

END331 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI I DERS NOTLARI (2021-2022)

Dr. Y. İlker Topcu & Dr. Özgür Kabak

Teşekkür:

Prof. W.L. Winston'ın "Operations Research: Applications and Algorithms" kitabı ile Prof. J.E. Beasley's YA ders notlarının bu ders notlarının oluşturulmasına olan katkıları yüzünden her iki profesöre de teşekkür ederiz....
Rastlayabileceğiniz tüm hataların sorumluluğu bize aittir. Lütfen bizi bu hatalardan haberdar ediniz!
İstanbul Teknik Üniversitesi OR/MS takımı

İÇİNDEKİLER

1. YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINA GİRİŞ.....	1
1.1 TERMİNOLOJİ.....	1
1.2 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI YÖNTEMBİLİMİ.....	1
1.3 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASININ TARİHÇESİ	3
2. TEMEL YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI KAVRAMLARI.....	5
3. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE MODELLEME	9
3.1 DP ÖRNEKLERİ	10
3.2 DOĞRUSAL OLMAYAN İFADELERİN DP İLE MODELLENMESİ	18
3.2.1 Mutlak Değerli İfadelerin DP'ye Eklenmesi	18
3.2.2 Parçalı doğrusal Konveks fonksiyonların DP'ye eklenmesi.....	20
3.2.3 Doğrusal Olmayan Konveks Fonksiyonların Dönüşümü.....	21
4. DP'NİN ÇÖZÜMÜ.....	24
4.1 GRAFİK ÇÖZÜM	25
4.2 SİMPLEKS ALGORİTMASI	31
4.3 BÜYÜK M YÖNTEMİ	41
4.4 İKİ AŞAMALI SİMPLEKS	45
4.5 İŞARETİ SINIRLANDIRILMAMIŞ DEĞİŞKENLER.....	53
5. DUYARLILIK ANALİZİ VE DUALİTE	56
5.1 DUYARLILIK ANALİZİ	56
5.1.1 İndirgenmiş Maliyet	56
5.1.2 Gölge Fiyat	56
5.1.3 Kavramsallaştırma.....	57
5.1.4 Grafik Çözüm Kullanarak Duyarlılık.....	58
5.1.5 Duyarlılık için Lindo Çıktısının Kullanılması	63
5.1.6 %100 Kuralı	67
5.2 DUALİTE	74
5.2.1 Primal – Dual.....	74

5.2.2	Bir DP'nin Dualini Bulma	75
5.2.3	Dual Teoremi.....	77
5.2.4	Ekonomik Yorum	79
5.3	DUALİTE VE DUYARLILIK	80
5.4	TÜMLER GEVŞEKLİK TEOREMİ.....	82
5.5	DUAL SİMPLEKS YÖNTEMİ.....	84
5.5.1	Dual simpleks adımları	84
5.5.2	Yeni Bir Kısıt Ekleme	85
5.5.3	Başlangıçta optimallik koşullarını sağlayan problemlerin çözümü	88
6.	DÜZELTİLMİŞ SİMPLEKS VE DUYARLILIK ANALİZİ	91
6.1	DÜZELTİLMİŞ SİMPLEKS YÖNTEMİ	91
6.1.1	Simpleks yönteminin matris biçiminde gösterimi.....	91
6.1.2	Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Adımları	93
6.1.3	Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Tablo Gösterimi	97
6.2	SİMPLEKS KULLANARAK DUYARLILIK.....	103
6.2.1	Analiz 1: Temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi 104	
6.2.2	Analiz 2. Temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi	105
6.2.3	Analiz 3. Kısıt sağ taraf değerinin değişmesi	107
6.2.4	Analiz 4. Yeni bir karar değişkeni eklenmesi.....	108
6.2.5	Analiz 5. Yeni bir kısıt eklenmesi	109
7.	ULAŞTIRMA SORUNLARI.....	111
7.1	ULAŞTIRMA SORUNLARININ FORMÜLASYONU.....	111
7.1.1	Dengeli Ulaştırma Sorununun Formülasyonu	112
7.1.2	Dengesiz bir Ulaştırma Sorununun Dengelenmesi	113
7.2	TEMEL OLURLU ÇÖZÜMÜN BULUNMASI	115
7.2.1	Kuzeybatı Köşe Yöntemi	116
7.2.2	En küçük Maliyet Yöntemi.....	117
7.2.3	Vogel Yaklaşımı	118

7.3	ULAŞTIRMA SİMPLEKSİ.....	120
7.4	ULAŞTIRMA SORUNLARI İÇİN DUYARLILIK ANALİZİ.....	124
7.5	GEÇİCİ KONAKLAMA SORUNLARI.....	127
7.6	ATAMA SORUNLARI.....	130
7.6.1	DP Gösterimi	130
7.6.2	Macar Yöntemi.....	131
8.	AĞ MODELLERİNE GİRİŞ.....	136
8.1	EN KISA YOL PROBLEMİ	137
8.1.1	En kısa yol probleminin DP gösterimi.....	137
8.1.2	Dijkstra Algoritması	137
8.2	EN BÜYÜK AKIŞ PROBLEMİ	139
8.2.1	En büyük akış probleminin DP gösterimi	139
8.3	EN KÜÇÜK MALİYETLİ AKIŞ PROBLEMİ.....	140

1. YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINA GİRİŞ

1.1 TERMİNOLOJİ

"Yöneylem Araştırması" (YA), İngiliz ve Avrupalılar tarafından "Operational Research" ve Amerikalılar tarafından "Operations Research" olarak isimlendirilir ve "OR" olarak kısaltılır.

Bu alanda kullanılan bir diğer terim de "Yönetim Bilimi"dir (Management Science) ve uluslararası literatürde MS olarak kısaltılır. İki terim birleştirilerek "**OR/MS**" veya "ORMS" de denilir.

YA genelde bir "Sorun Çözme" (problem solving) ve "Karar Verme Bilimi" (decision science) olarak da değerlendirilir.

Bazı kaynaklarda YA yerine Endüstri Mühendisliği (Industrial Engineering - IE) kavramı da kullanılır.

Son yıllarda bu alan için tek bir terim kullanılmaya çalışılmaktadır: OR.

Biz de derste bu alan için Yöneylem Araştırmasının Türkçe kısaltması olan YA'yı kullanacağız.

"Yöneylem Araştırması (Yönetim Bilimi) genellikle kıt kaynakların tahsis edilmesi gereken durumlarda en iyi şekilde bir sistemi tasarlamaya ve işletmeye yönelik karar verme sürecine bilimsel bir yaklaşımdır."

Belirli bir hedefi gerçekleştirmek için birlikte çalışan birbirine bağlı bileşenlerin oluşturduğu düzen sistemdir.

1.2 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI YÖNTEMBİLİMİ

Bir sorunun çözümü için YA kullanıldığı zaman aşağıdaki yedi adımlık süreç takip edilmelidir.

Adım 1. Sorunun Formülasyonu

YA analisti (sorunu olan karar vericiye YA teknikleri ile yardımcı olan kişi) ilk olarak sorunu tanımlar. Sorunun tanımlanması; amaçların ve sorunu oluşturan sistemin bileşenlerinin belirlenmesi ile olur.

Adım 2. Sistemin İncelenmesi

Daha sonra analist sorunu etkileyen parametrelerin değerlerini belirlemek için veri toplar. Söz konusu değerler sorunu temsil edecek bir matematiksel modelin geliştirilmesi (Adım 3) ve değerlendirilmesi (Adım 4) için kullanılır.

Adım 3. Sorunun Matematiksel Modelinin Kurulması

Analist tarafından sorunu ideal bir şekilde temsil edecek bir matematiksel model geliştirilir. Bu derste modelleme için çeşitli yöntemler öğreneceğiz.

Adım 4. Modelin Doğrulanması

Üçüncü adımda kurulan modelin gerçeği iyi yansıtıp yansıtmadığı sınıanır. Şu anki durum için modelin ne kadar geçerli olduğu belirlenerek modelin gerçeğe ne kadar uyduğu test edilir.

Adım 5. Uygun bir Seçeneğin Seçilmesi

Eldeki model üzerinde bir çözüm yöntemi kullanılarak amaçları en iyi karşılayan bir seçenek (varsa) analist tarafından seçilir.

Bazen eldeki seçeneklerin kullanımı için sınırlandırmalar ve kısıtlamalar olabilir. Bu yüzden amacı karşılayan seçenek bulunamayabilir. Bazı durumlarda ise amaçları en iyi şekilde karşılayan birden fazla sayıda seçenek bulunabilir.

Adım 6. Sonuçların Karar Vericiye Sunumu

Bu adımda, analist modeli ve model çözümü sonucunda ortaya çıkan önerileri karar verici ya da vericilere sunar. Seçenek sayısı birden fazla ise karar verici(ler) gereksinimlerine göre birini seçerler.

Sonuçların sunumundan sonra, karar verici(ler) öneriyi onaylamayabilir. Bunun nedeni uğraşılan sorunun doğru tanımlanmaması ya da modelin kurulmasında karar vericinin yeterince sürece karışmaması olabilir. Bu durumda analist ilk üç adıma yeniden dönmelidir.

Adım 7. Önerinin Uygulanması ve İzlenmesi

Eğer karar verici sunulan öneriden memnun kalırsa, analistin son görevi karar vericinin öneriyi uygulamasına yardımcı olmaktır. Seçeneğin kullanılarak sorunun çözümüne nezaret etmeli ve özellikle çevre koşulları değiştikçe amaçları karşılamaya yönelik dinamik güncellemeler yaparak uygulamayı izlemelidir.

1.3 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASININ TARİHÇESİ

Yöneylem Araştırması göreceli olarak yeni bir bilim dalıdır. 1930'lu yılların sonunda YA ilk olarak Birleşik Krallık'ta kullanıldı.

1936 yılının başında İngiliz Hava Bakanlığı; doğu kıyısında, Felixstowe yakınlarında, Suffolk'da Bawdsey Araştırma İstasyonu'nu kurdu. Söz konusu yer hava kuvvetleri savaş öncesi radar çalışmalarının yapıldığı merkezdi. Yine 1936 yılında Kraliyet Hava Kuvvetleri (RAF) içinde Britanya hava savunması için özel bir birlik oluşturuldu. Radarın kullanılmaya başlaması beraberinde bazı sorunlar da getirdi: Uçakların rotası ve kontrolü gibi elde edilen bilginin doğru ve etkin bir şekilde kullanılması gibi. 1936 yılının sonunda, Kent'deki Biggin Hill'de kurulan bir grup elde edilen radar bilgisi ile diğer uçak ile ilgili yer bilgilerinin bütünleştirilmesini hedefleyen çalışmalar yaptı. Söz konusu çalışmalar YA'nın başlangıcı olarak kabul edilebilir.

1937 yılında Bawdsey Araştırma İstasyonu deneysel çalışmaları pratiğe çevirdi ve Radar İstasyonu olarak çalışmaya başladı. Radardan elde edilen bilgiler bütünleştirilerek genel hava savunma ve kontrol sistemi oluşturuldu. Temmuz 1938'de kıyı boyunca dört yeni radar istasyonu daha kuruldu. Bu durumda da farklı istasyonlardan elde edilen ve genelde birbirleri ile çelişen bilginin doğrulanması ve eşgüdümü sorunu ortaya çıktı.

Sorunun çözümü için ve yapılan işlerin etkinliğinin ölçülmesi amacıyla Bawdsey Araştırma İstasyonu'nda A.P. Rowe başkanlığında bir bilimsel grup oluşturuldu. Söz konusu askeri operasyonların araştırılması (Research into Military Operations) işlemine "Operational Research" denildi. Genişleyen çalışma grubu, 1939 yazında, Stanmore Araştırma İstasyonu'nu merkez olarak kullanmaya başladı.

Savaş sırasında Stanmore Araştırma Merkezi, Fransa'daki Alman güçlerine karşı istenen ek uçak kuvvetlerinin uygun olup olmadığını YA teknikleri kullanarak değerlendirdi ve uygun olmadığını gösteren grafiklerle o zamanki başbakan Winston Churchill'e bir sunum yaptı ve sonuçta bölgeye ek kuvvet gönderilmeyerek hava kuvvetlerinin gücünün azalması engellendi. 1941 yılında Yöneylem Araştırması Bölümü (Operational Research Section - ORS) kuruldu ve savaş bitimine kadar söz konusu grup çalışmalar yaptı.

1941 yılında kurulan Blackett önderliğindeki bu gruba yedi ayrı bilim dalından onbir bilim adamı katılmıştı: üç fizyolog, bir fizikçi, iki matematikçi, bir astrofizikçi, iki fizik matematikçisi, bir subay, bir mühendis. Savaştan sonra YA çalışmaları özellikle ABD'de askeriye dışındaki alanlarda da hızlandı

Türkiye'de ise ilk YA çalışmaları, 1 Haziran 1956'da, Alb. Fuat Uluğ'un çabaları ile Genel Kurmay'da oluşturulan yedek subaylardan oluşan Harekat Araştırması grubu ile başladı. Seferberlik ve hava savunma konularında yurtdışından alınan destek ile araştırmalar yapıldı. Ülkemizde ilk YA dersi de İTÜ Makine Fakültesinde 1960-61 ders yılında Prof. Dr. İlhami Karayağın tarafından verildi. 1966 yılında Harekat Araştırması ismi Yöneylem Araştırması olarak değiştirildi.

2. TEMEL YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI KAVRAMLARI

“Yöneylem araştırması, gerçek hayat sistemlerinin matematiksel modellerle temsil edilmesi ve en iyi (optimum) çözümü bulmak için kurulan modellere sayısal yöntemler (algoritmalar) uygulanmasıdır.”

Bir eniyileme (optimizasyon) modeli verilen kısıtları sağlayan karar değişkenlerinin tüm değerleri arasında amaç fonksiyonunu eniyileyen (enbüyükleyen veya enküçükleyen) değerleri bulmayı hedefler

Örnek 2.1.

Two Mines Şirketi özel bir cevher çıkardığı iki adet maden ocağına sahiptir. Ocaklarda üretilen cevher üç sınıfa ayrılır: yüksek, orta, düşük kaliteli. Şirket bir fabrikaya haftalık olarak 12 ton yüksek, 8 ton orta ve 24 ton düşük kaliteli cevher sağlamak üzere anlaşmıştır. Söz konusu iki maden ocağı (X ve Y) ayrıntıları aşağıda verilen farklı işletim özelliklerine sahiptir.

Maden	Maliyet (£'000 / gün)	Üretim (ton/gün)		
		Yüksek	Orta	Düşük
X	180	6	3	4
Y	160	1	1	6

Anlaşmayı gerçekleştirmek için hafta sonu üretim yapılmayan maden ocakları haftada kaç gün işletilmelidir?

Tahmin

Two Mines örneğini incelemek için çok basit bir şekilde yargımızı kullanarak madenlerin haftada kaç gün çalışacağına yönelik olarak fikir yürüterek tahmin yapabiliriz.

- haftada bir gün X madenini, bir gün Y madenini işletme

Bu çözüm önerisi iyi bir sonuç vermeyecek gibi gözükmemektedir. Sadece 7 ton yüksek kaliteli cevher üretilecek bu durumda da 12 tonluk müşteri gereksinimi karşılanamayacaktır. Böyle bir çözüme "olurlu (uygun) olmayan" (infeasible) çözüm denilir.

- haftada 4 gün X madenini, 3 gün Y madenini işletme

Bu durumda tüm müşteri gereksinimleri karşılanabilmektedir. Böyle bir çözüme de "olurlu" (feasible) çözüm denilir. Fakat söz konusu çözüm önerisi çok pahalıdır.

Anlaşmayı en küçük maliyetle sağlayacak çözümü isteriz. Tahmin ederek yeni çözümler bulsak bile bulduğumuz çözümün en küçük maliyetli olup olmadığını bilemeyiz. Yapısal bir yaklaşım ile en iyi çözümü bulabiliriz.

Yanıt

Yapmamız gereken Two Mines örneğini sözel olarak ifade edip, söz konusu ifadeyi matematiksel bir tanıma çevirmektir.

Bu tipte sorunları çözmeye uğraşırken öncelikle aşağıdaki kavramları belirlemeliyiz:

- Karar değişkenleri (decision variables)
- Amaç fonksiyonu (objective function)
- Kısıtlar (constraints)

Bu belirleme sürecine "formülasyon" ya da daha resmi bir şekilde sorunun matematiksel modelinin formülasyonu denilir.

Değişkenler

Bunlar verilmesi gereken kararları veya bilinmeyenleri temsil eder. İncelenen sorunda iki adet karar değişkeni (decision variable) vardır:

x = Bir haftada X maden ocağının işletileceği gün sayısı

y = Bir haftada Y maden ocağının işletileceği gün sayısı

Doğal olarak $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olacaktır

Kısıtlar

Kısıt, soruna özgü durumların getirdiği sınırlamalardır. Kısıt belirlemenin en iyi yolu önce sınırlayıcı durumları sözel olarak ifade edip daha sonra değişkenleri kullanıp matematiksel biçimde yazmaktır:

Cevher üretim kısıtı – üretilen cevher ile müşteri gereksiniminin dengelenmesi

Cevher çeşitleri

Yüksek $6x + 1y \geq 12$

Orta $3x + 1y \geq 8$

Düşük $4x + 6y \geq 24$

Kısıtlarda eşitlik yerine eşitsizlik kullanıldığına dikkat ediniz. Bu durumda gereksinim duyulandan daha fazla cevher üretebiliriz. Eşitsizlik kullanma "en iyileme" (optimization) sorunlarındaki kısıtlarda esneklik sağlar.

Haftalık gün kısıtı - Haftada belirli bir günden fazla çalışamaz. Örneğin haftada 5 gün çalışılırsa aşağıdaki kısıtlar yazılmalıdır.

$$x \leq 5$$

$$y \leq 5$$

Haftalık gün sayısı gibi kısıtlar genellikle saklı (implicit) kısıtlar olarak isimlendirilir çünkü bu kısıtlar değişkenlerin tanımlanmasında saklıdır.

Amaç

Şirketin amacı toplam maliyeti ($180x + 160y$) en az seviyede tutarak müşteri gereksinimlerini karşılamaktır.

Ele alınan sorunda tüm olası olurlu çözümlerden amaç fonksiyonu değerini enküçükleyen karar değişkeni değerlerini barındıran çözüm en iyi çözümdür.

Sorunun amacının kar enbüyüklemesi olması durumunda en iyi çözüm amaç fonksiyonu değerini en büyük yapan değer olacaktır.

Genel olarak, tüm olası olurlu çözümlerden amaç fonksiyonu değerini en iyi hale getiren karar değişkeni değerlerini barındıran çözüme "en iyi" (optimum) çözüm denilir.

Sonuç olarak tüm kavramları bir arada yazarak ***tam matematiksel modeli*** aşağıdaki gibi yazabiliriz:

enküçükle (minimize)

$$180x + 160y$$

öyle ki (subject to)

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

$$x \leq 5$$

$$y \leq 5$$

$$x, y \geq 0$$

Yukarıda verilen matematiksel model aşağıdaki biçimdedir:

- tüm değişkenler süreklidir (continuous)
- tek bir amaç vardır (enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize))

- amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir (örneğin 24, 0, 4x, 6y doğrusal terimlerdir fakat xy , x^2 doğrusal değildir).

Yukarıdaki üç koşulu sağlayan herhangi bir formülasyon bir "Doğrusal Program"dır (DP; linear program - LP).

Bir sorunu DP ile incelediğimizde yukarıdaki koşullara uymak için bazı varsayımlar yaparız. Ele aldığımız örnekte haftalık çalışma gün sayısının kesirli olabileceği (tam sayı olmak zorunda olmaması) gibi. Aslında bu tip sorunları çözmek için "Tam sayılı programlama (TP)" (*integer programming*- IP) teknikleri de kullanılabilir.

Matematiksel model (formülasyon) kurulduktan sonra algoritma adı verilen sayısal bir çözüm tekniği kullanılarak amaç fonksiyonunun "en iyi" (optimum) değerini verecek (enbüyükleme sorunlarında en büyük, enküçüklemede en küçük) ve tüm kısıtları sağlayacak şekilde karar değişkeni değerleri bulunur.

"YA, gerçek hayat sistemlerinin matematiksel modellerle temsil edilmesi ve en iyi çözümü bulmak için kurulan modellere sayısal yöntemler (algoritmalar) uygulanmasıdır."

3. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE MODELLEME

Doğrusal programlama veya daha genel olarak matematiksel programlama ile modelleme yapılırken üç ana tanım yapılmalıdır:

- 1) Karar değişkenleri: Model ile karar verilecek değerlerdir
- 2) Amaç fonksiyonu: Model ile enbüyüklenecek (maksimizasyon) veya en küçüklenecek (minimizasyon) fonksiyondur. Bu fonksiyon karar değişkenlerine bağlı olarak ifade edilir.
- 3) Kısıtlar: Karar verirken dikkate alınması gereken koşulların matematiksel ifadesidir. Karar değişkenlerine bağlı fonksiyonlar ile Eşitlik (=) veya eşitsizlik ($\geq$, $\leq$) şeklinde ifade edilebilir.

Two Mines örneği incelenirse, bir matematiksel modelin bir "Doğrusal Program" (DP; linear program - LP) olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiği görülür:

- Tüm karar değişkenleri sürekli (continuous)
- Tek bir amaç vardır (enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize))
- Amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir.

DP'ler önemlidir çünkü:

- çok sayıda sorun DP olarak formüle edilebilir
- "Simpleks algoritması" kullanılarak DP'ler çözülebilir ve en iyi çözüm bulunabilir.

DP'lerin temel uygulama alanlarına aşağıda çeşitli örnekler verilmiştir:

- Üretim planlama
- Rafineri yönetimi
- Karışım
- Dağıtım
- Finansal ve ekonomik planlama
- İşgücü planlaması
- Tarımsal planlama
- Gıda planlama

DP'ler için dört temel varsayım söz konusudur:

- Oransallık

- Her karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır (X madenini üç gün işletmenin maliyeti ($3 \times 180 = 540$) bir gün işletme maliyetinin (180) tam olarak üç katıdır.)
- Her karar değişkeninin kısıtların sol tarafına katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır. (X madeninin iki gün çalıştırılması ile elde edilecek yüksek kaliteli cevher miktarı ($2 \times 6 = 12$ ton) tam olarak bir gün çalıştırma ile elde edilecek miktarın (6 ton) iki katıdır.)
- Toplanabilirlik
 - Herhangi bir karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır (X madeni kaç gün işletilirse işletilsin (x), Y madenin birim işletme maliyeti her zaman 160 birimdir.)
 - Herhangi bir karar değişkeninin kısıt sol tarafına katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır (x 'in değeri ne olursa olsun, Y madeninin bir gün işletilmesi ile bir ton yüksek, bir ton orta ve 6 ton düşük kaliteli cevher üretilir.

Sonuç 1: Amaç fonksiyonu değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.

Sonuç 2: Her bir kısıtın sol taraf değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.
- Bölünebilirlik
 - Karar değişkenleri tam sayı olmayan değerler alabilir. Eğer tam sayı değerler kullanmak şartsa TP kullanılmalıdır (X madeninin 2,17 gün çalıştırılması kabul edilebilir.)
- Kesinlik
 - Her parametre kesin olarak bilinmektedir. (X ve Y madenlerinin bir gün işletme maliyetleri ile üretilen farklı kaliteli üretim miktarları baştan bilinmektedir.)

3.1 DP ÖRNEKLERİ

Bir problemin çözümünde DP kullanılacaksa öncelikle model formülasyonu yapılmalıdır. Literatürde ve endüstride DP'nin bir çok uygulaması vardır. Model formülasyonunu farklı uygulamalarda nasıl yapabileceği konusunda uzmanlaşmak için farklı örneklerin incelenmesi en iyi yoldur. Bu bölümde farklı DP örnekleri verilmiştir.

