END 331 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI 1
2020-2021 Bahar Yarıyılı
YARI YIL SINAVI 2 – ÇÖZÜMLER

SORU 1. (25 puan)

Maks $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 + c_4x_4$

Öyle ki;

$2x_1 - 2x_2 + x_3 - \ x_4 \ \leq 7$

$2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 \ \geq b_2$

$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

a) (12,5 puan)

Verilen doğrusal programda BV = $\{x_1, x_2, x_3\}$ temel çözümünün olurlu olması için b_2'nin alabileceği değerleri bulunuz (b_2 için aralık bulunuz).

Soruda temel değişkenler $\{x_1, x_2, x_3\}$ olarak belirtilmiş. Bu durumda B matrisi kısıtlardaki temel değişken katsayılarından bulunur. Ardından B matrisinin tersi hesaplanır.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Verilen kısıtların sağ tarafından b vektörü belirlenir.

$$b = \begin{bmatrix} 7 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B^{-1}b = b' \geq 0$ ise verilen temel değişkenler olurludur.

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 + 2.5b_2 \\ -3.5 + 1.5b_2 \\ 7 - 2b_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$-3.5 + 2.5b_2 \geq 0 \ \rightarrow b_2 \geq 1.4$

$-3.5 + 1.5b_2 \geq 0 \ \rightarrow \ b_2 \geq 2.33$

$7 - 2b_2 \geq 0 \rightarrow b_2 \leq 3.5$

Tüm koşulların sağlanması için $2.33 \leq b_2 \leq 3.5$ olmalıdır.

b) (12,5 puan)

Verilen doğrusal programda BV = $\{x_1, x_2, x_3\}$ temel çözümünün en iyi çözüm olabilmesi için c_4 ve b_2'nin alabileceği değerleri bulunuz (c_4 ve b_2 için aralık bulunuz).

Çözümün en iyi olabilmesi için öncelikle çözümün olurlu olması gerekir (a şıkkı):

$2.33 \leq b_2 \leq 3.5$ olmalıdır.

Diğer yandan tüm temel dışı değişkenler için $z_j - c_j \geq 0$ olmalıdır.

x_4 için;

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - c_4 \geq 0$$

$$-5 - c_4 \geq 0$$

$$\boldsymbol{c_4 \leq -5}$$

s_1 için (1. Kısıtın gevşek değişkeni);

$$z_5 - c_5 = c_B B^{-1} a_5 - c_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \geq 0$$

$$2 \geq 0$$

e_2 için (2. Kısıtın gevşek değişkeni);

$$z_6 - c_6 = c_B B^{-1} a_6 - c_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \geq 0$$

$$3 \geq 0$$

s_1 ve e_2 için koşul sağlanmaktadır. x_4 için $c_4 \leq -5$ olmalıdır.

Sonuç olarak verilen temel çözümün en iyi olabilmesi için $2.33 \leq b_2 \leq 3.5$ ve $c_4 \leq -5$ olmalıdır.

SORU 2. (30 puan)

Maks $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$
Öyle ki;

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 7$$
$$2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 3$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Verilen doğrusal programda BV = $\{x_1, x_2, x_3\}$ temel çözümünden başlayarak düzeltilmiş simpleks (tablo formatı) algoritmasını bir iterasyon uygulayınız.
Yeni çözüm için Simpleks tablosunu oluşturunuz, çözümün en iyi olup olmadığını değerlendiriniz, eğer en iyi değil ise iyileştirmek için çözüme girmesi ve çıkması gereken değişkenleri belirleyiniz.

Öncelikle DP standart biçime dönüştürülür:

Maks $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$
Öyle ki;

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + s_1 = 7$$
$$2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 - e_2 = 3$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, e_2 \geq 0$$

(Verilen bir temel çözüm olduğu için yapay değişken eklemeye gerek yoktur)

Soruda temel değişkenler $\{x_1, x_2, x_3\}$ olarak belirtilmiş. Bu durumda B matrisi ve B matrisinin tersi hesaplanır. Önceki soruda bu matrislerin değerleri bulunmuştu. Tabloyu tamamlamak için w, b' ve z değerlerine ihtiyaç vardır.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = w = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b' = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z = wb = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 5$$

Başlangıç tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur:

	2	-3	3	5
x1	-0.5	2.5	-3	4
x2	-0.5	1.5	-2	1
x3	1	-2	2	1

Temel Dışı Değişkenler için indirgenmiş maliyetler hesaplanır:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j$$

x4		2	-3	3	-1				
					2	-	-1	=	-4
					1				
s1		2	-3	3	1				
					0	-	0	=	2
					0				
e2		2	-3	3	0				
					-1	-	0	=	3
					0				

İndirgenmiş maliyetlerde negatif değer olduğundan (maksimum problemi için) mevcut çözüm en iyi değildir. **x_4 çözüme girer** ve sütunu şöyle bulunur;

$$y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 & -3 \\ -0.5 & 1.5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Oran testi yaplır:

						x4	Oran
	2	-3	3	5		-4	
x1	-0.5	2.5	-3	4		2.5	1.6
x2	-0.5	1.5	-2	1		1.5	0.667
x3	1	-2	2	1		-3	-

