_i > 0$ ise arz miktarını, eğer $b_i < 0$ ise talep miktarını ifade eder. *i* düğümleri; eğer $b_i > 0$ ise arz noktası, eğer $b_i < 0$ ise talep noktası olarak sınıflandırılabilir. Eğer $b_i = 0$ ise *i* düğümü arz veya talep noktası değildir, geçici konaklama veya ara nokta olarak isimlendirilebilir. Her $(i,j) \in S$ bağlantısı için bağlantı üzerindeki akış x_{ij} gösterilsin. Ayrıca her bağlantı için c_{ij} maliyeti ve bağlantı üzerindeki akışın en büyük ve en küçük miktarları u_{ij} ve l_{ij} verilsin.

En küçük maliyetli akış problemi, verilen şartlarda kullanılabilir arzın ağ boyunca taşınarak talepleri en küçük maliyetle taşınması olarak tanımlanır.

Matematiksel olarak problem aşağıdaki DP ile ifade edilebilir (toplamlar ve eşitsizlikler ağdaki mevcut olan bağlantılar için tanımlanmıştır.)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Öyle ki; $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = b_i$ $\qquad$ i=1,…,m

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad i,j = 1,2,\ldots,m.$$

$x_{ij} \geq 0$, i,j=1,2,…,m.

Burada akış dengeleme denklemleri olarak ifade edilen ilk kısıt *i* düğümündeki net akışın b_i'ye eşit olmasını sağlar. İkinci kısıt bağlantılardaki akışın alt ve üst sınırlar içerisinde kalmasını sağlar.

Örnek 6. (Winston 8.5'ten esinlenilmiştir.)

Aşağıda verilen yol ağına her saat 1 noktasından 900 araç girmektedir. Bu araçlardan 300 tanesi 4 noktasından, 500 tanesi 6 noktasından ve 100 tanesi de 5 noktasından çıkacaktır. Şekil üzerinde her bağlantı üzerinde, araçların bağlantıyı geçme süresi (dakika olarak) ve bağlantıdan bir saatte geçebilecek azami araç sayısı verilmiştir. tüm araçların 1 noktasından 4, 5 ve 6 noktalarına en kısa sürede varması için problemi en küçük maliyetli akış problemi olarak modelleyiniz.