Örnek 3.1. Giapetto*(Winston 3.1., s. 49)*

Giapetto tahtadan oyuncak asker ve tren yapmaktadır. Satış fiyatları, bir oyuncak asker için \$27, bir oyuncak tren için \$21'dir. Bir asker için \$10'lık hammadde ve \$14'lık işçilik kullanılmaktadır. Bir tren için ise söz konusu rakamlar sırasıyla \$9 ve \$10'dır. Her bir asker için 2 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekirken, her bir tren için 1 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekmektedir. Eldeki hammadde miktarı sınırsızdır, fakat haftada en çok 100 saat cilalama ve 80 saat marangozluk kullanabilmektedir. Haftada en fazla 40 oyuncak asker satabilmektedir. Giapetto'nun karını enbüyüklemek için hangi oyuncaktan haftada kaç adet üretmesi gerektiğini bulmak üzere bir DP modeli yazınız.

Yanıt

Karar değişkenleri tam olarak verilmesi gereken (bu sorunda Giapetto tarafından) kararları tanımlamalıdır. Giapetto bir haftada kaç oyuncak asker ve tren yapacağına karar vermelidir. Bu karara göre aşağıdaki karar değişkenleri tanımlanabilir:

x_1 = bir haftada üretilen asker sayısı

x_2 = bir haftada üretilen tren sayısı

Amaç fonksiyonu karar değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Gelir veya karını enbüyüklemek ya da maliyetini enküçükmek isteyen karar vericinin amacını yansıtır. Giapetto haftalık karını (z) enbüyüklemek isteyecektir.

Bu sorunda kar

(haftalık gelir) – (hammadde satınalma maliyeti) – (diğer değişken maliyetler) olarak formüle edilebilir. Bu durumda Giapetto'nun amaç fonksiyonu:

$$\text{Enbüyük} z = 3x_1 + 2x_2$$

Kısıtlar karar değişkenlerinin alabileceği değerler üzerindeki, sınırlamaları gösterir. Herhangi bir sınırlama olmazsa Giapetto çok fazla sayıda oyuncak üreterek çok büyük kar elde edebilir. Fakat gerçek hayatta olduğu gibi burada da kısıtlar vardır

Haftalık kullanılabilen cilalama zamanı

Haftalık kullanılabilen marangozluk zamanı

Askerler için haftalık talep

İşaret sınırlamaları da eğer karar değişkenleri salt negatif olmayan değerler alıyorsa kullanılmalıdır (Giapetto negatif sayıda asker veya tren üretemez!).

Yukarıdaki tüm bu özellikler aşağıdaki **Doğrusal Programlama** (DP; Linear Programming - LP) modelini verir:

$$\begin{aligned}
 \text{Maks } z &= 3x_1 + 2x_2 && (\text{Amaç fonksiyonu}) \\
 \text{s.t. } 2x_1 + x_2 &\leq 100 && (\text{Cilalama kısıtı}) \\
 x_1 + x_2 &\leq 80 && (\text{Marangozluk kısıtı}) \\
 x_1 &\leq 40 && (\text{Talep kısıtı}) \\
 x_1, x_2 &\geq 0 && (\text{İşaret sınırlamaları})
 \end{aligned}$$

Eğer (x_1, x_2) 'nin bir değeri (bir çözüm) tüm bu kısıtları ve işaret sınırlamalarını sağlarsa, söz konusu çözüm **olurlu bölgededir** (feasible region).

Grafik olarak ya da hesaplayarak sorun çözüldüğünde olurlu bölgedeki çözümlerden amaç fonksiyon değeri en yüksek olan çözümün $(x_1, x_2) = (20, 60)$ olduğunu ve $z=180$ değerini verdiğini buluruz. Bu çözüm **en iyi çözümdür** (optimal solution).

Rapor

Haftada 20 asker ve 60 tren üretilmesi durumunda kar \$180 olacaktır. Eldeki işçilik ve talebe göre elde edilebilecek en büyük kar budur. Daha fazla işçilik bulunursa kar çoğalabilir.

Örnek 3.2. Reklam Örneği

(Winston 3.2, s. 61)

Dorian şirketi, yüksek gelirli müşterileri için otomobil ve jeep üretmektedir. Televizyondaki tiyatro oyunlarına ve futbol maçlarına bir dakikalık spot reklamlar vererek satışlarını arttırmayı hedeflemektedir. Tiyatro oyununa verilen reklamın maliyeti 50 bin \$'dır ve hedef kitledeki 7 milyon kadın ve 2 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Futbol maçına verilen reklamın maliyeti ise 100 bin \$'dır ve hedef kitledeki 2 milyon kadın ve 12 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Dorian yüksek gelirli 28 milyon kadın ve 24 milyon erkeğe en az maliyetle nasıl ulaşacağını bulmak üzere bir DP modeli yazınız.

Yanıt

Karar değişkenleri aşağıdaki gibi belirlenebilir:

x_1 = tiyatro oyununa verilen reklam sayısı

x_2 = futbol maçına verilen reklam sayısı

Sorunun modeli:

$$\begin{aligned}
\min z &= 50x_1 + 100x_2 \\
\text{öyle ki } 7x_1 + 2x_2 &\geq 28 \\
2x_1 + 12x_2 &\geq 24 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Rapor

Model grafik yöntem veya yazılım ile çözülürse; en iyi çözüm $(x_1, x_2) = (3.6, 1.4)$, $z = 320$ olarak bulunur. Buna göre Dorian'a tiyatro oyununa 3.6 adet, futbol maçına 1.4 adet reklam verilmesi önerilir. Toplam maliyet 320 bin \$ olacaktır.

DP'nin bölünebilirlik varsayımı gereği çözüm ondalıklı olarak çıkabilir. Eğer bu çözüm uygulanamıyorsa, çözüm TP ile yapılmalıdır.

Dikkat! Tam sayılı programlama çözümü DP çözümünde ondalıklı çıkan değişkenleri en yakın tam sayıya yuvarlayarak BULUNMAZ!

Örnek 3.3. Beslenme Örneği

(Winston 3.4., s. 70)

Bayan Fidan dört gıda grubu ile beslenmektedir: kek, çikolatalı dondurma, kola, ananaslı pasta. Bir adet kek 0,5 \$'a, bir kaşık dondurma 0,2 \$'a, bir şişe kola 0.3 \$'a ve bir dilim pasta 0.8 \$'a satılmaktadır. Bayan Fidan her gün en az 500 kalori, 6 ons çikolata, 10 ons şeker ve 8 ons yağ alması gerekmektedir. Besinlerin birer birimlerinde yer alan kalori, çikolata, şeker ve yağ miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bayan Fidan'ın gereksinimlerini en az maliyetle karşılayabilmesine yardımcı olacak bir DP modeli kurunuz.

	Kalori	Çikolata (ons)	Şeker (ons)	Yağ (ons)
Kek (1 adet)	400	3	2	2
Çikolatalı dondurma (1 kaşık)	200	2	2	4
Kola (1 şişe)	150	0	4	1
Ananaslı pasta (1 dilim)	500	0	4	5

Yanıt

Karar değişkenleri:

- x_1 : günlük yenilecek kek sayısı
- x_2 : günlük yenilecek kaşık dondurma sayısı
- x_3 : günlük içilecek şişe kola sayısı
- x_4 : günlük yenilecek dilim pasta sayısı

Bu durumda amaç fonksiyonu (cent cinsinden toplam günlük maliyet):

$$\min Z = 50 x_1 + 20 x_2 + 30 x_3 + 80 x_4$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned}
 400 x_1 + 200 x_2 + 150 x_3 + 500 x_4 &\geq 500 && \text{(günlük kalori)} \\
 3 x_1 + 2 x_2 &\geq 6 && \text{(günlük çikolata)} \\
 2 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 + 4 x_4 &\geq 10 && \text{(günlük şeker)} \\
 2 x_1 + 4 x_2 + x_3 + 5 x_4 &\geq 8 && \text{(günlük yağ)} \\
 x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4 && \text{(işaret sınırlamaları!)}
 \end{aligned}$$

Rapor

En iyi çözüm $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ ve $Z = 90$ olarak bulunur (çözüm yöntemleri sonraki bölümlerde anlatılacaktır). Buna göre; Bayan Fidan günde 3 kaşık dondurma ve 1 şişe kola ile tüm besin gereksinimlerini karşılayabilir ve 90 cent harcar.

Örnek 3.4. Postane Örneği

(Winston 3.5., s. 74)

Bir postanede haftanın her günü farklı sayıda elemana gereksinim duymaktadır. Aşağıdaki tabloda günlük gerekli en düşük eleman sayısı verilmiştir. Sendika kurallarına göre bir eleman 5 gün peş peşe çalışmakta diğer iki gün izin yapmaktadır. Günlük gereksinimleri karşılamak için çalıştırılması gereken en az toplam eleman sayısını bulmak üzere bir DP modeli yazınız.

	Pzt	Sal	Çar	Per	Cum	Cmt	Paz
Gerekli eleman	17	13	15	19	14	16	11

Yanıt

Karar değişkenleri:

x_t : t . gün çalışmaya başlayan eleman sayısı ($t=1,2,\dots,7$).

Örneğin x_1 , Pazartesi günü çalışmaya başlayan; Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe ve Cuma günleri çalışıp, Cumartesi ve Pazar günleri izin yapan eleman sayısı olacaktır.

Matematiksel olarak DP modeli aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$\begin{aligned}
 \min z = & \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 & x_1 \quad \quad \quad + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\
 & x_1 + x_2 \quad \quad \quad + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \quad \quad \quad + x_6 + x_7 \geq 15 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \quad \quad + x_7 \geq 19 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \quad \geq 14 \\
 & \quad \quad + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 \\
 & \quad \quad \quad + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \\
 & x_t \geq 0, \forall t
 \end{aligned}$$

Rapor

Modelin çözümü $(x_t) = (4/3, 10/3, 2, 22/3, 0, 10/3, 5)$, $z = 67/3$ şeklindedir. DP'nin bölünebilirlik varsayımından ötürü tam sayı olmayan bir çözüm çıkmıştır. Bu çözüm gerçek hayatta uygulanamayabilir. Bu yüzden bu problemin modellenmesinde ve çözümünde TP kullanmak daha uygun olacaktır.

Örnek 3.5. Sailco Örneği

(Winston 3.10., s. 99)

Sailco şirketi gelecek dört mevsimde kaç adet yelkenli üreteceğine karar verecektir. Talep sırasıyla 40, 60, 75 ve 25 yelkenlidir. Sailco tüm talepleri zamanında karşılamalıdır. Başlangıçta Sailco'nun stokunda 10 yelkenli vardır. Normal mesai ile bir mevsimde 40 yelkenli üretebilen şirket yelkenli başına \$400 işçilik maliyetine maruz kalmaktadır. Fazla mesai ile yapılan her ek yelkenli için ise işçilik maliyeti \$450'dir. Herhangi bir mevsimde yapılan yelkenli ya talebi karşılamak için kullanılıp satılır ya da stokta tutulur. Bir yelkenlinin bir mevsim stokta tutulması durumunda ise \$20 stok tutma maliyeti oluşmaktadır. Sailco'nun talepleri en düşük maliyetle karşılamak için üretim planlaması yapmasını sağlayacak bir DP geliştiriniz.

YanıtKarar değişkenleri:

$x_t = t$. mevsimde normal mesai ile üretilen yelkenli sayısı ($t = 1, 2, 3, 4$)

$y_t = t$. mevsimde fazla mesai ile üretilen yelkenli sayısı ($t = 1, 2, 3, 4$)

$i_t = t$. mevsimin sonunda stoktaki yelkenli sayısı ($t = 1, 2, 3, 4$)

Parametreler:

$d_t = t$. dönem için yelkenli talebi ($t = 1, 2, 3, 4$) $d_1=40, d_2=60, d_3=75, d_4=25, i_0=10$;

Amaç fonksiyonu:

Amaç toplam maliyeti en küçükmektir.

Toplam maliyet = Normal mesai üretim maliyeti + Fazla mesai üretim maliyeti +
stokta tutma maliyeti

$$\text{Min } Z = 400(x_1+x_2+x_3+x_4) + 450(y_1+y_2+y_3+y_4) + 20(i_1+i_2+i_3+i_4)$$

Kısıtlar:

Normal mesai üretim kapasitesi:

$$x_t \leq 40, \quad \forall t$$

Taleplerin karşılanması ve mevsimler arası akış:

$$i_t = i_{t-1} + x_t + y_t - d_t, \quad \forall t.$$

İşaret sınırlamaları: $x_t, y_t, i_t \geq 0, \forall t$

Rapor

Modelin iyi çözümü şu şekilde bulunur: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (40, 40, 40, 25)$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 10, 35, 0)$, $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (10, 0, 0, 0)$ ve $Z = 78450$.

Buna göre aşağıdaki üretim planı ile en düşük maliyet olan 78450 \$'a ulaşılabilir.

t→	1	2	3	4
Normal mesai (x_t)	40	40	40	25
Fazla mesai (y_t)	0	10	35	0
Stok (i_t)	10	10	0	0
Talep (d_t)	40	60	75	25

Örnek 3.6. Müşteri Hizmet Düzeyi Örneği

(Winston 3.12, s. 108)

Bir bilgisayar şirketinde müşteri hizmetleri için deneyimli uzmana olan talep (adam*saat/ay) aşağıdaki gibidir:

t	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs
d_t	6000	7000	8000	9500	11000

Ocak ayı başında şirkette 50 deneyimli uzman vardır. Her uzman ayda 160 saat çalışabilir. Yeni bir uzmanı yetiştirmek için deneyimli uzmanlar 50 saat ayırmaktadır ve söz konusu uzmanın eğitimi bir ayda tamamlanmaktadır. Her deneyimli uzmana ayda \$2000, her yeni uzmana ise ayda \$1000 ödenmektedir. Her ay deneyimli uzmanların %5'i işten ayrılmaktadır. Şirket hem hizmet talebini en düşük maliyetle karşılamak istemektedir. Sorunu çözmek için DP modeli kurunuz.

Yanıt

Karar değişkenleri:

$x_t = t$ ayında eğitilecek uzman sayısı ($t=1,2,3,4,5$)

$y_t = t$. ayın başında şirketteki deneyimli uzman sayısı ($t=1,2,3,4,5$)

Parametreler:

$d_t = t$. ayın hizmet talebi ($t=1,2,3,4,5$) – Değerleri tabloda verilmiştir.

Amaç fonksiyonu:

Amaç deneyimli ve yeni uzmanların toplam maliyetlerini enküçükmektir.

$$\min z = 2000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + 1000(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

Kısıtlar:

Adam/saat talepleri karşılanmalıdır: $160y_t - 50x_t \geq d_t \quad t = 1, \dots, 5$ için,

Başlangıçtaki deneyimli uzman sayısı: $y_1 = 50$

Aylara göre uzman sayısı hesaplama: $y_t = .95y_{t-1} + x_{t-1}$ $t = 2,3,4,5$ için.

İşaret sınırlamaları: $x_t, y_t \geq 0$ $t = 1, 2,3,4,5$ için.

Örnek 3.7. Petrol Karışımı Örneği

(Winston 3.8'den esinlenilmiştir)

Sunco oktan dereceleri ve sülfür oranları farklı üç tip ham petrolün (H1, H2, H3) karıştırılması ile üç tip benzin (B1, B2, B3) üretmektedir. Benzinlerin oktan dereceleri ve sülfür oranları belli standartları sağlamalıdır:

- B1 için ortalama oktan derecesi en az 10, sülfür oranı en fazla %2 olmalıdır,
- B2 için ortalama oktan derecesi en az 8, sülfür oranı en fazla %4 olmalıdır,
- B3 için ortalama oktan derecesi en az 6, sülfür oranı en fazla %3 olmalıdır.

Firmanın her benzin tipi için en fazla satabileceği talepler sırasıyla 3000, 2000 ve 1000 varildir. Bununla birlikte firma reklam yaparak talebini arttırabilmektedir. Herhangi bir benzinde 1 dolarlık reklam, talebi 10 varil arttırmaktadır. Hammaddelerin oktan dereceleri, sülfür oranları ve alış fiyatları ile benzinlerin satış fiyatları aşağıda verilen tablolardaki gibi ise Sunco'nun kârını enbüyükleyecek DP'yi kurunuz.

Ham petrol	Oktan	Sülfür (%)	Alış fiyatı (\$/varil)	Benzin	Satış fiyatı (\$/varil)
1	12	1	45	1	70
2	6	3	35	2	60
3	8	5	25	3	50

Yanıt

Karar değişkenleri

x_{ij} : i . hammadeden j . benzine konulan miktar (varil), $i = 1,2,3; j=1,2,3$.

r_j : j . benzin için yapılan reklam (\$), $j=1,2,3$.

Amaç fonksiyonu (karı enbüyüklemek)

Kar = gelir – maliyet

$$\text{Maks } Z = (70 \sum_i x_{i1} + 60 \sum_i x_{i2} + 50 \sum_i x_{i3}) - (45 \sum_j x_{1j} + 35 \sum_j x_{2j} + 25 \sum_j x_{3j}) - \sum_j r_j$$

Kısıtlar

Oktan derecesi

$$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10 (x_{11} + x_{21} + x_{31}) \quad \text{benzin 1 oktan derecesi}$$

$$12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32} \geq 8(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \quad \text{benzin 2 oktan derecesi}$$

$$12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33} \geq 6 (x_{13} + x_{23} + x_{33}) \quad \text{benzin 3 oktan derecesi}$$

Sülfür oranları

$$(.01x_{11} + .03x_{21} + .05x_{31})/(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq .02 \rightarrow$$

$$x_{11} + 3x_{21} + 5x_{31} \leq 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \quad \text{benzin 1 sülfür oranı}$$

$$x_{12} + 3x_{22} + 5x_{32} \leq 4(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \quad \text{benzin 2 sülfür oranı}$$

$$x_{13} + 3x_{23} + 5x_{33} \leq 2(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \quad \text{benzin 3 sülfür oranı}$$

Talepler

$$\sum_i x_{ij} \leq T_j + 10r_j \quad \forall j. \quad (T_j: j. benzinin reklamsız talebi)$$

İşaret sınırlamaları

$$x_{ij}, r_j \geq 0, \forall i, j.$$

3.2 DOĞRUSAL OLMAYAN İFADELERİN DP İLE MODELLENMESİ

DP'de amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları doğrusal olmalıdır (oransallık ve toplanabilirlik varsayımları). Bazı problemde doğrusal olmayan amaç fonksiyonları veya kısıtlar söz konusu olabilir. Örneğin bir karar değişkeninin değeri mutlak değerle ifade edilebilir veya bir maliyet parçalı fonksiyonlarla gösterilebilir. Bu durumların bir kısmında problemi DP ile modelleyebilmek mümkündür. Bu bölümde mutlak değerli ifadelerin, parçalı fonksiyonların ve doğrusal olmayan konveks maliyet fonksiyonlarının DP ile nasıl modellenebileceği verilmiştir.

3.2.1 Mutlak Değerli İfadelerin DP'ye Eklenmesi

Bir modelde bir fonksiyonun mutlak değeri kullanılıyorsa, bu doğrusal olmayan bir yapı oluşturur. Bir $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun mutlak değerini $|f(x_1, x_2, \dots, x_n)|$, DP'ye ekleyebilmek için bir yapay değişken (λ) tanımlayarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$$\lambda \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\lambda \geq -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Modelde amaç fonksiyonu ve/veya kısıtlarda $|f(x_1, x_2, \dots, x_n)|$ yerine λ yazılır. Bu şekilde bir modellemenin çalışabilmesi için modelin λ 'yı küçükleme eğiminde olması gerekir. Aksi takdirde yukarıdaki ifadeler ile λ üstten sınırlandırmadığı için istenen mutlak değer hesabı yapılamaz.

Benzer yaklaşım Min-Maks ve Maks-Min ifadelerinin DP'ye eklenmesinde de kullanılabilir. { Min (Maks $[f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]$) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$$\lambda \geq f_1(\mathbf{x}), \lambda \geq f_2(\mathbf{x}), \dots, \lambda \geq f_k(\mathbf{x})$$

{ Maks (Min $[f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]$) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$$\lambda \leq f_1(\mathbf{x}), \lambda \leq f_2(\mathbf{x}), \dots, \lambda \leq f_k(\mathbf{x})$$

Örnek 3.8. Makine Yeri Belirleme

(Bazaraa, 2010; s.30.)

Dört makine bulunan bir üretim alanına yeni bir makinenin koyulacağı yer belirlenmek istenmektedir. Mevcut makinelerin koordinatları şöyledir. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Yeni makinenin koordinatları: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ olacaktır. Yeni makine ile diğer makineler arasındaki mesafeyi en küçükleyecek koordinatı bulmak için bir DP kurunuz. Makineler arası mesafeyi Manhattan uzaklığı ile belirlenecektir. Örnek: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ile $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ arasındaki mesafe: $|x_1 - 3| + |x_2 - 1|$.

Yanıt

Karar değişkenleri

x_1 ve x_2 , yeni makinenin koordinatları

λ_{ij} : yeni makine ile i . mevcut makine arasındaki j . koordinata göre mesafesi, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$.

Amaç fonksiyonu

$$\text{Min } \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}$$

Kısıtlar (Uzaklık hesaplama)

$$\lambda_{ij} \geq k_{ij} - x_j, \quad \lambda_{ij} \geq -k_{ij} + x_j \quad \forall i, j. \quad k_{ij}: i. \text{ makinenin } j. \text{ koordinatı}$$

Örneğin; $i=1$ ve $j=1, 2$ için;

$$\lambda_{11} \geq 3 - x_1 \quad \lambda_{11} \geq -3 + x_1$$

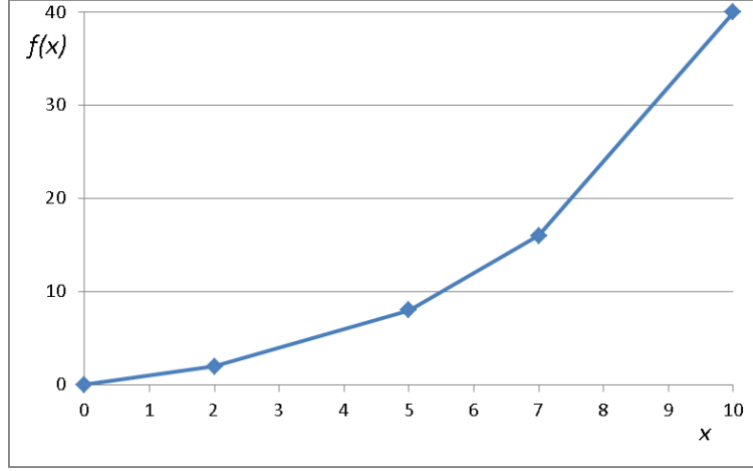
$$\lambda_{12} \geq 1 - x_2 \quad \lambda_{12} \geq -1 + x_2$$

İşaret sınırlamaları

$$x_1, x_2 \text{ serbest; } \lambda_{ij} \geq 0, \forall i, j.$$

3.2.2 Parçalı doğrusal Konveks fonksiyonların DP'ye eklenmesi

Bir parçalı doğrusal fonksiyon birden çok doğru parçasından oluşur. Örneğin aşağıdaki şekilde fonksiyon dört doğru parçasının birleşiminden oluşmaktadır.



Şekilde ifade edilen fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ 2 + 2(x - 2) & 2 \leq x < 5 \\ 8 + 4(x - 5) & 5 \leq x < 7 \\ 16 + 8(x - 7) & 7 \leq x < 10 \end{cases}$$

Fonksiyonun eğiminin değiştiği noktalara kesme noktası denir. Şekilde 0, 2, 5, 7 ve 10 kesme noktalarıdır. Eğer x değeri arttıkça parçalı fonksiyonların eğimi artıyorsa bu fonksiyon bir parçalı doğrusal konveks fonksiyondur. Bir matematiksel modelin enküçüklenecek amaç fonksiyonu parçalı doğrusal konveks fonksiyon ise bu amacı DP'ye ilave etmek için aşağıdaki iki yöntem kullanılabilir:

$f(x)$ bir parçalı doğrusal konveks fonksiyon; $d_1, d_2, \dots, d_n$ kesme noktaları olsun.

Yöntem 1.

Modelde $f(x)$ yerine $\sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i$,

x yerine $\sum_{i=1}^{n-1} y_i$ yazılır,

kısıtlara $y_i \leq d_{i+1} - d_i, i = 1, \dots, n - 1$ ilave edilir.