Oran testine göre **x_2 çıkan değişken** olur. Yeni tablo:

	0.6667	1	-2.333	7.6667
x1	0.3333	0	0.3333	2.3333
x4	-0.333	1	-1.333	0.6667
x3	0	1	-2	3

Temel Dışı Değişkenler için indirgenmiş maliyetler hesaplanır:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j$$

$$z_2 - c_2 = 2.67$$

$$z_5 - c_5 = 0.67 \text{ (s1 için)}$$

$$z_6 - c_6 = -1 \text{ (e2 için)}$$

e2'nin indirgenmiş maliyeti negatif olduğu için en iyi çözüm değildir. e2 çözüme girer, çıkan değişkeni bulabilmek için e2'nin sütunu bulunup oran testi yapılmalıdır:

$$y_6 = B^{-1}a_6 = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & 0.33 \\ -0.33 & 1 & -1.33 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi e2'nin sütununda pozitif değer yoktur. Bu yüzden oran testi yapılamaz, çözüm sınırsızdır!

SORU 3. (30 puan)

a) (14 puan)

Her danışmana 1 veya 2 öğrenci atanacağından danışmanların 1. ve 2. Öğrencileri ayrı sütun olarak gösterilmiştir. Toplam 5 öğrenci ve 6 boş kontenjan olduğu için yapay satır (ÖY) eklenir. Atama tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur:

	D1_1	D2_1	D3_1	D1_2	D2_2	D3_2
Ö1	4	-M	1	4	-M	1
Ö2	2	4	-M	2	4	-M
Ö3	-M	1	4	-M	1	4
Ö4	4	1	2	4	1	2
Ö5	4	2	-M	4	2	-M
ÖY	0	0	0	0	0	0

Öğrencinin en çok çalışmak isteği öğretim görevlisi kazancı 4, öğrencinin 2. tercihi olan öğretim görevlisi kazancı 2 ve son tercihi için kazancı 1 olarak belirlenmiştir. Çalışıma olasılığı olmayan eşleşme için negatif büyük bir değer olan -M değer atanmıştır.

b) 16 puan

a şıkkında oluşturulan model maksimizasyondur. Macar yöntemi ile çözmek için öncelikle tüm maliyetler -1 ile çarpılarak problem minimizasyona dönüştürülür:

Macar Yöntemi uygulamasında öncelikle satır minimumları bulunur ve her satırdan çıkarılır, sonra sütun minimumları bulunur ve her sütundan çıkarılır:

	D1_1	D2_1	D3_1	D1_2	D2_2	D3_2	Satır min
Ö1	-4	M	-1	-4	M	-1	-4
Ö2	-2	-4	M	-2	-4	M	-4
Ö3	M	-1	-4	M	-1	-4	-4
Ö4	-4	-1	-2	-4	-1	-2	-4
Ö5	-4	-2	M	-4	-2	M	-4
ÖY	0	0	0	0	0	0	0

	D1_1	D2_1	D3_1	D1_2	D2_2	D3_2
Ö1	0	M	3	0	M	3
Ö2	2	0	M	2	0	M
Ö3	M	3	0	M	3	0
Ö4	0	3	2	0	3	2
Ö5	0	2	M	0	2	M
ÖY	0	0	0	0	0	0
sütun min	0	0	0	0	0	0

Sütundaki en küçük değerler sıfır olduğu için yeniden bir çıkarma yapılmamıştır.

Oluşan tablo için sıfırları örtecek çizgiler çizilmiştir.

	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Ö1	0	M	3	0	M	3
Ö2	2	0	M	2	0	M
Ö3	M	3	0	M	3	0
Ö4	0	3	2	0	3	2
Ö5	0	2	M	0	2	M
ÖY	0	0	0	0	0	0
satır min	0	0	0	0	0	0

5 çizgi ile tüm sıfır değerleri örtülmektedir. Problemin boyutu 6 olduğu için atamalar bu tabloda yapılamaz.

Atama yapılabilecek bir tablo bulabilmek için; çizgilerin dışındaki en küçük değer olan 2 çizgilerin olmadığı değerlerden çıkartılır. Çizgilerin kesiştiği değerler ise 2 ile toplanır.

	D1_1	D2_1	D3_1	D1_2	D2_2	D3_2
Ö1	0	M	2	0	M	2
Ö2	4	0	M	4	0	M
Ö3	M	3	0	M	3	0
Ö4	0	2	0	0	2	0
Ö5	0	0	M	0	0	M
Ö Y	2	0	0	2	0	0

Tablodaki 0'lar 6'dan daha az çizgi ile kapatılamaz.