Burada $y_i, i = 1, \dots, n - 1$ karar değişkenleri,

$c_i, i = 1, \dots, n - 1$ ise i 'nci parçalı fonksiyonun eğimidir.

Örnekte verilen fonksiyon için DP formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4$$

$$x = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$y_1 \leq 2$$

$$y_2 \leq 3$$

$$y_3 \leq 2$$

$$y_4 \leq 3$$

Yöntem 2.

Modelde $f(x)$ yerine $\sum_{i=1}^n z_i f(d_i)$,
 x yerine $\sum_{i=1}^n z_i d_i$ yazılır,
 kısıtlara $\sum_{i=1}^n z_i = 1$ ilave edilir.

Burada $z_i, i = 1, \dots, n$ karar değişkenleri,
 $f(d_i)$ ise i 'nci kesme noktasının fonksiyon değeridir.

Örnekte verilen fonksiyon için DP formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = 0z_1 + 2z_2 + 8z_3 + 16z_4 + 40z_5$$

$$x = 0z_1 + 2z_2 + 5z_3 + 7z_4 + 10z_5$$

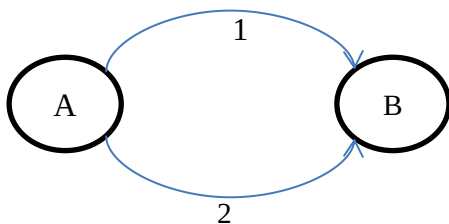
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 1$$

3.2.3 Doğrusal Olmayan Konveks Fonksiyonların Dönüşümü

Doğrusal olmayan konveks amaç fonksiyonları parçalı doğrusal konveks fonksiyona dönüştürülerek DP ile yaklaşık olarak modellenenebilir. Bunun için öncelikle doğrusal olmayan fonksiyon $n-1$ parçaya bölünür ve parçalar arası doğrusal kabul edilerek parçalı fonksiyona dönüştürülür. Elde edilen parçalı fonksiyon yukarda verilen yöntemlerden biri ile DP olarak modellenir.

Örnek 3.9. Petrol Taşıma

A noktasında bulunan 10.000 varil petrol 1 ve 2 boru hatlarından B noktasına taşınacaktır. Taşıma süresi taşınan petrol miktarına bağlıdır. Birinci borudan taşınan petrol miktarı x_1 bin varil, İkinci borudan taşınan petrol miktarı x_2 bin varil iken birinci borudan taşıma süresi x_1^2 saat; ikinci borudan taşıma süresi ise $x_2^{1,5}$ saat olarak hesaplanabilir. İki borudan aynı anda petrol gönderilmesi durumunda taşıma süresini en küçükleyecek DP modelini kurunuz.



Yanıt

Örnekte tanımlanan değişkenler kullanılarak problem doğrusal olmayan programlama olarak aşağıda şekilde modellenebilir:

$$\text{Min } Z = \text{Maks } (x_1^2, x_2^{1,5})$$

Öyle ki;

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bu modelde amaç fonksiyonundaki Min-Maks ifadesi ve karar değişkenlerin üstlerinin alınması DP varsayımlarını ihlal etmektedir.

Modeli doğrusallaştırmak için öncelikle taşıma süresi fonksiyonları parçalı fonksiyona dönüştürülür, x_1 ve x_2 , 0 ile 10 arasında değer alacakları için 0-10 aralığı 4 eşit parçaya bölünerek fonksiyonlar parçalanabilir. Aşağıdaki tabloda x 'lere karşılık gelen fonksiyon değerleri verilmiştir.

x	$f(x_1)=x_1^2$	$f(x_2)=x_2^{1,5}$
0,0	0,000	0,000
2,5	6,250	3,953
5,0	25,000	11,180
7,5	56,250	20,540
10,0	100,000	31,623

Bu durumda sorunun DP formülasyonu:

Karar değişkenleri

x_i : i . borudan taşınan petrol miktarı (*1000 varil),

f_i : i . boruda taşıma süresi (saat),

λ : en uzun taşıma süresi (saat)

z_{ij} : parçalı fonksiyonlar için yardımcı değişkenler, $i=1,2, j=1,\dots,5$.

Amaç fonksiyonu

Min λ

Kısıtlar

En uzun taşıma süresi borulardan taşıma sürelerinden daha az olmamalı (min-maks)

$$\lambda \geq f_1$$

$$\lambda \geq f_2$$

Birinci boru için parçalı fonksiyonun ifade edilmesi (Yöntem 2)

$$x_1 = 0z_{11} + 2,5 z_{12} + 5 z_{13} + 7,5 z_{14} + 10 z_{15}$$

$$f_1 = 0z_{11} + 6,25 z_{12} + 25 z_{13} + 56,25 z_{14} + 100 z_{15}$$

$$z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} = 1$$

İkinci boru için parçalı fonksiyonun ifade edilmesi

$$x_2 = 0z_{21} + 2,5 z_{22} + 5 z_{23} + 7,5 z_{24} + 10 z_{25}$$

$$f_2 = 0z_{21} + 3,953 z_{22} + 11,18 z_{23} + 20,54 z_{24} + 31,623 z_{25}$$

$$z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{25} = 1$$

Toplam taşınacak miktar 10.000 varil olmalı

$$x_1 + x_2 = 10$$

İşaret sınırlamaları

tüm değişkenler ≥ 0 .

Rapor

Verilen DP çözüldüğünde $\lambda = f_1 = f_2 = 15,781$; $x_1 = 3,771$; $x_2 = 6,229$; olarak bulunmuştur. Çözümde elde edilen x_1 ve x_2 değerlerine göre f_1 ve f_2 'nin gerçek değerleri (doğrusal olmayan x_1^2 ve $x_2^{1,5}$ fonksiyonlarına göre) 14,220 ve 15,546'dir. Aynı problemin doğrusal olmayan programlama ile çözümü $f_1 = f_2 = 15,112$; $x_1 = 3,887$; $x_2 = 6,113$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi doğrusal olmayan fonksiyonların parçalı fonksiyona dönüştürülmesi ile elde edilen DP sonucu ile doğrusal olmayan programlama çözümü birbirine çok yakındır. DP'nin çözümü doğrusal olmayan programlamaya göre daha kolay olduğu için bu şekilde bir modelleme daha etkin olabilir. Probleme DP ile daha kesin bir çözüm bulabilmek için doğrusal olmayan fonksiyonlar başta daha fazla parçaya bölünebilir.

4. DP'NİN ÇÖZÜMÜ

DP modellerini çözmek için kullanılabilecek yöntemler şunlardır:

- Grafik Çözüm
- Simpleks Algoritması
 - a. Büyük M Yöntemi
 - b. İki Aşamalı Simpleks
 - c. Düzeltilmiş Simpleks
- İç Nokta Yöntemleri
- Yazılım kullanarak çözüm

Ders kapsamında iç nokta yöntemleri hariç listelenen yöntemler gösterilecektir.

Yazılım olarak OpenSolver ve GAMS programları incelenecektir. İç nokta yöntemleri END332E dersi kapsamındadır.

Bu bölümde Grafik Çözüm ile Simpleks Algoritması ve türevleri verilecektir.

Düzeltilmiş simpleks yöntemi ise 6. Bölümde anlatılacaktır.

Bir DP çözüldüğünde aşağıdaki dört durumdan biri ile karşılaşılır:

1. DP'nin **bir tek en iyi çözümü** vardır.
2. DP'nin **alternatif (çok sayıda) en iyi çözümleri** vardır. Birden fazla (aslında sonsuz sayıda) en iyi çözüm bulunur.
3. DP **olurlu değildir** (infeasible). Hiç olurlu çözümü yoktur (Olurlu bölgede nokta yoktur).
4. DP **sınırlı değildir** (unbounded). Olurlu bölgedeki noktalar sonsuz büyüklükte amaç fonksiyon değeri vermektedir.

Bu durumların nasıl tespit edileceği yöntemlere göre aşağıda ayrıntılarıyla verilmiştir.

4.1 GRAFİK ÇÖZÜM

İki değişkenli herhangi bir DP'nin çözümü grafiksel olarak bulunabilir.

Örnek 4.1. Giapetto

Örnek 3.1'de formüle edilen Giapetto DP'sini grafik yöntem kullanarak çözünüz.

$$\text{maks } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{öyle ki } 2x_1 + x_2 \leq 100 \quad (\text{Cilalama kısıtı})$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad (\text{Marangozluk kısıtı})$$

$$x_1 \leq 40 \quad (\text{Talep kısıtı})$$

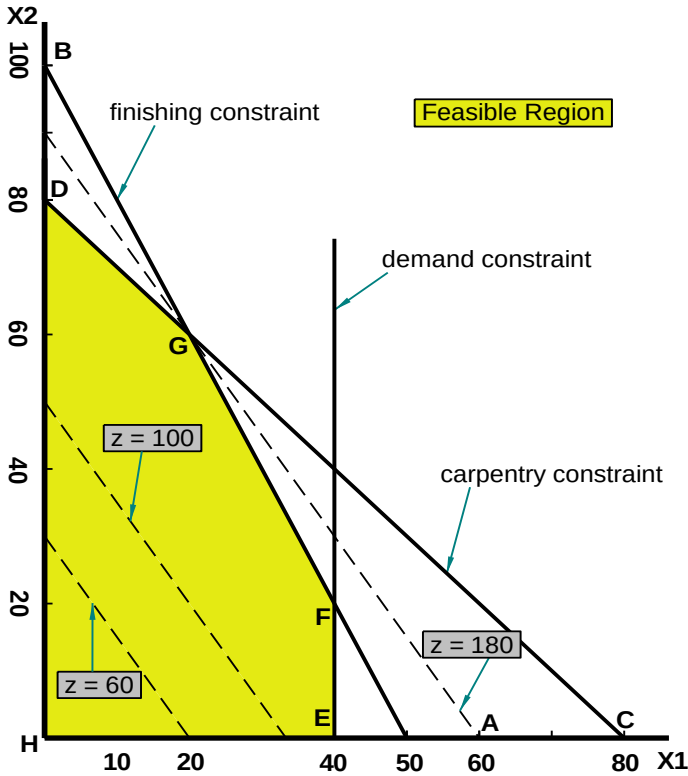
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{İşaret sınırlamaları})$$

Yanıt

Giapetto DP'nin sadece iki karar değişkeni olduğundan grafik çözüm kullanılabilir.

Olurlu bölge tüm kısıtları sağlayan tüm noktaların kümesidir.

Aşağıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir. DP'yi sağlayan noktalar kümesi DGFEH beşgeni ile sınırlandırılmıştır. Bu beşgen (boyalı bölge) **üzerindeki** veya **içindeki** herhangi bir nokta **olurlu bölgededir**.



DP için olurlu bölgeyi belirledikten sonra en iyi çözüm için araştırma yapılabilir. **En iyi çözüm**, olurlu bölgede *en fazla* z değerini veren noktadır (enbüyükleme sorunu).

En iyi çözümü bulmak için, z değerleri aynı olan bir doğru çizilir. Enbüyükleme sorunu için bu çizgi **eş kar** (isoprofit) doğrusu; enküçükleme sorunu içinse **eş maliyet** (isocost) doğrusu olarak isimlendirilir (*Şekilde $z = 60$, $z = 100$ ve $z = 180$ için eş kar doğruları görülmektedir*).

Bir tek en iyi çözüm varsa, eş kar doğrusu olurlu bölgeyi terk ederken bir köşe (vertex - corner) ile kesişir.

Bu DP için en iyi çözüm $z = 180$ için G noktası $(x_1, x_2) = (20, 60)$ şeklindedir.

Karar değişkenlerinin en iyi çözüm değerleri kullanıldığında bir kısıtın sol taraf değeri ile sağ taraf değeri eşitse o kısıt **aktif** (sıkı; binding, tight) bir kısıttır.

Karar değişkenlerinin en iyi çözüm değerleri kullanıldığında bir kısıtın sol taraf değeri ile sağ taraf değeri eşit değilse o kısıt **aktif olmayan** (nonbinding) bir kısıttır.

Giapetto DP'de cilalama işçiliği ve marangozluk kısıtları aktiftir. Öte yandan talep kısıtı aktif olmayan bir kısıttır çünkü en iyi çözümde $x_1 < 40$ ($x_1 = 20$).

Örnek 4.2. Reklam

Örnek 3.2'de formüle edilen Reklam örneğini grafik yöntem ile çözünüz.

$$\min z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{öyle ki } 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \quad (\text{yüksek gelirli kadın})$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24 \quad (\text{yüksek gelirli erkek})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

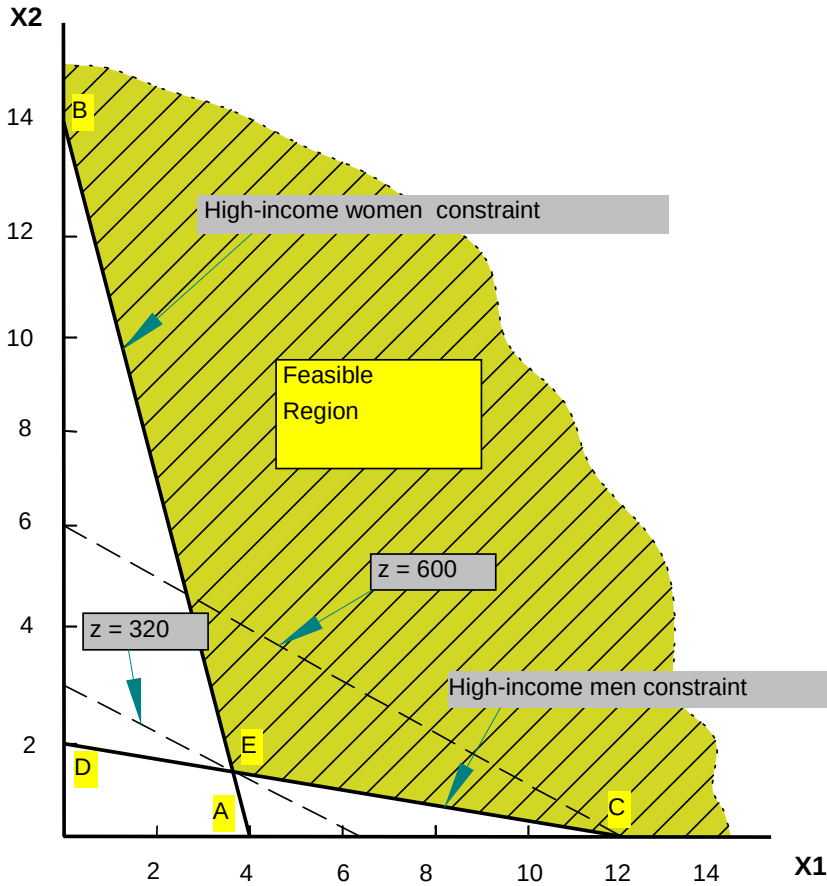
Yanıt

Şekilde (sonraki sayfada) kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir.

Dorian toplam reklam maliyetini enküçükmek istediği için sorunun en iyi çözümü olurlu bölgede *en az* z değerini veren noktadır.

En az z değerli eş maliyet doğrusu E noktasından geçmektedir; bu yüzden en iyi çözüm $x_1 = 3,6$, $x_2 = 1,4$ ve $z = 320$ şeklindedir.

Hem yüksek gelirli kadın hem de yüksek gelirli erkek kısıtları sağlandığı için her ikisi de aktif kısıtlardır.



Örnek 4.3. İki Maden

Örnek 2.1'de formüle edilen DP'yi grafik yöntem ile çözünüz.

$$\min \quad 180x + 160y$$

$$\text{öyle ki} \quad 6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

$$x \leq 5$$

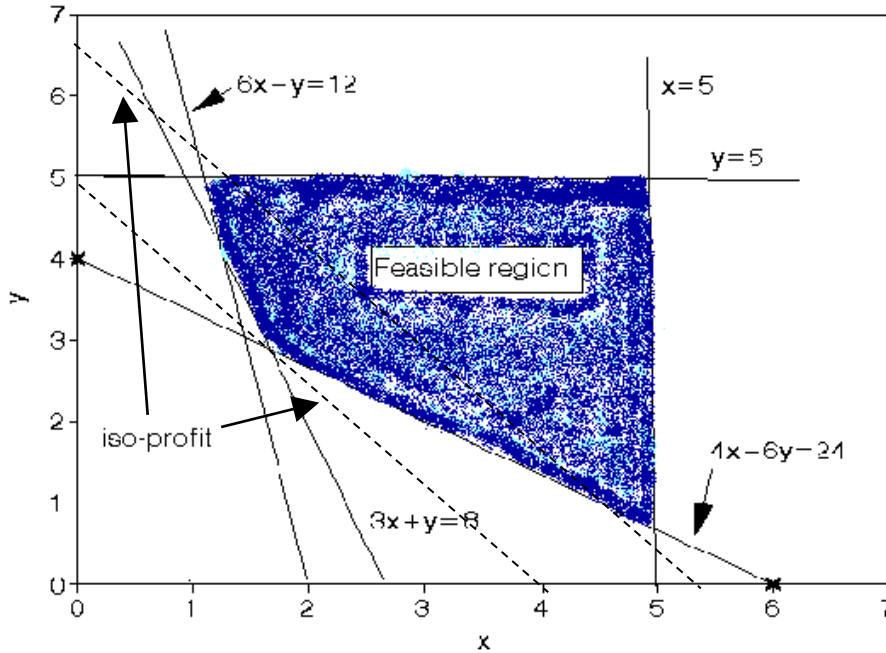
$$y \leq 5$$

$$x, y \geq 0$$

Yanıt

Modelle ilgili grafik sonraki sayfada verilmiştir.

En iyi çözüm için maliyet 765,71'dir. 1,71 gün X madeni ve 2,86 gün Y madeni çalıştırılmalıdır.



Örnek 4.4. Değiştirilmiş Giapetto

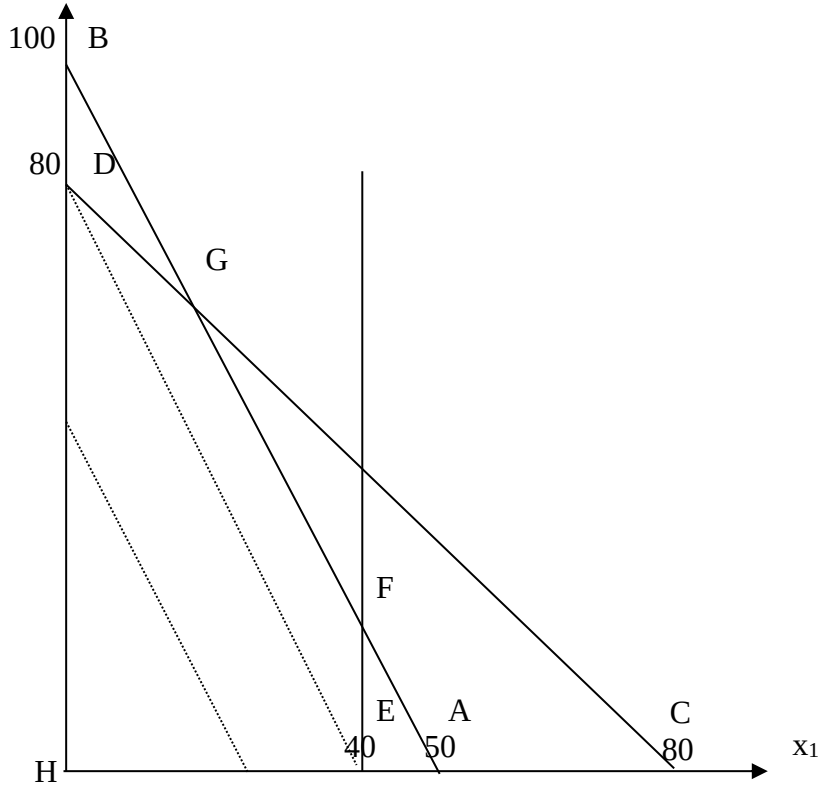
$$\text{maks } z = 4x_1 + 2x_2$$

$$\text{Öyle ki; } 2x_1 + x_2 \leq 100 \quad (\text{Cilalama kısıtı})$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad (\text{Marangozluk kısıtı})$$

$$x_1 \leq 40 \quad (\text{Talep kısıtı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{İşaret sınırlamaları})$$

Yanıt

G (20, 60) ve F (40, 20) noktaları arasındaki doğru üzerindeki noktalar **alternatif en iyi çözümleri** verir.

$0 \leq c \leq 1$ için

$$c [20 \ 60] + (1-c) [40 \ 20] = [40-20c, 20+40c]$$

en iyi çözümdür.

Tüm en iyi çözümler için en iyi amaç fonksiyon değeri 200'dür.

Örnek 4.5. Değiştirilmiş Giapetto (v. 2)

Giapetto örneğine tren talep kısıtı eklenerek aşağıdaki gibi oluşturulursa çözüm ne olur?

$$\text{maks } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{öyle ki } 2x_1 + x_2 \leq 100 \quad (\text{Cilalama kısıtı})$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad (\text{Marangozluk kısıtı})$$

$$x_1 \leq 40 \quad (\text{Talep kısıtı})$$

$$x_2 \geq 90 \quad (\text{Tren talep kısıtı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{İşaret sınırlamaları})$$

Yanıt

Olurlu bölge yoktur: **Olurlu olmayan DP**

Örnek 4.6. Sınırlı olmayan DP

Aşağıdaki DP'yi grafik yöntem ile çözünüz:

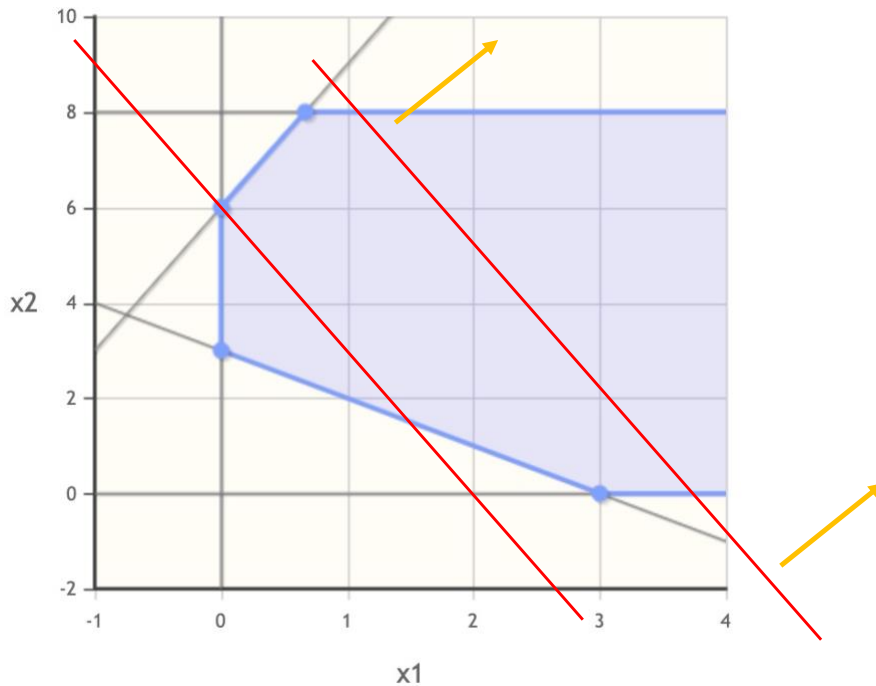
$$\text{maks } z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{öyle ki } x_1 + x_2 \geq 3$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Yanıt

Eş kar doğrusu olurlu bölgeyi terk edemez: **Sınırlı olmayan DP**

4.2 SİMPLEKS ALGORİTMASI

Tüm DP'lerin (ikiden fazla sayıda karar değişkeni olanların da) en iyi çözümü olurlu bölgenin bir köşesindedir. Simpleks algoritması bu gerçeği kullanarak çözüme gider. Başlangıçta olurlu bölgenin bir köşesi ile işleme başlanır ve eğer söz konusu köşe en iyi çözümü vermezse yeni bir adım (iterasyon) işletilerek amaç fonksiyonunu iyileştiren (veya aynı bırakan) başka bir komşu köşeye geçilir. Bu adımlar en iyi DP çözümü bulununcaya kadar sürer.

DP'leri çözmek için kullanılan simpleks algoritması Dantzig tarafından 1940'lı yılların sonunda geliştirilmiştir. Daha sonra algoritma geliştirilip yeni versiyonları geliştirilmiştir. Bunlardan biri olan "revised simpleks algoritması" DP çözümü için kullanılan bilgisayar paketlerinde kullanılmaktadır.

Adımlar

1. DP'yi standart biçime çeviriniz.
2. Bir temel olurlu çözüm (basic feasible solution - bfs) bulunuz.
3. Mevcut bfs'nin en iyi çözüm olup olmadığını araştırınız. En iyi ise sorun çözülmüştür, durunuz.
 - a. Maksimizasyon problemleri için tüm 0. Satır (R_0) değerleri 0 ya da 0'dan büyükse (negatif değer yoksa) en iyi çözüm bulunmuştur.
 - b. Minimizasyon problemleri için tüm 0. Satır (R_0) değerleri 0 ya da 0'dan küçükse (pozitif değer yoksa) en iyi çözüm bulunmuştur.
4. Mevcut bfs en iyi çözüm değilse, amaç fonksiyon değerini en çok iyileştirmek için hangi temel dışı değişkenin temel değişken olacağını (çözüme gireceğini) ve hangi temel değişkenin çözümden çıkıp temel dışı değişken olacağını saptayarak yeni bir bfs bulunuz.
 - a. Maksimizasyon problemleri için 0. Satır (R_0) değeri en küçük olan (negatif değerler arasında mutlak değerce en büyük olan) çözüme girer.
 - b. Minimizasyon problemleri için 0. Satır (R_0) değeri en büyük olan çözüme girer.
 - c. Çözümünden çıkacak değişkeni belirlemek için oran testi yapılır. Maksimizasyon ve Minimizasyon problemlerinde oran testi aynı şekilde yapılır.

5. Adım 3'e dönünüz.

İlgili kavramlar:

- Standart biçim: tüm kısıtlar eşitlikler ve sağ taraf değerleri negatif olmayan değerler alır.
- bfs: tüm değişkenlerin negatif olmayan değerler aldığı bir olurlu çözüm (temel olurlu çözüm).
- Temel dışı değişken: bfs'de değerleri 0'a eşit olan değişkenler.
- Temel değişken: bfs'deki diğer değişkenler, standart biçimdeki eşitliklerin çözülmesi ile 0'dan büyük değerler alırlar.

Oran testi:

Çözümünden çıkacak değişkeni bulmak için yapılan analiz. 0. Satır (R0) hariç her satır için sağ taraf değeri ile çözüme girecek değişken sütunundaki değer arasındaki oran bulunur. Çözüme girecek değişken sütunundaki değer 0 veya negatif ise oran bulunmaz. Bulunan oranlar arasında en küçük değere sahip satır belirlenir (pivot denklem veya pivot satır). Bu satırdaki temel değişken çözümden çıkar.

Dikkat!! Oran testi minimizasyon ve maksimizasyon problemlerinde aynı şekilde yapılır!

Örnek 4.7. Dakota Mobilya

(Winston 4.3, s. 134)

Dakota mobilya şirketi sıra, masa ve sandalye yapmaktadır. Her ürün için, aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi, sınırlı miktarda kullanılabilen tahta, marangozluk ve cilalama işçiliği gerekmektedir. Aynı tabloda ürünlerin satış fiyatları da verilmiştir. Haftada en fazla 5 masa satılabilmektedir. Haftalık karı enbüyükleyecek üretim planını oluşturmak için bir DP kurunuz ve çözünüz.

Kaynak	Sıra	Masa	Sandalye	Kullanılabilen.
Tahta (m ²)	8	6	1	48
Cilalama	4	2	1.5	20
Marangozluk	2	1.5	0.5	8
Talep (maks)	-	5	-	
Fiyat (\$)	60	30	20	

DP Modeli:

x_1, x_2, x_3 bir haftada üretilen sıra, masa ve sandalye sayısı olsun. z ise Dakota'nın haftalık kar miktarını gösterebilir. Aşağıdaki DP'yi formüle edebiliriz.

$$\text{maks } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\text{öyle ki } 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Simpleks algoritması ile çözüm

Öncelikle gevşek (slack) değişkenler kullanarak DP modelini standart biçime getiriniz ve modeli kanonik bir şekilde yazınız.

$$\begin{array}{llllllll} R_0 & z & -60x_1 & -30x_2 & -20x_3 & & & = 0 \\ R_1 & & 8x_1 & + 6x_2 & + x_3 & + s_1 & & = 48 \\ R_2 & & 4x_1 & + 2x_2 & + 1,5x_3 & & + s_2 & = 20 \\ R_3 & & 2x_1 & + 1,5x_2 & + 0,5x_3 & & + s_3 & = 8 \\ R_4 & & & & x_2 & & + s_4 & = 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Bir başlangıç temel olurlu çözümü bulunuz.

Sorun için $(x_1, x_2, x_3) = 0$ çözümü olurlu olduğundan, aşağıda verilen nokta bir başlangıç temel olurlu çözümdür (basic feasible solution – bfs):

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, s_1 = 48, s_2 = 20, s_3 = 8, s_4 = 5.$$

Bu bfs'de üç karar değişkeni **temel dışı değişken** (non-basic variables) ve dört gevşek değişken ise **temel değişkendir** (basic variables) ve değerleri kanonik modeldeki eşitliklerden bulunur.

Dikkat! İlk modeldeki kısıtları hepsi $\leq$ ve sağ taraf değerlerinin hepsi pozitif veya 0 ise eklenen gevşek değişkenlerin temel değişken olduğu temel çözüm başlangıç temel olurlu çözümdür.

Mevcut bfs'nin en iyi çözüm olup olmadığını kontrol ediniz

Temel dışı herhangi bir değişkenin değerinin çoğaltılması (temele girmesi) ile z 'nin değerinin iyileşmesinin mümkün olup olmadığı araştırılır.

Eğer tüm temel dışı değişkenlerin amaç fonksiyon satırındaki (**0. satır; row 0 – R_0**) katsayıları 0 ya da 0'dan büyükse (nonnegative), mevcut bfs en iyi (optimal) çözümdür (z 'nin değeri daha çok iyileştirilemez).

Fakat örnekte tüm temel dışı değişkenlerin 0. satırdaki katsayıları negatiftir: Çözüm en iyi değildir.

Yeni bfs'nin bulunması

- R_0 katsayısı en düşük olan değişken giren değişken olarak belirlenir. Enbüyüklenmek istenen Z en çok x_1 sıfırdan farklı yapıldığı zaman çoğalır: x_1 **giren değişkendir**.
- R_1 incelendiğinde x_1 'in en fazla 6 olabileceği görülür. Aksi takdirde $s_1 < 0$ olacaktır. Benzer şekilde R_2 ve R_3 sırasıyla 5 ve 4 sınırlarını verir. Son satırda x_1 olmadığından herhangi bir sınırlama söz konusu değildir. Bu durumda tüm sınırlamaların (aslında sağ taraf değerlerinin giren değişken katsayılarına "oran"larının – **oran testi**) en küçüğü olan 4, x_1 'in alabileceği en büyük değerdir. $x_1 = 4$ olduğunda $s_3 = 0$ olup çözümden çıkar ve **çıkan değişken** olarak isimlendirilir.
- R_3 de **pivot denklem** olur. x_1 temel değişken olduğu için birim matrise girecek şekilde sistem yeniden düzenlenir. Bunun için elementer satır işlemleri (*Elementary row operations* - ERO) uygulanır. ERO, bir satırın k skaleri çarpılması veya bir satırın k skaleri ile çarpılıp başka bir satır ilave edilmesi şeklinde uygulanır.

Yeni *pivot denklem* (R_3') – yeni pivot denklemde giren değişkenin katsayısı 1 olmalıdır.

$$R_3' = R_3 / 2$$

$$R_3' : x_1 + .75x_2 + .25x_3 + .5s_3 = 4$$

R_3' kullanılarak x_1 tüm diğer satırlarda yok edilir (katsayısı 0 yapılır).

$$R_0' = R_0 + 60R_3', \quad R_1' = R_1 - 8R_3', \quad R_2' = R_2 - 4R_3', \quad R_4' = R_4$$

R_0'	Z	$+15x_2$	$-5x_3$	$+30s_3$	$= 240$	$Z = 240$
R_1'			$-x_3 + s_1$	$-4s_3$	$= 16$	$s_1 = 16$
R_2'		$-x_2$	$+ .5x_3$	$+ s_2 - 2s_3$	$= 4$	$s_2 = 4$
R_3'	x_1	$+ .75x_2$	$+ .25x_3$	$+ .5s_3$	$= 4$	$x_1 = 4$
R_4'		x_2		$+ s_4$	$= 5$	$s_4 = 5$

Yeni bfs $x_2=x_3=s_3=0$, $x_1=4$, $s_1=16$, $s_2=4$, $s_4=5$ şeklindedir ve $z=240$ olur.

Bu çözümde temel değişkenler şunlardır: s_1 , s_2 , x_1 , s_4 .

Mevcut bfs'in optimalliğini kontrol ediniz ve en iyi çözümü bulunana kadar adımları tekrar ediniz.

- R_0' kontrol edildiğinde x_3 'ün katsayısının negatif olduğu görülür. Buna göre verilen çözüm optimal değildir.
- Sadece x_3 'ün katsayısı negatif olduğu için çözüme girecek değişken de x_3 olarak seçilir.
- Çözümünden çıkacak değişkeni belirlemek için oran testi yapılır:

			Oran
R_0'	$-5x_3$	$= 240$	
R_1'	$-x_3$	$= 16$	--
R_2'	$+5x_3$	$= 4$	$4/0.5=8$
R_3'	$+0.25x_3$	$= 4$	$4/0.25=16$
R_4'	0	$= 5$	---

- En düşük oran R_2' satırındadır, bu satır pivot denklem olarak belirlenir ve bu satırdaki temel değişken s_2 çözümünden çıkar.
- Pivot denklemde (R_2') giren değişkenin katsayısı 1 yapılır:

$$R_2'' = -2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8 \quad (R_2' \times 2).$$

R_2'' satır işlemleri ile diğer satırlarda x_3 'ün katsayısı 0 yapılır.

$$R_0'' = R_0' + 5R_2'', \quad R_1'' = R_1' + R_2'', \quad R_3'' = R_3' - 0.5R_2'', \quad R_4'' = R_4'$$

R_0''	z	$+5x_2$		$+10s_2$	$+10s_3$	$= 280$	$z = 240$
R_1''		$-2x_2$	$+s_1$	$+2s_2$	$-8s_3$	$= 24$	$s_1 = 24$
R_2''		$-2x_2$	$+x_3$	$+2s_2$	$-4s_3$	$= 8$	$x_3 = 8$
R_3''	x_1	$+1.25x_2$		$-0.5s_2$	$+1.5s_3$	$= 2$	$x_1 = 2$
R_4''		x_2			$+s_4$	$= 5$	$s_4 = 5$

Yeni bfs: $x_2=s_2=s_3=0$, $x_1=2$, $x_3=8$, $s_1=24$, $s_4=5$; $z = 280$.

Bu çözümde temel değişkenler şunlardır: s_1 , x_3 , x_1 , s_4 .

Mevcut bfs'in optimalliğini kontrol ediniz ve en iyi çözümü bulunana kadar adımları tekrar ediniz.

Sıfırıncı satırdaki tüm temel dışı değişkenlerin katsayısı pozitifdir ($5x_2$, $10s_2$, $10s_3$).

MEVCUT ÇÖZÜM EN İYİ ÇÖZÜMDÜR (OPTIMAL SONUÇ)

Rapor: Dakota mobilya şirketi haftalık karını enbüyüklemek için 2 sıra ve 8 sandalye üretmelidir. Bu durumda 280\$ kar eder.

Simpleks algoritması tablolarla gösterimi**(Siz de tüm ödev ve sınavlarda her işlem için tablo kullanın!!!)**

Tablo gösteriminde tüm adımlar, işlemler aynı şekilde uygulanır. Sadece denklem olarak gösterilen katsayılar tablo üzerine yazılır. Tabloda her değişken için bir sütun, her kısıt ve amaç fonksiyonu için bir satır yer alır.

Örnek 4.8. Dakota Mobilya – Tablo gösterimi

$$\text{maks } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\text{öyle ki } 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Model standart biçime dönüştürülür:

$$\begin{array}{llllllllll} R_0 & z & -60x_1 & -30x_2 & -20x_3 & & & & & = 0 \\ R_1 & & 8x_1 & + 6x_2 & + x_3 & + S_1 & & & & = 48 \\ R_2 & & 4x_1 & + 2x_2 & + 1,5x_3 & & + S_2 & & & = 20 \\ R_3 & & 2x_1 & + 1,5x_2 & + 0,5x_3 & & & + S_3 & & = 8 \\ R_4 & & & & & x_2 & & & + S_4 & = 5 \\ & & x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \end{array}$$

Standart biçime göre aşağıdaki tablo oluşturulur (Başlangıç tablosu)

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	ST	TD	Oran
R0	1	-60	-30	-20	0	0	0	0	0	Z=0	
R1	0	8	6	1	1	0	0	0	48	$S_1 = 48$	6
R2	0	4	2	1,5	0	1	0	0	20	$S_2 = 20$	5
R3	0	2	1,5	0,5	0	0	1	0	8	$S_3 = 8$	4*
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	5	$S_4 = 5$	-

R0'da negatif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

x_1 en düşük R0 katsayısına sahip olduğu için çözüme girer.

Oran testine göre en düşük orana sahip olan satır R3'tür. R3 satırında temel değişken olan s_3 çözümünden çıkar.

x_1 'in sütununu $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ yapmak için ERO'lar uygulanır:

İlk tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
R0	1	0	15	-5	0	0	30	0	240	$Z=240$	
R1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	16	$s_1 = 16$	-
R2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	0	4	$s_2 = 4$	8*
R3	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	4	$x_1 = 4$	16
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	-

R0'da negatif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

x_3 en düşük R0 katsayısına sahip olduğu için çözüme girer.

Oran testine göre en düşük orana sahip olan satır R2'dir. R2 satırında temel değişken olan s_2 çözümden çıkar.

x_3 'ün sütununu $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yapmak için ERO'lar uygulanır:

İkinci ve en iyi tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD
R0	1	0	5	0	0	10	10	0	280	$Z=280$
R1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	$s_1 = 24$
R2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	$x_3 = 8$
R3	0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	2	$x_1 = 2$
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$

R0'da negatif değer olmadığı için çözüm optimaldir.

Çözümde karar değişkenlerinin değerleri şöyledir:

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$ ve $Z = 280$.

Örnek 4.9. Değiştirilmiş Dakota Mobilya

Dakota örneğinde masa satış fiyatını \$35/masa olarak değiştirelim.

Yeni amaç fonksiyonu şöyle olacaktır: $z = 60 x_1 + 35 x_2 + 20 x_3$

Başlangıç tablosu:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
R0	1	-60	-35	-20	0	0	0	0	0	Z=0	
R1	0	8	6	1	1	0	0	0	48	$s_1 = 48$	6
R2	0	4	2	1,5	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$	5
R3	0	2	1,5	0,5	0	0	1	0	8	$s_3 = 8$	4*
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	-

Optimal değildir; x_1 çözüme girer, s_3 çözümden çıkar.

İlk tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
R0	1	0	10	-5	0	0	30	0	240	Z=240	
R1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	16	$s_1 = 16$	-
R2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	0	4	$s_2 = 4$	8*
R3	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	4	$x_1 = 4$	16
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	-

Optimal değildir; x_3 çözüme girer, s_2 çözümden çıkar.

İkinci tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
R0	1	0	0	0	0	10	10	0	280	Z=280	
R1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	$s_1 = 24$	-
R2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	$x_3 = 8$	-
R3	0	1	1,25	0	0	-0.5	1,5	0	2	$x_1 = 2$	$2/1,25 = 1,6^*$
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	$5/1 = 5$

R0'da negatif değer olmadığı için bu çözüm optimaldir.

Diğer yandan, temel dışı değişken olan x_2 'nin R0 katsayısı 0'dır. Bu şu anlama gelir: x_2 'nin çözüme girmesi (temel değişken olması) Z'i iyileştirmez ama kötüleştirmez de!! x_2 'yi çözüme sokarak Z değeri aynı olan başka bir temel olurlu çözüm (köşe noktası) elde edilebilir.

x_2 çözüme girerse, oran testine göre x_1 çözümden çıkmalıdır. Gerekli ERO'lar uygulanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

ERO'lar: ($R3' = R3/1,25$; $R0' = R0$, $R1' = R1+2 R3'$, $R2' = R2+2 R3'$, $R4' = R4-R3'$)

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD
R0	1	0	0	0	0	10	10	0	280	$Z=280$
R1	0	1,6	0	0	1	1,2	-5,6	0	27,2	$s_1 = 27,6$
R2	0	1,6	0	1	0	1,2	-1,6	0	11,2	$x_3 = 11,2$
R3	0	0,8	1	0	0	-0,4	1,2	0	1,6	$x_2 = 1,6$
R4	0	-0,8	0	0	0	0,4	-1,2	1	3,4	$s_4 = 3,4$

Görüldüğü gibi bu temel olurlu çözümde de $Z = 280$ 'dir. Böylece, aynı optimal çözümü veren iki köşe noktası tespit edilmiştir. Bu iki köşe noktası ve bu noktaları birleştiren doğru üzerindeki tüm noktalar en iyi çözümdür. Tüm çözümler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$z = 280$ ve $0 \leq c \leq 1$ için;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + (1 - c) \begin{bmatrix} 0 \\ 1,6 \\ 11,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 1,6 - 1,6c \\ 11,2 - 3,2c \end{bmatrix}$$

KURAL: Optimal çözüm tablosunda bir temel dışı değişkenin R0 katsayısı 0 ise **Alternatif Çözüm** vardır. Bu değişkeni temel değişken yaparak alternatif bir köşe noktası ve iki köşe noktasını kullanarak alternatif çözüm noktaları bulunabilir.

Örnek 4.10. Sınırlı Olmayan DP'ler

Aşağıdaki DP'yi Simpleks Yöntem kullanarak çözünüz:

$$\text{maks } z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4$$

$$\text{öyle ki } x_1 + x_2 + \quad - x_4 \leq 6$$

$$2x_1 \quad + x_3 - 3x_4 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Yanıt

Model standart biçime dönüştürülür:

$$\text{maks } Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4$$

$$\text{öyle ki } x_1 + x_2 + \quad - x_4 + s_1 = 6$$

$$2x_1 \quad + x_3 - 3x_4 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0$$

Amaç fonksiyonunda karar değişkenleri sol tarafa atılır:

$$Z - 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$$

Başlangıç tablosu oluşturulur:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	ST	TD	Oran
R0	1	-3	-2	-1	1	0	0	0	$Z = 0$	
R1	0	1	1	0	-1	1	0	6	$s_1 = 6$	$6/1=6$
R2	0	2	0	1	-3	0	1	4	$s_2 = 4$	$4/2=2^*$

R0'da negatif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en küçük olan x_1 çözüme girer.

Oran testine göre R2 satırı pivot satır olarak belirlenir. s_2 çözümünden çıkar.

x_1 'i R2 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R2' = R2/2, \quad R0' = R0 + 3R2', \quad R1' = R1 - R2'$$

İlk tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	ST	TD	Oran
R0	1	0	-2	0,5	-3,5	0	1,5	6	$Z = 6$	
R1	0	0	1	-0,5	0,5	1	-0,5	4	$s_1 = 4$	$4/0,5=8^*$
R2	0	1	0	0,5	-1,5	0	0,5	2	$x_1 = 2$	-

R0'da negatif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en küçük olan x_4 çözüme girer.

Oran testine göre R1 satırı pivot satır olarak belirlenir. s_1 çözümünden çıkar.

x_4 'ü R1 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R1' = R1/0,5, \quad R0' = R0 + 3,5R1', \quad R2' = R2 + 1,5R1'$$

İkinci tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	ST	TD	Oran
R0	1	0	5	-3	0	7	-2	34	$Z = 34$	
R1	0	0	2	-1	1	2	-1	8	$x_4 = 8$	-
R2	0	1	3	-1	0	3	-1	14	$x_1 = 14$	-

R0'da negatif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en küçük olan x_3 çözüme girer.

Fakat x_3 'ün sütunundaki tüm değerler negatiftir. Oran testi yapılabilecek herhangi bir satır mevcut değildir. Bu, x_3 'ün çözüme girdiğinde bu değişkeni sınırlandıracak herhangi bir kısıt olmadığını gösterir. Yani x_3 sonsuza kadar artırılabilir ve her artışı Z'yi de arttıracığından Z de sonsuza kadar artacaktır. Sonuç olarak Z'nin sınırlı olmadığı sonucuna varılır.

Çözülme istenen DP sınırlı değildir.

KURAL: Optimal olmayan bir Simpleks tablosunda çözüme girecek değişkenin sütununda tüm değerler (R_0 hariç) sıfır veya negatif ise, bir başka deyişle, oran testi yapacak satır yok ise verilen DP sınırlı değildir.

4.3 BÜYÜK M YÖNTEMİ

Eğer bir DP'de $\geq$ veya $=$ kısıtlar varsa, doğrudan bir başlangıç temel olurlu çözümü (bfs) oluşturulamaz. Bu durumda Büyük M (Big M) yöntemi veya İki Aşamalı (Two Phase) Simpleks yöntemi kullanılmalıdır.

Büyük M yöntemi Simpleks Algoritmasının bir türüdür: Soruna yapay (artificial) değişkenler de eklenerek bir bfs bulunur. DP'nin amaç fonksiyonu da sonuçta yapay değişkenlerin katsayıları 0 olacak şekilde yeniden düzenlenir.

Adımlar

1. Öncelikle tüm kısıtlar sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir (ST değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Bu çarpım sonucu eşitsizliğin yönünün değişeceğini unutmayınız!). Düzenlemelerden sonra her kısıt $\leq$, $\geq$ veya $=$ kısıt olarak sınıflandırılır
2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt $\leq$ ise, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi gevşek değişken s_i eklenir. Eğer kısıt $\geq$ ise, sol taraftan bir gevşek değişken (excess variable) e_i çıkarılır. Eklenen gevşek değişkenler için işaret sınırlaması eklenir ($s_i \geq 0$, $e_i \geq 0$).
3. Tüm $\geq$ veya $=$ kısıtların sol tarafına bir yapay değişken a_i eklenir. Aynı zamanda yapay değişkenler için işaret sınırlaması ($a_i \geq 0$) da eklenir.
4. M çok büyük bir sayı olsun. Eğer DP enküçükleme sorunu ise, amaç fonksiyonuna (her yapay değişken için) Ma_i eklenir. Eğer DP enbüyükleme sorunu ise, amaç fonksiyonuna (her yapay değişken için) $-Ma_i$ eklenir.
5. Başlangıç tablosunda, $\geq$ kısıtlarına karşılık gelen satırlarda s_i gevşek değişkeni, $\leq$ ve $=$ kısıtlarına karşılık gelen satırlarda a_i yapay değişkenleri temel değişken olur.
6. Her yapay değişken başlangıç temel çözümünde olacağı için amaç fonksiyonundan (0. satır) elenir (katsayıları sıfır olacak şekilde ERO'lar uygulanır).
7. Daha sonra simpleks algoritmasının adımları kullanılarak (M 'nin büyük bir sayı olduğu unutulmadan!) çözüme gidilir.

Yukarıdaki 7 adımla düzenlenen yeni DP'nin en iyi çözümünde tüm yapay değişkenler 0'a eşit çıkarsa, esas sorunun **en iyi çözümü** bulunmuştur.

Eğer yeni DP'nin en iyi çözümünde en az bir yapay değişken pozitif bir değer alırsa, esas sorun **çözümsüzdür** (infeasible)!!!