Mevcut tablo için ilgili eşleştirmeler yapıldığında;

	D1_1	D2_1	D3_1	D1_2	D2_2	D3_2
Ö1	0	M	2	0	M	2
Ö2	4	0	M	4	0	M
Ö3	M	3	0	M	3	0
Ö4	0	2	0	0	2	0
Ö5	0	0	M	0	0	M
Ö	2	0	0	2	0	0

Öğrenci 1 ve öğrenci 4 danışman 1'e atanmıştır. İlk tabloya göre bu atamanın kazancı 4 + 4 = 8'dir. Öğrenci 2 ve öğrenci 5 ise danışman 2'e atanmıştır. İlk tabloya göre bu atamanın kazancı 4+2 = 6'dır. Öğrenci 3 ise danışman 3 atanarak ilk tabloya göre 4 birimlik bir kazanç oluşturmuştur.

Maks z = 18 birim olarak bulunur.

<u>*Alternatif atama*</u>

	D1	D2	D3	D1	D2	D3
Ö1	0	M	2	0	M	2
Ö2	4	0	M	4	0	M
Ö3	M	3	0	M	3	0
Ö4	0	2	0	0	2	0
Ö5	0	0	M	0	0	M
Ö YAPAY	2	0	0	2	0	0

Öğrenci 1 ve öğrenci 5 danışman 1'e atanmıştır. İlk tabloya göre bu atamanın kazancı 4 + 4 = 8'dir. Öğrenci 3 ve öğrenci 4 ise danışman 3'e atanmıştır. İlk tabloya göre bu atamanın kazancı 4+2 = 6’dır. Öğrenci 2 ise danışman 2 atanarak ilk tabloya göre 4 birimlik bir kazanç oluşturmuştur.

Maks z = 18 birim olarak bulunur.

SORU 4. (25 puan)

a) 12 puan

Toplam talep = 25 + 50 + 40 + 35 = 150

Toplam Arz = 50 + 75 + 40 = 165

Toplam arz toplam talepten büyük olduğu için yapay talep ilave edilir.

Yapay talepte bulunacak değerler müşteriye gönderilmeyip limanda bekleyeceği için limanda depolama maliyetleri tabloya maliyet olarak yazılır.

	BURSA	ANKARA	ANTALYA	UŞAK	YAPAY	
AMBARLI	45	65	75	70	40	50
İZMİR	30	35	45	20	50	75
CEYHAN	85	75	60	50	75	40
	25	50	40	35	15	

b) (13 puan)

En küçük maliyet yöntemi ile temel olurlu çözüm bulma:

En küçük maliyet: c24 = 20, x24 = min (35, 75) = 35

x14 ve x34 temel dışı değişken olur:

45	65	75	70 x	40	50
30	35	45	20 35	50	~~75~~ 40
85	75	60	50 x	75	40
25	50	40	~~35~~ --	15	

En küçük maliyet: c21 = 30, x21 = min (25, 40) = 25

x11 ve x31 temel dışı değişken olur:

[45] x	[65]	[75]	[70] x	[40]	50
[30] 25	[35]	[45]	[20] 35	[50]	~~40~~ 15
[85] x	[75]	[60]	[50] x	[75]	40
~~25~~ 0	50	40		15	

En küçük maliyet: $c_{22} = 35$, $x_{22} = \min(50, 15) = 15$

x_{23} ve x_{25} temel dışı değişken olur.

[45] x	[65]	[75]	[70] x	[40]	50
[30] 25	[35] 15	[45] x	[20] 35	[50] x	~~15~~ 0
[85] x	[75]	[60]	[50] x	[75]	40
	~~50~~ 35	40		15	

En küçük maliyet: $c_{15} = 40$, $x_{15} = \min(15, 50) = 15$

X_{35} temel dışı değişken olur.

[45] x	[65]	[75]	[70] x	[40] 15	~~50~~ 35
[30] 25	[35] 15	[45] x	[20] 35	[50] x	
[85] x	[75]	[60]	[50] x	[75] x	40
	35	40		~~15~~ 0	

En küçük maliyet: $c_{33} = 60$, $x_{12} = \min(40, 40) = 40$

Burada satır veya sütun iptal edilmelidir, ikisi birden değil.

<u>Alternatif 1 (satır iptal edilir)</u> : x_{32} temel dışı değişken olur.

[45] x	[65]	[75]	[70] x	[40] 15	35
[30] 25	[35] 15	[45] x	[20] 35	[50] x	
[85] x	[75] x	[60] 40	[50] x	[75] x	~~40~~
	35	~~40~~		15	

Tek bir satırda uygun hücre kaldığı için atamalar bu hücrelere yapılır:

45 x	65 35	75 0	70 x	40 15
30 25	35 15	45 x	20 35	50 x
85 x	75 x	60 40	50 x	75 x

Temel değişkenler: x12, x13, x15, x21, x22, x24, x33

<u>Alternatif 2 (Sütun iptal edilir):</u> x13 temel dışı değişken olur:

45 x	65	75 x	70 x	40 15	35
30 25	35 15	45 x	20 35	50 x	
85 x	75	60 40	50 x	75 x	~~40~~ 0
	35				

Tek bir sütunda uygun hücre kaldığı için atamalar bu hücrelere yapılır:

45 x	65 35	75 x	70 x	40 15
30 25	35 15	45 x	20 35	50 x
85 x	75 0	60 40	50 x	75 x

Temel değişkenler: x12, x15, x21, x22, x24, x32, x33.