Örnek 4.11. Oranj Meyve Suyu

(Winston 4.10., s. 164)

Bevco şirketi, portakal gazozu ile portakal suyunu karıştırarak Oranj ismiyle portakallı meyve suları üretmektedir. Portakal gazozunun bir onsunda 0,5 oz. şeker ve 1 mg C vitamini vardır. Portakal suyunun bir onsunda ise 0,25 oz. şeker ve 3 mg C vitamini vardır. Bevco bir oz. portakal gazozu üretmek için 2¢, bir oz. portakal suyu üretmek için ise 3¢ harcamaktadır. Şirketin pazarlama bölümü Oranj'ı 10 oz.luk şişelerde satmak istemektedir. Her bir şişede en az 20 mg C vitamini bulunması ve en çok 4 oz. şeker olması gerekmektedir. Bevco'nun en az maliyetle Oranj'ı üretmesi için gerekli DP modelini kurunuz ve Büyük M yöntemiyle çözünüz.

Yanıt:

Karar değişkenleri:

x_1 : bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu miktarı

x_2 : bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal suyu miktarı

DP Modeli:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ 0,5x_1 + 0,25x_2 &\leq 4 && (\text{şeker kısıtı}) \\ x_1 + 3x_2 &\geq 20 && (\text{C vit. kısıtı}) \\ x_1 + x_2 &= 10 && (10 \text{ oz'luk şişe kısıtı}) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Büyük M yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir:

Tüm kısıtların ST değeri pozitifdir.

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çevrilir:

$$\begin{aligned} z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 0,5x_1 + 0,25x_2 + s_1 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - e_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ \text{tüm değişkenler} &\geq 0 \end{aligned}$$

Adım 3. $\geq$ ve $=$ kısıtlarına a_i yapay değişkenini eklenir:

$$\begin{array}{rclcl}
 z - 2x_1 - 3x_2 & = & 0 & R_0 \\
 0,5x_1 + 0,25x_2 + s_1 & = & 4 & R_1 \\
 x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 & = & 20 & R_2 \\
 x_1 + x_2 + a_3 & = & 10 & R_3 \\
 \text{tüm değişkenler} & \geq & 0 &
 \end{array}$$

Adım 4. Amaç fonksiyonuna Ma_i eklenir (min. sorunu için)

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

Sıfırıncı satır (R_0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

Adım 5. Başlangıç tablosundaki temel değişkenler belirlenir:

Başlangıç tablosunda; R_1 'de s_1 , R_2 'de a_2 , R_3 'te a_3 temel değişken olacaktır.

Adım 6. Yapay değişkenleri R_0 'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturulur:

$$\text{Yeni } R_0 = R_0 + M R_2 + M R_3 \Rightarrow$$

$$z + (2M-2)x_1 + (4M-3)x_2 - M e_2 = 30M \quad \text{Yeni } R_0$$

Adım 7. Simpleks yöntem uygulanır:

Başlangıç tablosu:

	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
R0	1	$2M-2$	$4M-3$	0	-M	0	0	$30M$	z	
R1	0	0,5	0,25	1	0	0	0	4	s_1	16
R2	0	1	3	0	-1	1	0	20	a_2	20/3 *
R3	0	1	1	0	0	0	1	10	a_3	10

R_0 'da pozitif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R_0 katsayısı en büyük olan x_2 çözüme girer.

Oran testine göre R2 satırı pivot satır olarak belirlenir. a_2 çözümden çıkar.

x_2 'yi R2 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R_2' = R_2/3, \quad R_0' = R_0 - (4M-3)R_2', \quad R_1' = R_1 - 0,25R_2', \quad R_3' = R_3 - R_2'$$

İlk tablo:

	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
R0	1	$(2M-3)/3$	0	0	$(M-3)/3$	$(3-4M)/3$	0	$20+10M/3$	z	
R1	0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1	28/5
R2	0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2	20
R3	0	2/3	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3	5*

R_0 'da pozitif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R_0 katsayısı en büyük olan x_1 çözüme girer.

Oran testine göre R3 satırı pivot satır olarak belirlenir. a_3 çözümünden çıkar.

x_1 'i R3 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R3' = R3/(2/3), \quad R0' = R0 - ((2M-3)/3)R3', \quad R1' = R1 - (5/12)R3', \quad R2' = R2 - (1/3)R3'$$

İkinci tablo:

	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
R0	1	0	0	0	-1/2	(1-2M)/2	(3-2M)/2	25	z
R1	0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1
R2	0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2
R3	0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1

R0'da pozitif değerler olmadığı için çözüm optimaldir.

Çözümde yapay değişkenlerin değerleri 0 olduğu için ($a_2 = a_3 = 0$), bu çözüm ilk modelin çözümünü verir.

Rapor:

Çözümde karar değişkenlerinin değeri $x_1 = 5$, $x_2 = 5$ ve $s_1 = 1/4$ 'tür, $Z = 25$ 'tir (diğer değişkenlerin değerleri 0'dır). Buna göre bir şişe Oranj'da, 5 oz. portakal gazozu ve 5 oz. portakal suyu olmalıdır. Toplam maliyet 25¢ olacaktır.

Örnek 4.12. Değiştirilmiş Oranj Meyve Suyu

Bevco sorunda diğer koşullar aynı kalmak kaydıyla 36 mg. C vitamini gerektiği göz önüne alınırsa ilgili DP modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned}
 \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
 0.5x_1 + 0.25x_2 &\leq 4 && (\text{şeker kısıtı}) \\
 x_1 + 3x_2 &\geq 36 && (\text{C vit. kısıtı}) \\
 x_1 + x_2 &= 10 && (10 \text{ oz'luk şişe kısıtı}) \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Büyük M yöntemi ile çözüm:

İlk altı adım, ilk örnekle benzer şekilde uygulanacaktır.

Başlangıç tablosu:

	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
R0	1	2M-2	4M-3	0	-M	0	0	46M	z	
R1	0	0,5	0,25	1	0	0	0	4	s_1	16
R2	0	1	3	0	-1	1	0	36	a_2	36/3=12
R3	0	1	1	0	0	0	1	10	a_3	10*

R0'da pozitif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en büyük olan x_2 çözüme girer.

Oran testine göre R3 satırı pivot satır olarak belirlenir. a_3 çözümünden çıkar.

x_2 'yi R3 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R3' = R3, \quad R0' = R0 - (4M-3)R3', \quad R1' = R1 - 0,25R3', \quad R2' = R3 - 3R3'$$

İlk tablo:

	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
R0	1	$1-2M$	0	0	-M	0	$3-4M$	$30+6M$	z
R1	0	$1/4$	0	1	0	0	$-1/4$	$3/2$	s_1
R2	0	-2	0	0	-1	1	-3	6	a_2
R3	0	1	1	0	0	0	1	10	x_2

R0'da pozitif değerler olmadığı için çözüm optimaldir.

Fakat çözümde yapay değişkenlerden a_2 'nin değeri 6'dır, bu yüzden Z değeri de M'e bağlı olarak çıkmıştır. Bu, orijinal problemin olurlu olmadığını gösterir.

Rapor:

Belirtilen şartlarda Oranj üretimi yapmak mümkün değildir.

4.4 İKİ AŞAMALI SİMPLEKS

Temel olurlu çözümün (bfs) hazır olmadığı durumlarda iki aşamalı simpleks yöntemi büyük M yöntemine alternatif olarak kullanılabilir. İlgili kısıtlara büyük M yöntemine benzer şekilde yapay değişkenler eklenir. Daha sonra Aşama I DP çözülerek orijinal DP'ye bir bfs bulunur. Aşama I DP'de amaç fonksiyonu yapay değişkenlerin toplamının en küçüklenmesidir. Aşama I sonucunda, orijinal DP'nin amaç fonksiyonu eklenerek DP'nin en iyi çözümü belirlenir.

Adımlar

1. Öncelikle tüm kısıtlar sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir (ST değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Bu çarpım sonucu eşitsizliğin yönünün değişeceğini unutmayınız!). Düzenlemelerden sonra her kısıt $\leq$, $\geq$ veya $=$ kısıt olarak sınıflandırılır
2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt $\leq$ ise, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi gevşek değişken s_i eklenir. Eğer kısıt $\geq$ ise, sol taraftan bir gevşek değişken (excess variable) e_i çıkarılır. Eklenen gevşek değişkenler için işaret sınırlaması eklenir ($s_i \geq 0$, $e_i \geq 0$).

3. Tüm $\geq$ veya $=$ kısıtların sol tarafına bir yapay değişken a_i eklenir. Aynı zamanda yapay değişkenler için işaret sınırlaması ($a_i \geq 0$) da eklenir.
4. Aşama I'de orijinal amaç fonksiyonu, tüm yapay değişkenlerin toplamını ($w = \sum a_i$) en küçükleyecek bir amaç fonksiyonu ile değiştirilerek orijinal DP çözülür. Böylece Aşama I DP'nin çözümü yapay değişkenleri 0 olmaya zorlayacaktır.

Dikkat!! Orijinal problem ne olursa olsun, Aşama 1 problemi minimizasyondur.

5. Her yapay değişken başlangıç temel çözümünde olacağı için simplekse başlamadan önce bu değişkenler 0. satırdan elenmelidir. Daha sonra simpleks ile değiştirilmiş sorun çözülür.

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

- I. Durum 1. $w > 0$ ise orijinal DP'nin çözümü olurlu değildir. (Aşama II'ye geçilmez!)
- II. Durum 2. $w = 0$ ve hiçbir yapay değişken temel değişken değil ise;
 - i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan amaç fonksiyonu satırı ve yapay değişkenler ile ilgili sütunlar atılır.
 - ii. Orijinal amaç fonksiyonu ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur. Eğer Aşama I DP'nin en iyi tablosundaki bazı temel değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları sıfırdan farklı ise bu değişkenlerin amaç fonksiyonunun elenmesi için satır işlemleri yapılmasına dikkat edilmelidir.
 - iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.
- III. Durum 3. $w = 0$ ve en az bir yapay değişken temel değişken ise;
 - i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan amaç fonksiyonu satırı ile temel dışı yapay değişkenler ve sıfırıncı satırdaki katsayısı negatif olan değişkenlere ait sütunlar atılır.
 - ii. Orijinal amaç fonksiyonu ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur. Eğer Aşama I DP'nin en iyi tablosundaki bazı temel değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları sıfırdan farklı ise bu değişkenlerin amaç fonksiyonunun elenmesi için satır işlemleri yapılmasına dikkat edilmelidir.
 - iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Örnek 4.13. Oranj Meyve Suyu

Oranj meyve suyu örneğini iki aşamalı simpleks ile çözünüz.

$$\begin{aligned}
 \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
 0.5x_1 + 0.25x_2 &\leq 4 && (\text{şeker kısıtı}) \\
 x_1 + 3x_2 &\geq 20 && (\text{C vit. kısıtı}) \\
 x_1 + x_2 &= 10 && (10 \text{ oz'luk şişe kısıtı}) \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir.

Tüm kısıtların ST değeri pozitifdir

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çevrilir.

$$\begin{aligned}
 z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\
 0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 &= 4 \\
 x_1 + 3x_2 - e_2 &= 20 \\
 x_1 + x_2 &= 10 \\
 \text{tüm değişkenler} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini eklenir.

$$\begin{aligned}
 z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 && R_0 \\
 0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 &= 4 && R_1 \\
 x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 20 && R_2 \\
 x_1 + x_2 + a_3 &= 10 && R_3 \\
 \text{tüm değişkenler} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir.

$$\min w = a_2 + a_3$$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$w - a_2 - a_3 = 0$$

Adım 5. Yapay değişkenleri R0'dan eleyecek şekilde yeni R0 oluşturulur.

$$\text{Yeni } R_0 = R_0 + R_2 + R_3 \Rightarrow$$

$$w + (1+1)x_1 + (3+1)x_2 - e_2 = 30 \quad \text{Yeni } R_0$$

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

Aşama 1 - Başlangıç tablosu:

	w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
R0	1	2	4	0	-1	0	0	30	w	
R1	0	0,5	0,25	1	0	0	0	4	s_1	16
R2	0	1	3	0	-1	1	0	20	a_2	20/3 *
R3	0	1	1	0	0	0	1	10	a_3	10

R0'da pozitif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en büyük olan x_2 çözüme girer.

Oran testine göre R2 satırı pivot satır olarak belirlenir. a_2 çözümünden çıkar.

x_2 'yi R2 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R2' = R2/3, \quad R0' = R0 - 4R2', \quad R1' = R1 - 0,25R2', \quad R3' = R3 - R2'$$

Aşama 1 - İlk tablo:

	w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
R0	1	2/3	0	0	1/3	-4/3	0	10/3	w	
R1	0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1	28/5
R2	0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2	20
R3	0	2/3	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3	5*

R0'da pozitif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en büyük olan x_1 çözüme girer.

Oran testine göre R3 satırı pivot satır olarak belirlenir. a_3 çözümünden çıkar.

x_1 'i R3 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R3' = R3/(2/3), \quad R0' = R0 - (2/3)R3', \quad R1' = R1 - (5/12)R3', \quad R2' = R2 - (1/3)R3'$$

Aşama 1 - İkinci tablo:

	w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
R0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	w
R1	0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1
R2	0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2
R3	0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1

R0'da pozitif değerler olmadığı için çözüm optimaldir.

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

Aşama I DP en iyi tablosunda $w = 0$ ve a_2 ile a_3 temel dışı değişken olduğu için

Durum 2 ile karşılaşılmıştır.

- Birinci aşama tablosundaki yapay değişkenler ile ilgili sütunları ve amaç fonksiyonu satırı atılır, orijinal amaç fonksiyonu tabloya R0'a eklenir:

$$Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Aşama 2 - Ara tablo:

	z	x_1	x_2	s_1	e_2	ST	TD
R0	1	-2	-3	0	0	0	
R1	0	0	0	1	-1/8	1/4	s_1
R2	0	0	1	0	-1/2	5	x_2
R3	0	1	0	0	1/2	5	x_1

Bu tabloda temel değişken olan x_1 ve x_2 'nin R0 katsayıları 0'dan farklıdır. Bunları 0'a eşitlemek için ERO'lar uygulanır:

$$\text{yeni R0} = \text{R0} + 2\text{R3} + 3\text{R2}$$

Aşama 2 – Başlangıç tablosu:

	z	x_1	x_2	s_1	e_2	ST	TD
R0	1	0	0	0	-1/2	25	$Z=25$
R1	0	0	0	1	-1/8	1/4	s_1
R2	0	0	1	0	-1/2	5	x_2
R3	0	1	0	0	1/2	5	x_1

- ii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Başlangıç tablosunda ilk satırda pozitif katsayı olmadığı için bu tablo en iyi çözümdür.

Bu çözüme göre $x_1 = x_2 = 5$; $z = 25$ 'tir.

Rapor:

Bir şişe Oranj'da, 5 oz. portakal gazozu ve 5 oz. portakal suyu olmalıdır.

Bu durumda toplam maliyet 25¢ olacaktır.

Örnek 4.14. Değiştirilmiş Oranj Meyve Suyu

Oranj meyve suyu örneğini C vitamini gereksinimin 36 mg. olduğu durum için çözünüz.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4 \quad (\text{şeker kısıtı})$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 36 \quad (\text{C vit. kısıtı})$$

$$x_1 + x_2 = 10 \quad (10 \text{ oz'luk şişe kısıtı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz

Tüm kısıtların ST değeri pozitifdir

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz

$$\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 &= 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 &= 36 \\
x_1 + x_2 &= 10 \\
\text{tüm değişkenler} &\geq 0
\end{aligned}$$

Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz

$$\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 & R_0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 &= 4 & R_1 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 36 & R_2 \\
x_1 + x_2 + a_3 &= 10 & R_3 \\
\text{tüm değişkenler} &\geq 0
\end{aligned}$$

Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir.

$$\text{Min } w = a_2 + a_3$$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$w - a_2 - a_3 = 0$$

Adım 5. Yapay değişkenleri R0'dan eleyecek şekilde yeni R0 oluşturunuz

$$\text{Yeni } R_0 = R_0 + R_2 + R_3 \Rightarrow$$

$$w + (1+1)x_1 + (3+1)x_2 - e_2 = 46 \quad \text{Yeni } R_0$$

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

	w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
R0	1	2	4	0	-1	0	0	46	w	
R1	0	0,5	0,25	1	0	0	0	4	s_1	16
R2	0	1	3	0	-1	1	0	36	a_2	12
R3	0	1	1	0	0	0	1	10	a_3	10*

R0'da pozitif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en büyük olan x_2 çözüme girer.

Oran testine göre R3 satırı pivot satır olarak belirlenir. a_3 çözümden çıkar.

x_2 'yi R3 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R_3' = R_3, \quad R_0' = R_0 - 4R_3', \quad R_1' = R_1 - 0,25R_3', \quad R_2' = R_2 - 3R_3'$$

İlk tablo:

	w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
R0	1	-2	0	0	-1	0	-4	6	w
R1	0	1/4	0	1	0	0	-1/4	3/2	s_1
R2	0	-2	0	0	-1	1	-3	6	a_2
R3	0	1	1	0	0	0	1	10	x_2

R0'da pozitif değerler olmadığı için çözüm optimaldir.

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

Aşama I DP en iyi tablosunda $w > 0$ olduğu için Durum 1 ile karşılaşmıştır. Buna göre orijinal DP olurlu değildir.

Rapor:

Belirtilen şartlarda Oranj üretimi yapmak mümkün değildir.

Örnek 4.15. (Winston, 4.13)

Aşağıdaki DP Modelini iki aşamalı simpleks ile çözünüz.

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 40x_1 + 10x_2 && +7x_5 + 14x_6 \\ \text{Öyle ki;} \quad x_1 &- x_2 && +2x_5 &= 0 \\ -2x_1 &+ x_2 && -2x_5 &= 0 \\ x_1 &&+ x_3 &+ x_5 - x_6 &= 3 \\ 2x_2 &+ x_3 + x_4 + 2x_5 &+ x_6 &= 4 \end{aligned}$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz

Tüm kısıtlar eşittir kısıtı olduğu için problem standart biçimdedir.

Adım 3. $>$ veya $=$ kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz

$$\begin{aligned} z - 40x_1 - 10x_2 &&& -7x_5 - 14x_6 &= 0 \\ x_1 &- x_2 && +2x_5 &+ a_1 &= 0 \\ -2x_1 &+ x_2 && -2x_5 &+ a_2 &= 0 \\ x_1 &&+ x_3 &+ x_5 - x_6 &+ a_3 &= 3 \\ 2x_2 &+ x_3 + x_4 + 2x_5 &+ x_6 &= 4 \end{aligned}$$

(Not: son kısıtta x_4 temel değişken olabileceği için yapay değişken eklenmemiştir.)

Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir.

$$\min w = a_1 + a_2 + a_3$$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$w - a_1 - a_2 - a_3 = 0$$

Adım 5. Yapay değişkenleri R_0 'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturulur

$$\text{Yeni } R_0 = R_0 + R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow$$

$$w + x_3 + x_5 - x_6 = 3 \quad \text{Yeni } R_0$$

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

	W	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	a ₁	a ₂	a ₃	ST	TD	Oran
R0	1	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	3	w=3	
R1	0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a ₁ =0	-
R2	0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a ₂ =0	-
R3	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	3	a ₃ =3	3
R4	0	0	2	1	1	2	1	0	0	0	4	x ₄ =4	4

R0'da pozitif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en büyük olan x₃ veya x₅ çözüme girer. x₃'ü seçelim.

Oran testine göre R3 satırı pivot satır olarak belirlenir. a₃ çözümden çıkar.

x₃'ü R3 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R3' = R3, \quad R0' = R0 - R3', \quad R1' = R1, \quad R2' = R2, \quad R4' = R4 - R3'$$

Aşama I DP – ilk tablo (optimal):

	W	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	a ₁	a ₂	a ₃	ST	TD
R0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	w=0
R1	0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a ₁ =0
R2	0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a ₂ =0
R3	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	3	x ₃ =3
R4	0	-1	2	0	1	1	2	0	0	-1	1	x ₄ =1

R0'da pozitif değerler olmadığı için çözüm optimaldir.

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

w = 0 ama a₁ ve a₂ temel değişken olduğu için Durum 3 ile karşılaşılacaktır.

- Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan temel dışı yapay değişkenler ve ilk satırdaki katsayısı negatif olan değişkenler ile ilgili sütunlar ve amaç fonksiyonu satırı atılır. x₁'in ve a₃'ün sütunları ile R0 atılır.

- Orijinal amaç fonksiyonu (z) ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur.

$$z - 40x_1 - 10x_2 \quad -7x_5 - 14x_6 = 0$$

Aşama 2 - Ara tablo ve Başlangıç tablosu:

	Z	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	a ₁	a ₂	ST	TD
R0	1	-10	0	0	-7	-14	0	0	0	z=0
R1	0	-1	0	0	2	0	1	0	0	a ₁ =0
R2	0	1	0	0	-2	0	0	1	0	a ₂ =0
R3	0	0	1	0	1	-1	0	0	3	x ₃ =3
R4	0	2	0	1	1	2	0	0	1	x ₄ =1

Orijinal amaç fonksiyonunda katsayısı sıfırdan farklı olan değişkenlerin tümü temel dışı değişkendir; bu yüzden satır işlemi yapmadan Aşama II DP oluşturulur.

- iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Tabloda R0'da negatif değerler olduğu için çözüm optimal değildir (Dikkat!! orijinal problem maksimizasyondur)

R0 değeri en küçük olan x_6 çözüme girer.

Oran testine göre R4 satırı pivot satır olarak belirlenir. x_4 çözümden çıkar.

x_6 'yı R4 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

Aşama 2 – ilk tablo (optimal)

	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	ST	TD
R0	1	4	0	7	0	0	0	0	7	$z=7$
R1	0	-1	0	0	2	0	1	0	0	$a_1=0$
R2	0	1	0	0	-2	0	0	1	0	$a_2=0$
R3	0	1	1	1/2	3/2	0	0	0	7/2	$x_3=7/2$
R4	0	1	0	1/2	1/2	1	0	0	1/2	$x_6=1/2$

Tabloda R0'da negatif değerler olmadığı için çözüm optimaldir.

Rapor:

$z = 7$, $x_3 = 3,5$; $x_6 = 0,5$; $x_1 = x_2 = x_5 = x_4 = 0$

4.5 İŞARETİ SINIRLANDIRILMAMIŞ DEĞİŞKENLER

Kurulan DP modelinde işareti sınırlandırılmamış değişkenler olabilir (serbest; unrestricted in sign - **urs**). Serbest (urs) değişkenleri olan bir DP'nin simpleks yöntemiyle çözülebilmesi için, problem negatif değerler almayan değişkenlerden oluşan bir DP'ye dönüştürülmelidir. Standart biçimde tüm değişkenlerin $x_i \geq 0$ olmalıdır. İşareti serbest değişkenler aşağıdaki gibi negatif olmayan değişkenlere dönüştürülür:

Her x_i serbest değişkeni için;

- iki yeni x_i' and x_i'' değişkeni tanımlanır,
- tüm kısıtlardaki ve amaç fonksiyonundaki x_i için $x_i' - x_i''$ değişimi yapılır

$$x_i = x_i' - x_i''$$
- $x_i' \geq 0$ and $x_i'' \geq 0$ işaret sınırları eklenir.

Dönüşüm yapıldıktan sonra problem Simpleks, Büyük M veya iki aşamalı simpleks yöntemleri ile çözülebilir.

Örnek 4.16. Fırıncı

Bir fırıncının 30 kg. unu ve 8 paket mayası vardır. Fırıncı 3 TL'ye sattığı bir ekmek için 0.5 kg. un ve 0.2 paket maya kullanmaktadır. Fırıncı piyasadan 4 TL/kg. maliyetle ek un alabilir ya da elinde kalan un olursa aynı fiyata satabilir. Fırıncının karını enbüyükleyecek bir DP modeli kurunuz ve modeli çözünüz.

Yanıt

Karar değişkenleri:

- x_1 : pişirilecek ekmek sayısı
- x_2 : Unun alışveriş sonucunda kaç kg. artacağı

Böylece, eğer fırıncı x_2 kg. un satın alırsa $x_2 > 0$; x_2 kg. un satarsa $x_2 < 0$; un satın almazsa veya satmazsa $x_2 = 0$ olur.

DP modeli:

$$\text{Maks } Z = 3x_1 - 4x_2$$

Öyle ki;

$$0,5x_1 \leq 30 + x_2$$

$$0.2x_1 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ ur}$$

$x_2 = x_2' - x_2''$ dönüşümü kullanıldığında DP aşağıdaki gibi yazılır:

$$\text{Maks } Z = 3x_1 - 4x_2' + 4x_2''$$

Öyle ki;

$$0,5x_1 \leq 30 + x_2' - x_2''$$

$$0.2x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$$

Simpleks ile çözüm

DP, standart biçime dönüştürülür:

$$\text{Maks } Z = 3x_1 - 4x_2' + 4x_2''$$

$$0,5x_1 - x_2' + x_2'' + s_1 = 30$$

$$0.2x_1 + s_2 = 8$$

$$x_1, x_2', x_2'', s_1, s_2 \geq 0$$

Amaç fonksiyonunda değişkenler sağ tarafa geçirilir:

$$Z - 3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' = 0$$

Başlangıç tablosu oluşturulur. Tüm kısıtlar $\leq$ olduğu için yapay değişken ilave etmeye gerek yoktur.

Başlangıç Tablosu:

	Z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	ST	TD	Oran
R0	1	-3	4	-4	0	0	0	Z=0	
R1	0	0,5	-1	1	1	0	30	$s_1=30$	30
R2	0	0,2	0	0	0	1	8	$s_2=8$	-

R0'da negatif değerler olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı en küçük olan x_2'' çözüme girer.

Oran testine göre R1 satırı pivot satır olarak belirlenir. a_1 çözümden çıkar.

x_2'' değişkenini R1 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R1' = R1, \quad R0' = R0 + 4R1', \quad R2' = R2$$

İlk tablo:

	Z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	ST	TD	Oran
R0	1	-1	0	0	4	0	120	Z=120	
R1	0	0,5	-1	1	1	0	30	$x_2''=30$	60
R2	0	0,2	0	0	0	1	8	$s_2=8$	40*

R0'da negatif değer olduğu için çözüm optimal değildir.

R0 katsayısı negatif olan x_1 çözüme girer.

Oran testine göre R2 satırı pivot satır olarak belirlenir. s_2 çözümden çıkar.

x_1 değişkenini R2 satırından çözüme sokmak için ERO'lar uygulanır:

$$R2' = R2/0,2, \quad R0' = R0 + R2', \quad R1' = R1 - 0,5R2'$$

	Z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	ST	TD
R0	1	0	0	0	4	5	160	Z=160
R1	0	0	-1	1	1	-2,5	10	$x_2''=10$
R2	0	1	0	0	0	5	40	$x_1=40$

R0'da negatif değer olmadığı için çözüm optimaldir.

Optimal çözümde $x_1 = 40$; $x_2' = 0$ ve $x_2'' = 10 \rightarrow x_2 = -5$; $z = 160$

$x_2 = x_2' - x_2''$ olduğu için, $x_2 = 0 - 10 = -10$.

Rapor

Fırıncı 40 ekmek pişirip satmalıdır, ayrıca elindeki unun 10 kg.'ımını satmalıdır.

Sonuçta 160 TL kar elde edebilir.

5. DUYARLILIK ANALİZİ VE DUALİTE

Bu bölümde duyarlılık analizi ve dualite konuları işlenecektir.

5.1 DUYARLILIK ANALİZİ

Duyarlılık analizi, DP'deki parametrelerdeki değişimin DP'nin en iyi çözümünü nasıl etkileyeceğini araştırmak için yapılan analizlerdir. DP çözüldükten sonra gerçekleştirilir. DP'nin parametreleri amaç fonksiyonu katsayıları, sağ taraf değerleri ve teknoloji katsayılarıdır. Duyarlılık analizleri çoğunlukla amaç fonksiyonu katsayıları ve sağ taraf değerlerindeki değişimler ilgili yapılır.

Bu bölümde öncelikle DP duyarlılık analizinde kullanılan temel kavramlar verilecek sonrasında grafik üzerinde ve Lindo çıktısı kullanılarak duyarlılık analizi nasıl yapılır açıklanacaktır. Duyarlılık analizi Simpleks yöntem kullanılarak da yapılabilir. Bu konu 6. Bölümde incelenecektir.

5.1.1 İndirgenmiş Maliyet

Herhangi bir temel dışı değişkenin indirgenmiş maliyeti (reduced cost), değişkenin temel değişken olması (DP'nin en iyi çözümüne girmesi) için amaç fonksiyon katsayısında yapılacak iyileştirme miktarıdır.

Eğer bir x_k temel dışı değişkeninin amaç fonksiyon katsayısı indirgenmiş maliyet kadar iyileştirilirse, DP'nin bir tek en iyi çözümü olmaz: alternatif çözümler vardır. x_k , söz konusu çözümlerden en az birinde temel değişken; en az birinde ise temel dışı değişken konumundadır.

Eğer x_k temel dışı değişkeninin amaç fonksiyon katsayısı indirgenmiş maliyetten daha fazla iyileştirilirse, yeni DP'nin tek bir en iyi çözümüne ulaşılır ve bu çözümde x_k temel değişken olur ($x_k > 0$).

Temel değişkenin indirgenmiş maliyeti sıfırdır (tanıma bakınız)!

5.1.2 Gölge Fiyat

DP modelinin i . kısıtının gölge fiyatı (shadow price), söz konusu kısıtın sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerinin 1 birim çoğaltılması durumunda, en iyi amaç fonksiyon değerinin ne kadar iyileştiğini (enbüyüklenme sorunda ne kadar arttığını, enküçüklenme sorunda ne kadar azaldığını) gösterir.

Bu tanım sadece değişimden önceki çözümün değişimden sonra da aynı kalması durumunda geçerlidir!

Bir $\geq$ kısıtın gölge fiyatı her zaman 0 ya da 0'dan küçük (nonpositive); bir $\leq$ kısıtın gölge fiyatı ise her zaman 0 ya da 0'dan büyük (nonnegative) olacaktır.

5.1.3 Kavramsallaştırma

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 6x_1 + x_2 + 10x_3 \\ x_1 + x_3 &\leq 100 \\ x_2 &\leq 1 \\ \text{Tüm değişkenler} &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu çok kolay bir DP modelidir ve simpleks kullanılmadan elle de çözülebilir:

$x_2 = 1$ (Bu değişken ilk kısıtta yoktur, bu durumda sorun enbüyükleme olduğundan ikinci kısıtın sol taraf değeri 1'e eşit olur)

$x_1 = 0, x_3 = 100$ (Bu iki değişken ise salt ilk kısıtta kullanılmışlardır ve x_3 'ün amaç fonksiyon değeri x_1 'inkinden büyük olduğu için x_3 'ün en iyi değeri birinci kısıt ST değerine eşit olur).

Bu durumda en iyi çözüm aşağıdaki gibidir:

$$z = 1001, [x_1, x_2, x_3] = [0, 1, 100]$$

Aynı zamanda duyarlılık analizi de elle hesaplanabilir:

İndirgenmiş Maliyet

x_2 ve x_3 temel değişken (en iyi çözümde) olduklarından, indirgenmiş maliyetleri 0'dır.

x_1 'i temel değişken yapabilmek için amaç fonksiyon katsayısını en az x_3 'ün amaç fonksiyon katsayısı kadar yapmak diğer bir deyişle 4 (10-6) birim çoğaltmak gerekir.

Yeni amaç fonksiyonu (maks $z = 10x_1 + x_2 + 10x_3$) olacak ve $[x_1, x_2, x_3]$ için en az iki en iyi çözüm bulunacaktır: $[0, 1, 100]$ ve $[100, 1, 0]$.

Bu durumda x_1 'in indirgenmiş maliyeti 4'tür.

Eğer x_1 'in amaç fonksiyon katsayısını indirgenmiş maliyet değerinden daha fazla çoğaltırsak en iyi çözüm bir tane olacaktır: $[100, 1, 0]$.

Gölge Fiyat

Eğer birinci kısıtın ST değeri 1 birim arttırılırsa, x_3 'ün yeni en iyi çözüm değeri 100 yerine 101 olacaktır. Bu durumda da z 'nin yeni değeri 1011 olacaktır.

Tanımdan faydalanıp tersten gidersek: $1011 - 1001 = 10$, birinci kısıtın gölge fiyat değeridir.

Benzer şekilde ikinci kısıtın gölge fiyatı 1 olarak hesaplanır (lütfen hesaplayınız).

İncelediğimiz problemin Lindo çıktısı aşağıda verilmiştir.

```

MAX      6 X1 + X2 + 10 X3
SUBJECT TO
          2)   X1 + X3 <= 100
          3)   X2 <= 1
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
          1)   1001.000
VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1             0.000000      4.000000
X2             1.000000      0.000000
X3            100.000000      0.000000
ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
  2)      0.000000      10.000000
  3)      0.000000      1.000000

```

5.1.4 Grafik Çözüm Kullanarak Duyarlılık

Grafik çözümden faydalanarak iki farklı duyarlılık analizi yapabiliriz:

- Amaç Fonksiyon Katsayısında Değişim
- Sağ Tarafta Değişim

Amaç Fonksiyon Katsayısında Değişim

Burada yapılacak analizler Giapetto Örneği üzerinde yapılacaktır.

Karar değişkenleri:

x_1 = bir haftada üretilen asker sayısı

x_2 = bir haftada üretilen tren sayısı

DP modeli:

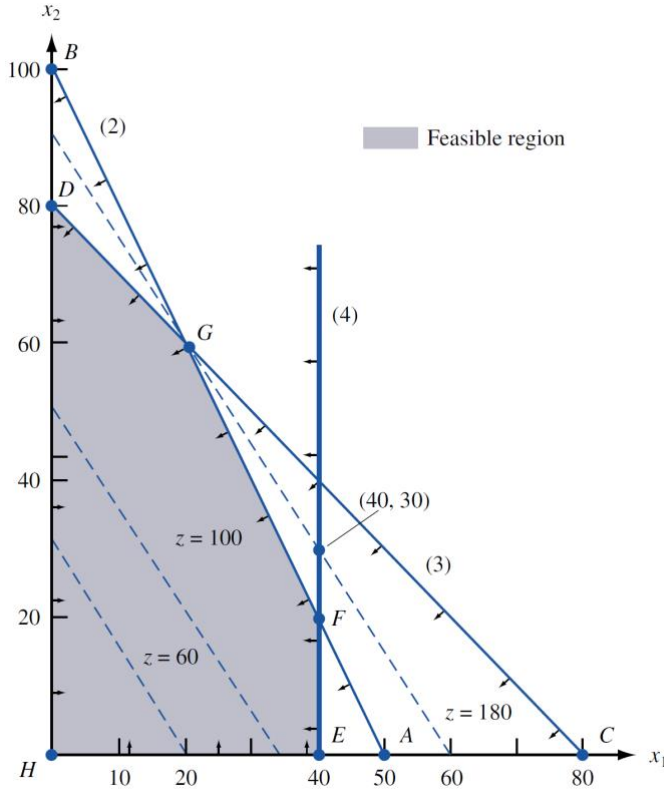
maks $z = 3x_1 + 2x_2$ (Amaç fonksiyonu)

öyle ki $2x_1 + x_2 \leq 100$ (Cilalama kısıtı)

$x_1 + x_2 \leq 80$ (Marangozluk kısıtı)

$x_1 \leq 40$ (Talep kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$ (İşaret sınırlamaları)



Bu modelin grafik çözümündeki eş kar doğruları " $3x_1 + 2x_2 = \text{sabit}$ " olduğu için:

$$x_2 = (\text{sabit} - 3x_1)/2 \rightarrow \text{Eş kar doğruları eğimi: } -3/2$$

Kısıtlar için ise:

Cilalama kısıtı eğimi: -2

Marangozluk kısıtı eğimi: -1

Grafikten de görüleceği gibi eş kar doğrusu marangozluk kısıtından daha yatay olursa en iyi çözüm G yerine D noktası olur. Eş kar doğrusu cilalama kısıtından daha dik olursa en iyi çözüm G yerine F noktası olur.

Örnek 5.1.

Askerden elde edilen karın (c_1) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur? Bu değerler arasında olma koşuluyla, c_1 'in değeri Δ kadar değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

Eş kar doğrusu eğimi: $-c_1/2$

G noktasının en iyi çözümü vermesi için eğim -1'den büyük ve -2'den küçük olmamalı. Bu durumda mevcut çözümün optimalliğinin korunması için:

$$-2 \leq -c_1/2 \leq -1 \rightarrow 2 \leq c_1 \leq 4$$

c_1 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde G noktası hala en iyi çözümü verdiği için Giapetto yine 20 asker ve 60 tren üretmelidir.
Bu durumda kar $180 + 20\Delta$ olacaktır.

Örnek 5.2.

Trenden elde edilen karın (c_2) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur?
Bu değerler arasında olma koşuluyla, c_2 'in değeri Δ kadar değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

Eş kar doğrusu eğimi: $-3/c_2$

G noktasının en iyi çözümü vermesi için eğim -1 'den büyük ve -2 'den küçük olmamalı. Bu durumda mevcut çözümün optimalliğinin korunması için:

$$-2 \leq -3/c_2 \leq -1 \rightarrow 1,5 \leq c_2 \leq 3$$

c_2 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde G noktası hala en iyi çözümü verdiği için Giapetto yine 20 asker ve 60 tren üretmelidir.
Bu durumda kar $180 + 60\Delta$ olacaktır.

Sağ Tarafa Değişim

Bu modelin mevcut en iyi çözümü olan G noktası marangozluk ve cilalama kısıtlarının kesişimindedir. Bu kısıtlar mevcut çözümde aktiftir. Kısıt sağ taraf değeri değiştirildiğinde iki kısıtın kesiştiği nokta olurlu bölgede kalmaya devam ederse mevcut çözüm optimalliğini korur.

Örnek 5.3.

Eldeki cilalama saatinin (b_1) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur?
Bu değerler arasında olma koşuluyla, b_1 'in değeri Δ kadar değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

b_1 değiştiğinde cilalama ve marangozluk kısıtlarının kesişimi DJ doğru parçası üzerinde olduğu sürece mevcut temel çözüm olurlu olarak kalır. Bunun için $80 \leq b_1 \leq 120$ olmalıdır.

b_1 120'den büyük olursa yeni cilalama kısıtı gereksiz olur ve aktifliğini yitirir, talep kısıtı (4) aktif olur:

Yeni olurlu bölge: H-E-J-D

En iyi çözüm: J noktası (40, 40)

b_1 80'den küçük olursa marangozluk kısıtı gereksiz olur ve aktifliğini yitirir, $x_1=0$ aktif olur:

En iyi çözüm: (0, b_1)

$80 \leq b_1 \leq 120$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur.

b_1 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde marangozluk ve cilalama kısıtları aktif olmaya devam edecektir.

$$2x_1 + x_2 = 100 + \Delta \quad (\text{Cilalama kısıtı})$$

$$x_1 + x_2 = 80 \quad (\text{Marangozluk kısıtı})$$

$$x_1 = 20 + \Delta, x_2 = 60 - \Delta; \text{ yeni kar} = 3(20 + \Delta) + 2(60 - \Delta) = 180 + \Delta$$

Bu durumda cilalama kısıtının gölge fiyatı 1'dir.

Örnek 5.4.

Eldeki marangozluk saatinin (b_2) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur? Bu değerler arasında olma koşuluyla, b_1 'in değeri Δ kadar değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

b_2 değiştiğinde cilalama ve marangozluk kısıtlarının kesişimi BF doğru parçası üzerinde olduğu sürece mevcut temel çözüm olurlu olarak kalır. Bunun için $60 \leq b_2 \leq 100$ olmalıdır.

b_2 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde marangozluk ve cilalama kısıtları aktif olmaya devam edecektir.

$$2x_1 + x_2 = 100 \quad (\text{Cilalama kısıtı})$$

$$x_1 + x_2 = 80 + \Delta \quad (\text{Marangozluk kısıtı})$$

$$x_1 = 20 - \Delta, x_2 = 60 + 2\Delta; \text{ yeni kar} = 3(20 - \Delta) + 2(60 + 2\Delta) = 180 + \Delta$$

Bu durumda marangozluk kısıtının gölge fiyatı 1'dir.

Örnek 5.5.

Askere olan talebin (b_3) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur?

Bu değerler arasında olma koşuluyla, b_3 'ün değeri Δ kadar değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

Talep kısıtı mevcut optimal çözümde aktif bir kısıt değildir. G noktası olurlu kaldığı sürece mevcut çözüm optimal kalacaktır. Bunun için $20 \leq b_3$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur.

b_3 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde marangozluk ve cilalama kısıtları aktif olmaya devam edecektir. Bu değişimin optimal çözüme etkisi olmayacaktır. Bu yüzden talep kısıtının gölge fiyatı 0'dır.

Kural: Çözümde aktif olmayan kısıtların gölge fiyatı her zaman 0'dır.

Fikir vermesi açısından yukarıda grafik yöntem kullanılarak yapılan analizlerin sonuçları Lindo çıktısı üzerinde incelenebilir.

```
max 3x1 + 2x2
s.t.
2x1 + x2 <= 100
x1 + x2 <= 80
x1 <= 40
end
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      180.0000
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	60.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.000000
3)	0.000000	1.000000
4)	20.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	3.000000	1.000000	1.000000
X2	2.000000	1.000000	0.500000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	100.000000	20.000000	20.000000
3	80.000000	20.000000	20.000000
4	40.000000	INFINITY	20.000000

5.1.5 Duyarlılık için Lindo Çıktısının Kullanılması

Lindo ile çözülmüş bir problemin çıktı raporu kullanılarak iki tip duyarlılık analizi yapılabilir:

- Amaç fonksiyonu katsayısında değişim.
- Kısıt ST değerinde değişim.

Her iki analizde de öncelikle önerilen değişimin izin verilen aralıklarda olup olmadıkları kontrol edilir. Eğer önerilen değişim izin verilen aralıkta ise mevcut temel çözüm optimal olarak kalacaktır. Yeni Z değerini hesaplamak mümkün olacaktır. Eğer önerilen değişim izin verilen aralıkta değil ise mevcut temel çözüm optimal olarak kalmayacağı sonucuna varılabilir. Bu durumda yeni çözüm Lindo çıktısındaki bilgiler kullanılarak bulunamaz.

Eğer bir karar değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı değiştirildiğinde katsayı izin verilen aralıklarında (allowable RHS range) ise aşağıdaki denklem kullanılarak yeni amaç fonksiyon değeri hesaplanabilir (Enbüyüklemeye ve enküçüklemeye problemlerinde aynı şekilde):

- $\text{yeni Z} = \text{eski Z} + (\text{yeni katsayı} - \text{eski katsayı}) \times \text{değişkenin çözümdeki değeri}$

Eğer bir kısıtın ST değerindeki bir değişim en iyi çözümün değişmeyeceği izin verilen ST aralıklarında (allowable RHS range) ise aşağıdaki denklemler kullanılarak yeni amaç fonksiyon değeri hesaplanabilir:

Enbüyüklemeye sorunu için:

- $\text{yeni Z} = \text{eski Z} + (\text{yeni ST} - \text{eski ST}) \times \text{gölge fiyat}$

Enküçüklemeye sorunu için:

- $\text{yeni Z} = \text{eski Z} - (\text{yeni ST} - \text{eski ST}) \times \text{gölge fiyat}$

Analizlerle ilgili örnekler Dakota Mobilya örneği üzerinde yapılacaktır.

Dakota Mobilya

(Winston 4.3, s. 134)

Dakota mobilya şirketi sıra, masa ve sandalye yapmaktadır. Her ürün için, aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi, sınırlı miktarda kullanılabilen tahta, marangozluk ve cilalama işçiliği gerekmektedir. Aynı tabloda ürünlerin satış fiyatları da verilmiştir. Haftada en fazla 5 masa satılabilmektedir. Haftalık karı enbüyükleyecek üretim planını oluşturmak için bir DP kurunuz ve çözünüz.

Kaynak	Sıra	Masa	Sandalye	Kullanılabilen.
Tahta (m ²)	8	6	1	48
Cilalama	4	2	1,5	20
Marangozluk	2	1,5	0,5	8
Talep (maks)	-	5	-	
Fiyat (\$)	60	30	20	

DP Modeli:

x_1, x_2, x_3 bir haftada üretilen sıra, masa ve sandalye sayısı olsun. z ise Dakota'nın haftalık kar miktarını gösterebilir. Aşağıdaki DP'yi formüle edebiliriz.

$$\begin{aligned}
 \text{maks } z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
 \text{öyle ki } 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\
 4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 &\leq 20 \\
 2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 &\leq 8 \\
 x_2 &\leq 5 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Lindo çıktısı

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      280.0000
      VARIABLE             VALUE             REDUCED COST
        X1              2.000000             0.000000
        X2              0.000000             5.000000
        X3              8.000000             0.000000
      ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    TAHTA )              24.000000             0.000000
    MONTAJ )              0.000000             10.000000
    MARNGZ )              0.000000             10.000000
    TALEP )              5.000000             0.000000
NO. ITERATIONS=         2
      RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
              OBJ COEFFICIENT RANGES
      VARIABLE             CURRENT             ALLOWABLE             ALLOWABLE
              COEF             INCREASE             DECREASE
        X1              60.000000             20.000000             4.000000
        X2              30.000000              5.000000             INFINITY
        X3              20.000000              2.500000             5.000000
              Righthand Side Ranges
      ROW             CURRENT             ALLOWABLE             ALLOWABLE
              RHS             INCREASE             DECREASE
    TAHTA              48.000000             INFINITY             24.000000
    MONTAJ              20.000000              4.000000             4.000000
    MARNGZ              8.000000              2.000000             1.333333
    TALEP              5.000000             INFINITY             5.000000

```

Örnek 5.6.

Eğer sıranın (x_1) birim fiyatı 70\$ olursa, mevcut temel çözüm optimal olarak kalır mı? Kalırsa yeni en büyük toplam kâr ne olur?

Yanıt

Sıranın birim fiyatının 70\$ olması, x_1 'in amaç fonksiyonu katsayısının 70 olması ve 10 birim artması demektir. Bu değişken için izin verilen artış (allowable increase) 20 olduğu için, bu artışta mevcut temel olurlu çözüm en iyi olarak kalır.

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
x_1	60.000000	20.000000	4.000000

Yeni durumdaki toplam kar aşağıdaki gibi hesaplanır:

yeni Z = eski Z + (yeni katsayı – eski katsayı) × değişkenin çözümdeki değeri

yeni Z = 280 + (70 – 60) × 2 = 300.

Örnek 5.7.

Eğer masanın (x_2) birim fiyatı 25\$ olursa, mevcut temel çözüm optimal olarak kalır mı? Kalırsa yeni en büyük toplam kâr ne olur?

Yanıt

Masanın birim fiyatının 25\$ olması, x_2 'nin amaç fonksiyonu katsayısının 25 olması ve 5 birim azalması demektir. Bu değişken için izin verilen azalış (allowable decrease) sonsuz (INFINITY) olduğu için, bu azalmada mevcut temel olurlu çözüm en iyi olarak kalır.

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
x_1	60.000000	20.000000	4.000000
x_2	30.000000	5.000000	INFINITY

Yeni durumdaki toplam kar aşağıdaki gibi hesaplanır:

yeni Z = 280 + (25 – 30) × 0 = 280.

Dikkat! Eğer önerilen değişim bir temel dışı değişkende ve izin verilen aralıktaysa Z değeri değişmez.

Örnek 5.8.

Eğer sandalyenin (x_2) birim fiyatı 10\$ olursa, mevcut temel çözüm optimal olarak kalır mı? Kalırsa yeni en büyük toplam kâr ne olur?

Yanıt

Sandalyenin birim fiyatının 10\$ olması, x_3 'ün amaç fonksiyonu katsayısının 10 olması ve 10 birim azalması demektir. Bu değişken için izin verilen azalış (allowable decrease) 5'tir. Önerilen değişim izin verilen aralık dışında olduğu için mevcut temel olurlu çözüm en iyi olarak kalmayacaktır. Lindo çıktısını kullanarak yeni Z değerini tespit etmek mümkün değildir.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:			
OBJ COEFFICIENT RANGES			
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
x_3	20.000000	2.500000	5.000000

Örnek 5.9.

Eğer kullanılabilen tahta miktarı 30 birim olursa, mevcut temel çözüm optimal olarak kalır mı? Kalırsa yeni en büyük toplam kâr ne olur?

Yanıt

Kullanılabilen tahta miktarının 30 birim olması, ilk kısıtın sağ taraf değerini 30 yapacaktır. Bu, orjinal duruma göre 18 birim azalmadır. Bu kısıt sağ taraf değeri için izin verilen azalma 24'tür. Önerilen değişim izin verilen aralıkta olduğu için mevcut temel olurlu çözüm en iyi olarak kalır.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:			
RIGHTHAND SIDE RANGES			
ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
TAHTA	48.000000	INFINITY	24.000000

Yeni durumdaki toplam kar aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\text{Yeni Z} = \text{eski Z} + (\text{yeni ST} - \text{eski ST}) \times \text{gölge fiyat}$$

$$\text{Yeni Z} = 280 + (30 - 48) \times 0 = 280.$$

Dikkat! Eğer önerilen değişim aktif olmayan bir kısıtta ve izin verilen aralıktaysa Z değeri değişmez.

Örnek 5.10.

Eğer kullanılabilen montaj miktarı 22 saat olursa, mevcut temel çözüm optimal olarak kalır mı? Kalırsa yeni en büyük toplam kâr ne olur?

Yanıt

Kullanılabilen montaj miktarının 22 saat olması, ikinci kısıtın sağ taraf değerini 22 yapacaktır. Bu, orjinal duruma göre 2 birim artıştır. Bu kısıt sağ taraf değeri için izin

verilen artış 4'tür. Önerilen değişim izin verilen aralıkta olduğu için mevcut temel olurlu çözüm en iyi olarak kalır.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:			
ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
MONTAJ	20.000000	4.000000	4.000000

Yeni durumdaki toplam kar aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\text{Yeni Z} = \text{eski Z} + (\text{yeni ST} - \text{eski ST}) \times \text{gölge fiyat}$$

$$\text{Yeni Z} = 280 + (22 - 20) \times 10 = 300.$$

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
MONTAJ)	0.000000	10.000000

Örnek 5.11.

Eğer kullanılabilen marangozluk miktarı 6 saat olursa, mevcut temel çözüm optimal olarak kalır mı? Kalırsa yeni en büyük toplam kâr ne olur?

Yanıt

Kullanılabilen marangozluk miktarının 6 saat olması, üçüncü kısıtın sağ taraf değerini 6 yapacaktır. Bu, orjinal duruma göre 2 birim azalmadır. Bu kısıt sağ taraf değeri için izin verilen azalma 1.333'tür. Önerilen değişim izin verilen aralıkta olmadığı için mevcut temel olurlu çözüm en iyi olarak kalmayacaktır. Lindo çıktısını kullanarak yeni Z değerini tespit etmek mümkün değildir.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:			
ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
MARNGZ	8.000000	2.000000	1.333333

5.1.6 %100 Kuralı

Modelde birden fazla parametrenin değeri değişirse %100 kuralı kullanılır. Söz konusu değişimler iki başlık altında incelenecektir:

- Amaç Fonksiyon Katsayısında Değişim
- Sağ Tarafta Değişim

%100 Kuralı ile ilgili örnekler Beslenme Örneği üzerinden verilmiştir.

Beslenme Örneği

(Winston 3.4., s. 70)

Bayan Fidan dört gıda grubu ile beslenmektedir: kek, çikolatalı dondurma, kola, ananaslı pasta. Bir adet kek 0,5 \$'a, bir kaşık dondurma 0,2 \$'a, bir şişe kola 0.3 \$'a ve bir dilim pasta 0.8 \$'a satılmaktadır. Bayan Fidan her gün en az 500 kalori, 6 ons çikolata, 10 ons şeker ve 8 ons yağ alması gerekmektedir. Besinlerin birer birimlerinde yer alan kalori, çikolata, şeker ve yağ miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Kalori	Çikolata (ons)	Şeker (ons)	Yağ (ons)
Kek (1 adet)	400	3	2	2
Çikolatalı dondurma (1 kaşık)	200	2	2	4
Kola (1 şişe)	150	0	4	1
Ananaslı pasta (1 dilim)	500	0	4	5

Bayan Fidan'ın gereksimlerini en az maliyetle karşılayabilmesine yardımcı olacak bir DP modeli aşağıdaki gibi kurulmuştur.

Karar değişkenleri:

x_1 : günlük yenilecek kek sayısı

x_2 : günlük yenilecek kaşık dondurma sayısı

x_3 : günlük içilecek şişe kola sayısı

x_4 : günlük yenilecek dilim pasta sayısı

Bu durumda amaç fonksiyonu (cent cinsinden toplam günlük maliyet):

$$\min Z = 50 x_1 + 20 x_2 + 30 x_3 + 80 x_4$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned}
 400 x_1 + 200 x_2 + 150 x_3 + 500 x_4 &\geq 500 && \text{(günlük kalori)} \\
 3 x_1 + 2 x_2 &\geq 6 && \text{(günlük çikolata)} \\
 2 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 + 4 x_4 &\geq 10 && \text{(günlük şeker)} \\
 2 x_1 + 4 x_2 + x_3 + 5 x_4 &\geq 8 && \text{(günlük yağ)} \\
 x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4 && \text{(işaret sınırlamaları!)}
 \end{aligned}$$

Besleme Örneği – Lindo Çıktısı

```

MIN 50 X1 + 20 X2 + 30 X3 + 80 X4
SUBJECT TO
Kalori) 400 X1 + 200 X2 + 150 X3 + 500 X4 >= 500
Ciko) 3 X1 + 2 X2 >= 6
Seker) 2 X1 + 2 X2 + 4 X3 + 4 X4 >= 10
Yag) 2 X1 + 4 X2 + X3 + 5 X4 >= 8
END

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2
 OBJECTIVE FUNCTION VALUE
 1) 90.00000
 VARIABLE VALUE REDUCED COST
 X1 0.000000 27.500000
 X2 3.000000 0.000000
 X3 1.000000 0.000000
 X4 0.000000 50.000000
 ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
 KALORI) 250.000000 0.000000
 CIKO) 0.000000 -2.500000
 SEKER) 0.000000 -7.500000
 YAG) 5.000000 0.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	50.000000	INFINITY	27.500000
X2	20.000000	18.333334	5.000000
X3	30.000000	10.000000	30.000000
X4	80.000000	INFINITY	50.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
KALORI	500.000000	250.000000	INFINITY
CIKO	6.000000	4.000000	2.857143
SEKER	10.000000	INFINITY	4.000000
YAG	8.000000	5.000000	INFINITY

5.1.6.1 Amaç Fonksiyonu Katsayılarında Değişim

DURUM 1: Modelde Amaç Fonksiyon Katsayısı değişen tüm değişkenlerin indirgenmiş maliyeti sıfırdan farklı ise;

- Değişkenlerin amaç fonksiyon katsayısındaki değişimleri izin verilen aralıklarda ise mevcut çözüm optimalliğini korur.
- En az bir değişim izin verilen aralıkta değilse mevcut çözümün optimalliği bozulur.

DURUM 2: Amaç Fonksiyon Katsayısı değişen en az bir değişkenin indirgenmiş maliyeti sıfır ise %100 kuralı uygulanır:

$$\Delta c_j \geq 0 \text{ ise } r_j = \frac{\Delta c_j}{I_j} \quad I_j: \text{izin verilen artış}$$

$$\Delta c_j \leq 0 \text{ ise } r_j = \frac{-\Delta c_j}{D_j} \quad D_j: \text{izin verilen azalış}$$

- $\sum r_j \leq 1$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur.
- $\sum r_j > 1$ ise mevcut çözümün optimalliğini koruması hakkında emin olamayız.

Mevcut çözümün optimalliğini korunması durumunda yeni Z değeri hesaplanabilir:

- Yeni Z = eski Z + $\sum_j [(yeni \text{ katsayı}_j - eski \text{ katsayı}_j) \times \text{çözümdeki değeri}]$

Örnek 5.12.

Kekin (x_1) satış fiyatı 50¢ yerine 60¢ olursa ve pastanın (x_4) satış fiyatı 80¢ yerine 50¢ olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

Amaç fonksiyonu katsayısı değişen her iki karar değişken de temel dışı değişken olduğu için DURUM 1 söz konusudur.

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	50.000000	INFINITY	27.500000
X4	80.000000	INFINITY	50.000000

Değişimler izin verilen aralıklardadır: mevcut çözüm optimal kalır.

En iyi çözümdeki karar değişkeni ve amaç fonksiyon değerleri değişmez.

Örnek 5.13.

Kekin (x_1) satış fiyatı 50¢ yerine 40¢ olursa ve pastanın (x_4) satış fiyatı 80¢ yerine 25¢ olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

Amaç fonksiyonu katsayısı değişen her iki karar değişkeni de temel dışı değişken olduğu için DURUM 1 söz konusudur.

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	50.000000	INFINITY	27.500000
X4	80.000000	INFINITY	50.000000

Pastanın satış fiyatı izin verilen aralıkta değildir: mevcut çözümün optimalliği bozulur.

En iyi çözümü bulmak için problem yeniden çözülmelidir.

Örnek 5.14.

Sıranın (x_1) satış fiyatı 60¢ yerine 70¢ olursa ve sandalyenin (x_3) satış fiyatı 20¢ yerine 18¢ olursa mevcut çözümün optimallliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

x_1 ve x_3 temel değişkendir. Amaç fonksiyonu katsayısı değişen en az bir karar değişkeni temel değişken olduğu için DURUM 2 söz konusudur. %100 kuralı uygulanır.

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
x_1	60.000000	20.000000	4.000000
x_3	20.000000	2.500000	5.000000

$$\Delta c_1 = 10, I_1 = 20, r_1 = \frac{10}{20} = 0,5$$

$$\Delta c_3 = -2, D_3 = 5, r_3 = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$r_1 + r_3 = 0,9 \leq 1 \rightarrow \text{Mevcut çözüm optimal kalır.}$$

En iyi çözümdeki karar değişkeni değerleri değişmez.

$$\text{Yeni amaç fonksiyonu değeri} = 280 + 2(10) + 8(-2) = 284$$

Örnek 5.16.

Sıranın (x_1) satış fiyatı 60¢ yerine 58¢ olursa ve masanın (x_2) satış fiyatı 30¢ yerine 33¢ olursa mevcut çözümün optimallliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x_1	2.000000	0.000000
x_2	0.000000	5.000000

x_1 temel değişkendir. Amaç fonksiyonu katsayısı değişen en az bir karar değişkeni temel değişken olduğu için DURUM 2 söz konusudur. %100 kuralı uygulanır.

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
x_1	60.000000	20.000000	4.000000
x_2	30.000000	5.000000	INFINITY

$$\Delta c_1 = -2, D_1 = 4, r_1 = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$\Delta c_2 = 3, I_2 = 5, r_3 = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$r_1 + r_3 = 1,1 > 1 \rightarrow \text{Mevcut çözümün optimalliği hakkında bilgimiz yok.}$$

5.1.6.2 Sağ Taraf değerlerinde Değişim

DURUM 1: Modelde Sağ Tarafı değiştirilen tüm kısıtlar aktif (sıkı) olmayan kısıtlarsa;

- Tek tek bakıldığında, sağ tarafların değişimleri izin verilen aralıklarda ise mevcut çözüm optimalliğini korur.
- En az bir kısıtla ilgili değişim izin verilen aralıkta değilse mevcut çözümün optimalliği bozulur.

DURUM 2: Modelde Sağ Tarafı değiştirilen kısıtlardan en az biri aktif (sıkı) kısıtsa %100 kuralı uygulanır:

$$\Delta b_i \geq 0 \text{ ise } r_i = \frac{\Delta b_i}{I_i} \quad I_i: \text{izin verilen artış}$$

$$\Delta b_i \leq 0 \text{ ise } r_i = \frac{-\Delta b_i}{D_i} \quad D_i: \text{izin verilen azalış}$$

- $\sum r_i \leq 1$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur.
- $\sum r_i > 1$ ise mevcut çözümün optimalliğini koruması hakkında emin olamayız.

Mevcut çözümün optimalliğini korunması durumunda yeni Z değeri hesaplanabilir:

Enbüyükleme sorunu için:

- Yeni Z = eski Z + $\sum_j [(yeni ST_j - eski ST_j) \times \text{gölge fiyat}_j]$

Enküçükleme sorunu için:

- Yeni Z = eski Z - $\sum_j [(yeni ST_j - eski ST_j) \times \text{gölge fiyat}_j]$

Örnek 5.17

Kalori gereksinimi 500 yerine 400 olursa ve yağ gereksinimi 8 oz. yerine 10 oz. olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

Kalori ve yağ kısıtlarının her ikisi de aktif değildir: DURUM 1 söz konusudur.

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
KALORI	500.000000	250.000000	INFINITY
YAG	8.000000	5.000000	INFINITY

Değişimler izin verilen aralıklarda: mevcut çözüm optimal kalır.

En iyi çözümdeki karar değişkeni ve amaç fonksiyon değerleri değişmez.

Örnek 5.18.

Kalori gereksinimi 500 cal. yerine 400 cal. olursa ve yağ gereksinimi 8 oz. yerine 15 oz. olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

Kalori ve yağ kısıtlarının her ikisi de aktif değildir: DURUM 1 söz konusudur.

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
KALORI	500.000000	250.000000	INFINITY
YAG	8.000000	5.000000	INFINITY

Yağ kısıtının sağ taraf değişimi izin verilen aralıkta değil: mevcut çözümün optimalliği bozulur. En iyi çözümü bulmak için problem yeniden çözülmelidir.

Örnek 5.19.

Çikolata gereksinimi 6 oz. yerine 8 oz. olursa ve şeker gereksinimi 10 oz. yerine 7 oz. olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

Çikolata ve şeker kısıtlarının her ikisi de aktif kısıtlardır. Sağ tarafı değişen en az bir kısıt aktif olduğu için DURUM 2 söz konusudur. %100 kuralı uygulanır.

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
COKO	6.000000	4.000000	2.857143
SEKER	10.000000	INFINITY	4.000000

$$\Delta b_2 = 2, I_2 = 4, r_2 = \frac{2}{4} = 0,5;$$

$$\Delta b_3 = -3, D_3 = 4, r_3 = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$r_2 + r_3 = 1,25 > 1 \rightarrow \text{Mevcut çözümün optimalliği hakkında bilgimiz yok}$$

Örnek 5.20.

Kalori gereksinimi 500 yerine 600 ve çikolata gereksinimi 6 oz. yerine 8 oz. olursa mevcut çözümün optimallığı korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

Çikolata kısıtı aktiftir. Sağ tarafı değişen en az bir kısıt aktif olduğu için DURUM 2 söz konusudur. %100 kuralı uygulanır.

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
KALORI	500.000000	250.000000	INFINITY
CIKO	6.000000	4.000000	2.857143

$$\Delta b_1 = 100, I_1 = 250, r_1 = \frac{100}{250} = 0,4;$$

$$\Delta b_2 = 2, I_2 = 4, r_2 = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$r_1 + r_2 = 0,9 \leq 1 \rightarrow \text{Mevcut çöz optimal olarak kalır.}$$

İlgili kısıtların gölge fiyatları kullanılarak yeni amaç fonksiyonu değeri hesaplanabilir.

$$\text{Yeni } Z = 280 - (100 (0) + 2 (-2)) = 284$$

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
KALORI)	250.000000	0.000000
CIKO)	0.000000	-2.500000

5.2 DUALİTE**5.2.1 Primal – Dual**

Herhangi bir DP ile ilişkisi olan bir diğer DP **dual** (eşters) olarak isimlendirilir. Dual bilgisi ekonomik ve duyarlılık analizi ile ilgili ilginç açıklamalar sağlar. Duali alınan DP **primal** olarak isimlendirilir. Primal model enbüyüklenme sorunu ise dual enküçüklenme sorunu olur. Bu kuralın tam tersi de doğrudur.

Dualitede temel prensip; Primal modeldeki kısıtların Dual modeldeki *karar değişkenleri* ile; Primal modeldeki karar değişkenlerinin Dual modeldeki *kısıtlarla* ilişkili olmasıdır.

5.2.2 Bir DP'nin Dualini Bulma

Normal enbüyüklenme sorununun duali **normal enküçüklenme** sorunudur.

Normal enbüyüklenme sorunu: tüm değişkenler ≥ 0 ; tüm kısıtlar $\leq$.

Normal enküçüklenme sorunu: tüm değişkenler ≥ 0 ; tüm kısıtlar $\geq$.

Benzer şekilde, normal enküçüklenme sorununun duali de normal enbüyüklenme sorunudur.

Normal Enbüyüklenme Sorununun Dualini Bulma

PRİMAL

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \\ \text{öyle ki} \quad &a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ &a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m \\ &x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

DUAL

$$\begin{aligned} \text{min } w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\ \text{öyle ki} \quad &a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq C_1 \\ &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq C_2 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq C_n \\ &y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Normal Enküçüklenme Sorununun Dualini Bulma

PRİMAL

$$\begin{aligned} \text{min } w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\ \text{öyle ki} \quad &a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq C_1 \\ &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq C_2 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq C_n \\ &y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

DUAL

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \\ \text{öyle ki} \quad &a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ &a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m \\ &x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Normal olmayan modellerin dualini bulma

Temel prensip;

- Primal modelde bir kısıt normalse; Dual modelde ilgili karar değişkeni normaldir.

- Primal modelde bir kısıt *normal değil ise*; Dual modelde ilgili karar değişkeni *normal değildir*.
- Primal modelde bir karar değişkeni *normal ise*; Dual modelde ilgili kısıt *normaldir*.
- Primal modelde bir karar değişkeni *normal değil ise*; Dual modelde ilgili kısıt *normal değildir*.

Dikkat! Kısıtlar için normal olup olmama problem tipine göre değişir!

Normal Olmayan Enbüyüklenme Sorununun Dualini Bulma

- Eğer i . primal kısıt $\geq$ kısıtsa, ilgili dual değişken $y_i \leq 0$ şeklinde olmalıdır.
- Eğer i . primal kısıt eşitlikse, ilgili dual değişken y_i "işareti sınırlandırılmamış" (serbest; unrestricted in sign - urs) değişkendir.
- Eğer i . primal değişken urs ise, i . dual kısıt eşitliklidir.

Normal Olmayan Enküçüklenme Sorununun Dualini Bulma

- Eğer i . primal kısıt $\leq$ kısıtsa, ilgili dual değişken $x_i \leq 0$ şeklinde olmalıdır
- Eğer i . primal kısıt eşitlikse, ilgili dual değişken x_i "işareti sınırlandırılmamış" (urs) değişkendir.
- Eğer i . primal değişken urs ise, i . dual kısıt eşitliklidir

Aşağıda Primal ve ilgili dual model örnekleri verilmiştir.

PRİMAL	DUAL
Maks $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$ öyle ki; $8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$ $4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 20$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	Min $w = 48 y_1 + 20 y_2$ Öyle ki; $8 y_1 + 4 y_2 \geq 60$ $6 y_1 + 2 y_2 \geq 30$ $y_1 + 5 y_2 \geq 20$ $y_1, y_2 \geq 0$
Min $z = 4x_1 - 5x_2 + 3x_3$ Öyle ki; $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 20$ $15x_1 + 6x_2 - 7x_3 \geq 50$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	Max $w = 20 y_1 + 50 y_2$ Öyle ki; $y_1 + 15 y_2 \leq 4$ $-y_1 + 6 y_2 \leq -5$ $2y_1 - 7 y_2 \leq 3$ $y_1, y_2 \geq 0$
Maks $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3$ Öyle ki; $4x_1 + x_2 \geq 2$ $5x_1 - 6x_2 - x_3 \leq 18$ $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ $x_1, x_3 \geq 0$ x_2 urs.	Min $w = 2 y_1 + 18 y_2 + 9y_3$ Öyle ki; $4 y_1 + 5 y_2 + y_3 \geq 1$ $y_1 - 6 y_2 + y_3 = 2$ $- y_2 + y_3 \geq -3$ $y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3$ urs

Min $z = x_1$ Öyle ki; $x_1 - 4x_2 \geq -5$ $-x_1 + 2x_2 = 3$ $5x_2 \leq 25$ $x_1 \geq 0, x_2$ urs	Maks $w = -5y_1 + 3y_2 + 25y_3$ öyle ki; $y_1 - y_2 \leq 1$ $-4y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 0$ $y_1 \geq 0, y_2$ urs, $y_3 \leq 0$
--	---

5.2.3 Dual Teoremi

Primal ve dual DP problemleri ile ilgili aşağıdaki koşullardan bir tanesi geçerlidir:

- Her ikisinin de en iyi çözümü vardır ve birbirine eşittir: $z^* = w^*$.
- Bir problemde çözüm sınırsız iken diğer problem olurlu değildir.
- Her iki problem de olurlu değildir.

Zayıf dualiteye göre; dual için herhangi bir olurlu çözümün w -değeri en az primal için herhangi bir olurlu çözümün z -değeri kadar olabilir $\rightarrow z \leq w$.

- Dual için herhangi bir olurlu çözüm primal amaç fonksiyon değeri için sınır olarak kullanılabilir.

Ayrıca dual çözüm en iyi çözümle ilgili yorum yapabilmemizi sağlar.

Dual modelin çözümü primal modeldeki karar değişkenlerinin indirgenmiş maliyetleri ve kısıtların gölge fiyatlarını verir.

Primal modelin en iyi çözüm tablosundan dual modelin sonucu elde edilebilir.

- Primal model enbüyükleme sorunu ise;
‘ y_i dual değişkeninin en iyi değeri’
= ‘en iyi R_0 ’da s_i ’nin katsayısı’ (kısıt $i \leq$ ise)
= –‘en iyi R_0 ’da e_i ’nin katsayısı’ (kısıt $i \geq$ ise)
= ‘en iyi R_0 ’da a_i ’nin katsayısı’ – M (kısıt $i =$ ise)
- Primal enküçükleme sorunu ise en iyi tablonun sıfırıncı satırından en iyi dual çözüm nasıl okunur?

‘ x_i dual değişkeninin en iyi değeri’
= ‘en iyi R_0 ’da s_i ’nin katsayısı’ (kısıt $i \leq$ ise)
= –‘en iyi R_0 ’da e_i ’nin katsayısı’ (kısıt $i \geq$ ise)
= ‘en iyi R_0 ’da a_i ’nin katsayısı’ + M (kısıt $i =$ ise)

Örnek 5.21. Primal model optimal tablosundan dual model sonucunu elde etme

Aşağıda DP modeli ve en iyi tablosu verilen problemi dikkate alarak dual modeli bulunuz ve en iyi çözümde dual değişkenlerin değerlerini belirleyiniz.

Primal DP:

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{Öyle ki; } 0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 4 \quad (\text{Şeker Kısıtı})$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 20 \quad (\text{C vit. Kısıdı})$$

$$x_1 + x_2 = 10 \quad (\text{10 oz'luk şişe kısıdı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{işaret kısıtlamaları})$$

	Z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
R0	1	0	0	0	-1/2	(1-2M)/2	(3-2M)/2	25	z
R1	0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1
R2	0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2
R3	0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1

Yanıt

Dual model:

$$\text{Maks } w = 4y_1 + 20y_2 + 10y_3$$

$$\text{Öyle ki; } 0,5y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$0,25y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 3$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ ur}$$

Dual modelde y_1 değişkeni primal modeldeki şeker kısıtı ile ilgilidir. Şeker kısıtının gevşek değişkeni s_1 'in en iyi tabloda R0'daki değeri y_1 'in optimal çözümdeki değerini verir: $y_1 = 0$.

Dual modelde y_2 değişkeni primal modeldeki C vitamini kısıtı ile ilgilidir. Bu kısıtın gevşek değişkeni e_2 'in en iyi tabloda R0'daki değerini -1 çarparak y_2 'in optimal çözümdeki değerini bulunur: $y_2 = -(-1/2) = 1/2$.

Dual modelde y_3 değişkeni primal modeldeki şişe kısıtı ile ilgilidir. Bu kısıtın yapay değişkeni e_3 'in en iyi tabloda R0'daki değerine +M eklenerek y_3 'ün optimal çözümdeki değerini bulunur: $y_3 = (3-2M)/2+M = 3/2$.

Böylece dual modelin optimal çözümü $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1/2, 3/2)$ olarak bulunur. Amaç fonksiyonunda yerine konursa; $w = 25$ bulunur. Bu da primal modelin çözümüne eşittir.

5.2.4 Ekonomik Yorum

Primal normal enbüyüklenme sorunu olduğunda, dual değişkenler karar vericiye sağlanabilecek kaynakların değeri ile ilgili olur. Bu yüzden dual değişkenlerden çoğu kez **kaynak gölge fiyatları** olarak söz edilir.

Örnek 5.22.

Dakota Mobilya örneğini dikkate alınız.

PRİMAL

x_1, x_2, x_3 üretilen sıra, masa ve sandalye sayısını göstermektedir.

Haftalık kar \$z iken DP modeli:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \quad (\text{Tahta kısıtı}) \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \quad (\text{Cilalama kısıtı}) \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \quad (\text{Marangozluk kısıtı}) \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

DUAL

Farzedelim ki; bir girişimci Dakota'nın tüm kaynaklarını (hammadde) satın almak istiyor. Dual sorunda y_1, y_2, y_3 sırasıyla bir m² tahta, bir saat cilalama işçiliği ve bir saat marangozluk için ödenmesi gereken ücreti gösterir.

\$w de kaynak satın alma toplam maliyetini gösterir.

Kaynak ücretleri Dakota'yı satışa teşvik edecek kadar yüksek; girişimciyi vazgeçirmeyecek kadar az olmalıdır. Bu durumda da toplam satın alma maliyeti toplam kar kadar olur.

$$\begin{aligned} \text{min } w &= 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\ 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq 60 \quad (\text{Sıra kısıtı}) \\ 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 &\geq 30 \quad (\text{Masa kısıtı}) \\ y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 &\geq 20 \quad (\text{Sandalye kısıtı}) \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dakota örneği en iyi tablosundan ve Lindo sonuç raporundan Primal – Dual model ilişkisi inceleyiniz.

Dakota örneği - En iyi Tablo.

	Z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	ST	TD
R0	1	0	5	0	0	10	10	0	280	Z=280
R1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	s ₁ = 24
R2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	x ₃ = 8
R3	0	1	1,25	0	0	-0.5	1,5	0	2	x ₁ = 2
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	5	s ₄ = 5

Dakota örneği - Lindo Sonuç Raporu

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 280.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x ₁	2.000000	0.000000
x ₂	0.000000	5.000000
x ₃	8.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
TAHTA)	24.000000	0.000000
MONTAJ)	0.000000	10.000000
MARANGOZ)	0.000000	10.000000
TALEP)	5.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
x ₁	60.000000	20.000000	4.000000
x ₂	30.000000	5.000000	INFINITY
x ₃	20.000000	2.500000	5.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
TAHTA	48.000000	INFINITY	24.000000
MONTAJ	20.000000	4.000000	4.000000
MARANGOZ	8.000000	2.000000	1.333333
TALEP	5.000000	INFINITY	5.000000

5.3 DUALİTE VE DUYARLILIK

Dual teoremine göre; herhangi bir temel olurlu çözümün en iyi olabilmesi için ilgili dual çözümün dual olurlu olması gerekir. Bu sonuç yardımıyla aşağıdaki duyarlılık analizleri yapılabilir:

- Bir temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değiştirilmesi
- Temel dışı değişkenin sütununun değiştirilmesi
- Yeni bir faaliyet ilave edilmesi

Örnek 5.23.

Dakota örneğinde dual modelin en iyi çözümünü dikkate alarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

PRIMAL maks $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$ öyle ki; $8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$ (Tahta) $4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 20$ (Montaj) $2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \leq 8$ (Marangozluk) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	DUAL Min $w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$ öyle ki $8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$ (Sıra) $6y_1 + 2y_2 + 1,5y_3 \geq 30$ (Masa) $y_1 + 1,5y_2 + 0,5y_3 \geq 20$ (Sandalye) $y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Çözüm: $Z = 280, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8$ $s_1 = 24, s_2 = s_3 = 0,$	Çözüm: $w = 280, y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10,$ $e_1 = 0, e_2 = 5, e_3 = 0$

- Masanın fiyatı (x_2 'nin amaç fonksiyonu katsayısı) hangi aralıkta değişirse mevcut temel en iyi olarak kalır?

Yanıt

x_2 çözümde temel dışı değişkendir. Bu değişkenin indirgenmiş maliyeti mevcut çözümün değişmemesi için en fazla ne kadar arttırılabileceğini verir. x_2 değişkeni dual modeldeki 2. kısıtla ve e_2 ile ilgilidir. e_2 'nin çözümdeki değeri x_2 'nin indirgenmiş maliyetini verir. Öyleyse $c_2 \leq 30 + 5$ olduğu sürece mevcut çözüm en iyi olarak kalacaktır.

- Masanın fiyatı 43\$ olarak değiştirilir, kullandığı tahta 5, montaj işçiliği 2 ve marangozluk saati 2 olursa mevcut temel en iyi olarak kalır mı?

Yanıt

Burada değişiklikler masa ile ilgili x_2 değişkenin katsayılarında yapılmaktadır. Bu değişkenle ilgili dual modeldeki ikinci kısıtın yeni katsayıları göre olurlu olup olmadığı kontrol edilmelidir. Dual modeldeki 2. Kısıt:

$$5y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 43 \text{ (Masa)}$$

Bu kısıtta $y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10$ değerleri yerine konursa;

$$40 \not\geq 43$$

Öyleyse dual model olurlu değildir, primal model ise optimal değildir. Bu durumda masa üretilerek firmanın karı arttırılabilir.

- Dakota sehpa üretmeyi düşünmektedir. Fiyatı 15\$, – Birer birim marangozluk, montaj ve tahta kullanacaktır. Bu ürünü üretmek karlı mıdır?

Yanıt

Burada yeni bir kara değişkeni olarak x_4 modele eklenecektir. Dual modelde ise yeni bir kısıt olacaktır:

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 15$$

Bu kısıtta $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ değerleri yerine konursa;

$$20 \geq 15$$

Kısıtın sağlandığı görülür. Dual model olurludur, primal model de optimal olarak kalır. Yani yeni ürünü üretmek karı arttırmayacaktır.

5.4 TÜMLER GEVŞEKLİK TEOREMİ

Primal ve Dual çözümleri birbiriyle ilişkilendiren bir teoremdir. Bu teorem ile en iyi çözümde primal modeldeki kısıtlar ile dual modeldeki değişkenlerin ve primal modeldeki değişkenler ile dual modeldeki kısıtların ilişkileri ortaya konmaktadır.

Karar değişkenleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan m tane $\leq$ kısıtı ve bu kısıtlarla ilgili $s_1, s_2, \dots, s_m$ gevşek değişkenlerini içeren bir normal en büyükleme probleminin (PRIMAL) duali karar değişkenleri $y_1, y_2, \dots, y_m$; n tane $\geq$ kısıtı ve bu kısıtlarla ilgili $e_1, e_2, \dots, e_n$ fazlalık değişkenlerini içeren bir normal en küçükleme problemi (DUAL) olacaktır.

Bu problemler için $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ bir primal olurlu çözüm; $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ ise bir dual olurlu çözüm olsun. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ en iyi çözüm olabilmeleri için yalnız ve yalnız aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$s_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$e_j x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Diğer bir deyişle, en iyi çözümde, bir modeldeki değişken (y_i veya x_j) pozitif ise diğer modelde bu değişkenle ilişkili kısıt aktiftir (s_i veya $e_j = 0$). Bir modeldeki kısıt aktif değil ise (s_i veya $e_j > 0$) diğer modelde bu kısıtla ilişkili değişken (y_i veya x_j) 0 değerini alır.

Tümler gevşeklik teoreminden faydalanarak dual modelinin çözümünden primal modelin çözümüne veya primal modelin çözümünden dual modelin çözümüne ulaşılabilir. Bu özellik aşağıdaki örnek ile gösterilmiştir.

Örnek 5.24.

Aşağıdaki verilen DP modelini göz önüne alınız.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{Öyle ki;} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 60 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geq 120 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 150 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu DP modelinin en iyi çözümü $Z=90$, $x_1=0$, $x_2=15$, $x_3=15$ olarak verilsin. Buna göre dual modelin çözümünü, primal model için gölge fiyatları ve indirgenmiş maliyetleri bulunuz.

Yanıt

Primal modelin standart biçimi:

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{Öyle ki;} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 60 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - e_2 &= 120 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + s_3 &= 150 \\ \text{tüm değişkenler} &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual modelin standart biçimi:

$$\begin{aligned} \text{Maks } w &= 60 y_1 + 120 y_2 + 150 y_3 \\ \text{Öyle ki;} \quad 2 y_1 + 3 y_2 + y_3 + d_1 &= 3 \\ y_1 + 3 y_2 + y_3 + d_2 &= 2 \\ 3 y_1 + 5 y_2 - 3 y_3 + d_3 &= 4 \\ y_1 \text{ ur, } y_2 \geq 0, y_3 \leq 0, d_1, d_2, d_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Dual modeldeki y_1, y_2, y_3 primal modelin gölge fiyatlarını; d_1, d_2, d_3 ise primal modelin indirgenmiş maliyetlerini verecektir.

Tümler gevşeklik teoremine göre en iyi çözümde aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned} x_1 * d_1 &= 0; \quad x_2 * d_2 = 0; \quad x_3 * d_3 = 0 \\ y_2 * e_2 &= 0; \quad y_3 * s_3 = 0 \end{aligned}$$

$z=90$, $x_1=0$, $x_2=15$, $x_3=15$ olduğuna göre $e_2=0$ ve $s_3=180$ 'dir.

Koşulların sağlanması için $d_2=0$, $d_3=0$; $y_3=0$ olmalıdır. Bunlar dual modelde yerine konduğunda üç bilinmeyenli üç denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} 2 y_1 + 3 y_2 + d_1 &= 3 \\ y_1 + 3 y_2 &= 2 \\ 3 y_1 + 5 y_2 &= 4 \end{aligned}$$

Buradan $y_1=1/2$; $y_2=1/2$; $d_1=1/2$ olarak hesaplanır.

Rapor: Dual DP modelinin çözümü: $w=0$; $y_1=1/2$; $y_2=1/2$; $y_3=0$; $d_1=1/2$; $d_2=0$; $d_3=0$. Buna göre primal model için; birinci ve ikinci kısıtların gölge fiyatları $-1/2$; üçüncü kısıtın gölge fiyatı 0 'dır. İkinci ve üçüncü karar değişkenlerinin indirgenmiş maliyetleri 0 'dır. Birinci karar değişkeninin indirgenmiş maliyeti $1/2$ 'ye eşittir.

5.5 DUAL SİMPLEKS YÖNTEMİ

Dual simpleks yöntemi üç farklı amaçla kullanılabilir:

- DP'ye bir kısıt eklenmesi durumunda yeni en iyi çözümü bulma,
- DP'deki kısıtlardan birinin sağ taraf değerinin değiştirilmesi durumunda yeni en iyi çözümü bulma,
- Başlangıçta optimallik koşullarını sağlayan problemlerin çözümü.

Dikkat! Dual simpleks yönteminin uygulanabilmesi için 0. satırın en iyilik (optimallik) koşullarını sağlaması gerekir!

5.5.1 Dual simpleks adımları

1. En negatif ST seçilir (Çözümünden çıkacak temel değişken belirlenir)
2. Bu pivot satırın temel değişkeni çözümünden çıkar,
3. Pivot satırdaki negatif katsayılı değişkenler için oranlar hesaplanır (|sıfırıncı satırdaki katsayı / pivot satırdaki katsayı|),
4. Mutlak değerce en küçük oranlı değişken çözüme girer.

Dikkat! Pivot satırdaki her değişken negatif olmayan katsayılara sahipse, DP'nin olurlu çözümü yoktur.

Örnek 5.25.

Aşağıda Simpleks tablosunda verilen maksimizasyon problemini Dual Simpleks ile çözünüz.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST	TD
R0	1	0	0	2	5	0	40	Z
R1	0	0	1	3	1	0	6	x_2
R2	0	1	0	-1	0	0	-1	x_1
R3	0	0	0	-1	-2	1	-2	s_3

Oran			$ 2/-1 =2$	$ 5/-2 =2,5$				
------	--	--	------------	--------------	--	--	--	--

Yanıt

Problemde R0'da negatif değer yoktur, optimallik koşulları sağlanmaktadır. ST değerlerinde ise negatif değerler var, çözüm olurlu değildir. Dual Simpleks ile çözüm bulunabilir.

s_3 en küçük negatif ST değerine sahip olduğu için çözümden çıkar. R3 pivot satır olur.

Pivot satırdaki negatif katsayılı değişkenler için oran testi yapılır. En küçük orana sahip olan s_1 çözüme girer. s_1 'i R3 satırında temel değişken yapmak için ERO'lar uygulanır:

$$R3' = R3/(-1), \quad R0' = R0 - 2R3', \quad R1' = R1 - 3R3', \quad R2' = R2 + R3'$$

İlk tablo:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST	TD
R0	1	0	0	0	1	2	36	Z
R1	0	0	1	0	-5	3	0	x_2
R2	0	1	0	0	2	-1	1	x_1
R3	0	0	0	1	2	-1	2	s_1

ST değerlerinin tümü 0 veya pozitif olduğu için (ST'de negatif değer yok) en iyi çözüme ulaşılmıştır.

En iyi çözüm: $z = 36$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 0$.

5.5.2 Yeni Bir Kısıt Ekleme

En iyi çözümü bulunmuş bir problemde yeni bir kısıt eklenirse; öncelikle mevcut çözümün kısıtı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Eğer mevcut çözüm kısıtı sağlıyor ise çözüm en iyi olarak kalır (neden?). Eğer sağlamıyor ise mevcut çözüm olurlu değildir ve yeni bir çözüm bulmak için dual simpleks kullanılmalıdır.

Dual simpleks uygulamak için kısıt standart biçime dönüştürülerek tabloya eklenir. Yeni eklenen kısıtın satırında temel değişkenlerin katsayılarını 0 yapacak ve kısıtla ilgili gevşek değişkeni temel değişken yapacak elementer satır işlemleri yapılır. Dual simpleks ile yeni çözüm bulunur.

Örnek 5.26.

Dakota örneğinde pazarlama faaliyetleri için en az 1 masa üretmek zorunlu olursa yeni çözümü bulunuz.

Yanıt

$x_2 \geq 1$ eklenir.

Mevcut en iyi çözüm ($z = 280$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$) yeni kısıtı sağlamadığı için artık olurlu değildir. Yeni en iyi çözümü bulmak için en iyi tabloya yeni bir satır eklenir:

$$x_2 - e_5 = 1$$

e_5 'i TD olarak kullanabilmek için bu denklemi -1 ile çarpılır:

$$-x_2 + e_5 = -1$$

Yeni tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
R0	1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	Z
R1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1
R2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3
R3	0	1	1,25	0	0	-0.5	1,5	0	0	2	x_1
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
R5	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-1	e_5

R5 satırında temel değişkenlerin (s_1 , x_3 , x_1 , s_4) katsayıları 0'a eşit olduğu için satır işlemi yapmaya gerek yoktur.

Çözüm için dual simpleks uygulanırsa;

e_5 çözümden çıkar ve x_2 çözüme girer.

Gerekli ERO'lar uygulanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
R0	1	0	0	0	0	10	10	0	5	275	Z
R1	0	0	0	0	1	2	-8	0	-2	26	s_1
R2	0	0	0	1	0	2	-4	0	-2	10	x_3
R3	0	1	0	0	0	-0.5	1,5	0	1,25	0,75	x_1
R4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	s_4
R5	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	x_2

STD'de negatif değer olmadığı için en iyi çözüme ulaşılmıştır.

En iyi çözümde; $z = 275$, $s_1 = 26$, $x_3 = 10$, $x_1 = 0,75$, $s_4 = 4$, $x_2 = 1$

Örnek 5.27.

Dakota örneğine $x_1 + x_2 \geq 12$ kısıtının eklendiğini varsayarak yeni çözümü bulunuz.

Yanıt

Mevcut en iyi çözüm ($z = 280$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$) yeni kısıtı sağlamadığı için artık olurlu değildir.

Yeni en iyi çözümü bulmak için en iyi tabloya yeni bir satır eklenir:

$$x_1 + x_2 - e_5 = 12$$

e_5 'i TD olarak kullanabilmek için bu denklemi -1 ile çarpılır:

$$-x_1 - x_2 + e_5 = -12$$

Ara tablo:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
R0	1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	Z
R1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1
R2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3
R3	0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	0	2	x_1
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
R5	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	-12	e_5

Dikkat! Bu tabloda temel değişken olan x_1 'in yeni eklenen satırdaki katsayısı 0 değildir.

x_1 'i TD olarak kullanabilmek için satır işlemi yapılır ($R5' = R5 + R3$):

Başlangıç tablosu:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
R0	1	0	5	0	0	10	10	0	0	280	Z
R1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	0	24	s_1
R2	0	0	-2	1	0	2	-4	0	0	8	x_3
R3	0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	0	2	x_1
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
R5	0	0	0,25	0	0	-0,5	1,5	0	1	-10	e_5

STD'de negatif değer olduğu için dual simpleks uygulanır.

e_5 çözümünden çıkar ve s_2 çözüme girer.

Gerekli ERO'lar uygulanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
R0	1	0	10	0	0	0	40	0	20	80	Z
R1	0	0	-1	0	1	0	-2	0	4	-16	s_1
R2	0	0	-1	1	0	0	2	0	4	-32	x_3
R3	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	12	x_1
R4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	5	s_4
R5	0	0	-0,5	0	0	1	-3	0	-2	20	s_2

STD'de negatif değerler olduğu için devam edilir.

x_3 çözümden çıkar ve x_2 çözüme girer.

Gerekli ERO'lar uygulanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	e_5	ST	TD
R0	1	0	0	10	0	0	60	0	60	-240	Z
R1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	0	16	s_1
R2	0	0	1	-1	0	0	-2	0	-4	32	x_2
R3	0	1	0	1	0	0	2	0	3	-20	x_1
R4	0	0	0	1	0	0	2	1	4	-27	s_4
R5	0	0	0	-0,5	0	1	-4	0	-4	36	s_2

STD'de negatif değerler olduğu için devam edilir.

En küçük STD R4'tedir. Fakat bu satırda oran testi yapmak üzere negatif katsayılı değer yoktur. Bu durumda DP'nin olurlu çözüm yoktur.

KURAL: Dual Simpleks STD'de negatif değer varken, seçilen pivot satırda değişkenlerin sütunlarında negatif katsayı yoksa verilen model olurlu değildir.

5.5.3 Başlangıçta optimallik koşullarını sağlayan problemlerin çözümü

Başlangıçta optimallik (en iyilik) koşullarını sağlayan problemlerin çözümünde dual simpleks kullanılabilir:

Min probleminde tüm amaç fonksiyonu katsayıları pozitif veya sıfır olmalıdır,

Maks probleminde tüm amaç fonksiyonu katsayıları negatif veya sıfır olmalıdır.

Örnek 5.28.

Aşağıdaki DP'yi çözünüz:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{öyle ki } x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Yanıt

Bu en küçükleme probleminde amaç fonksiyonu katsayıları pozitifdir. Simpleks tablosu oluşturulduğunda R0'daki tüm katsayılar 0 veya negatiftir. Bu yüzden problem başlangıçta optimallik koşullarını sağlamaktadır. Dual Simpleks aşağıdaki gibi uygulanabilir.

Problem standart biçime dönüştürülür:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{öyle ki } x_1 - 2x_2 + x_3 - e_1 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - e_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + s_3 &= 5 \\ \text{tüm değişkenler} &\geq 0 \end{aligned}$$

Birinci ikinci kısıtlarda e_1 ve e_2 gevşek değişkenlerini temel değişken yapabilmek için bu kısıtlar -1 ile çarpılır. Üçüncü kısıtta s_3 gevşek değişkeni temel değişken olabilir, ek bir işleme gerek yoktur.

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{öyle ki } -x_1 + 2x_2 - x_3 + e_1 &= -4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + e_2 &= -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + s_3 &= 5 \\ \text{tüm değişkenler} &\geq 0 \end{aligned}$$

Amaç fonksiyonunda değişkenler sağ tarafa geçirilerek aşağıdaki başlangıç tablosu oluşturulur:

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	s_3	ST	TD
R0	1	-1	-2	0	0	0	0	0	Z
R1	0	-1	2	-1	1	0	0	-4	e_1
R2	0	-2	-1	1	0	1	0	-6	e_2
R3	0	1	1	1	0	0	1	5	s_3

Oran	1/2	2	-						
------	-----	---	---	--	--	--	--	--	--

ST'ta negatif değerler var, en yükseği seçilir.

R2 pivot satır olacaktır. e_2 çözümünden çıkar.

R2'de negatif katsayısı olan x_1 ve x_2 sütunlarında oran testi yapılır, en küçük orana sahip olan x_1 çözüme girer. Gerekli ERO'lar uygulanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

ERO'lar: $R_2' = R_2 / (-2)$, $R_0' = R_0 + R_2'$, $R_1' = R_1 + R_2'$, $R_3' = R_3 - R_2'$

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	s_3	ST	TD
R0	1	0	-1,5	-0,5	0	-0,5	0	3	Z
R1	0	0	2,5	-1,5	1	-0,5	0	-1	e_1
R2	0	1	0,5	-0,5	0	-0,5	0	3	x_1
R3	0	0	0,5	1,5	0	0,5	1	2	s_3

Oran		-	1/3		1				
------	--	---	-----	--	---	--	--	--	--

ST'ta tek bir negatif değer var. R1 pivot satır olacaktır. e_1 çözümünden çıkar.

R1'de negatif katsayısı olan x_3 ve e_2 sütunlarında oran testi yapılır, en küçük orana sahip olan x_3 çözüme girer. Gerekli ERO'lar uygulanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

ERO'lar: $R_1' = R_1 / (-1,5)$, $R_0' = R_0 + 0,5R_1'$, $R_2' = R_2 + 0,5R_1'$, $R_3' = R_3 - 1,5R_1'$

	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	s_3	ST	TD
R0	1	0	-2,33	0	-0,33	-0,33	0	3,33	Z
R1	0	0	-1,67	1	-0,67	0,33	0	0,67	x_3
R2	0	1	-0,33	0	-0,33	-0,33	0	3,33	x_1
R3	0	0	3	0	1	0	1	1	s_3

ST'de negatif değer yoktur. Optimal çözüme ulaşılmıştır.

En iyi çözüm: $z = 3,33$; $x_1 = 3,33$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,67$

Dual Simpleks, bir DP probleminde sağ taraf değeri değiştiğinde mevcut temel çözümün olurlu olmadığı durumlarda yeni çözüm bulmak için de kullanılabilir.

Bu konu 6.2. bölümde duyarlılık analizinde incelenecektir.

6. DÜZELTİLMİŞ SİMPLEKS VE DUYARLILIK ANALİZİ

6.1 DÜZELTİLMİŞ SİMPLEKS YÖNTEMİ

Klasik simpleks yöntemi bilgisayarlar için en etkin yöntem değildir. Çünkü mevcut adımda veya sonraki adımlarda gerekli olmayan veriler hesaplanır ve depolanır. Düzeltilmiş simpleks, Simpleks yöntemi adımlarının daha az hesaplama ile uygulanmasını sağlayan sistematik bir prosedürdür. Özellikle bilgisayar programlarının daha az veri saklamasını sağlar.

Simpleks yöntemde her bir iterasyonda gerekli olan bilgiler şunlardır:

- Temel olmayan değişkenlerin Satır 0 (R0)'daki katsayıları,
- Çözüme girecek değişkenin diğer denklemlerdeki katsayıları,
- Sağ taraf değerleri.

Simpleks yönteminde tüm tablodaki değerler hesaplanırken düzeltilmiş simpleks yönteminde sadece yukarıda verilen bilgiler hesaplanarak etkin bir algoritma oluşturulur.

6.1.1 Simpleks yönteminin matris biçiminde gösterimi

Değişken sayısı= n , kısıt sayısı= m olmak üzere,

Maks $Z = \mathbf{c} \mathbf{x}$

Öyle ki; $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$.

Burada $\mathbf{x}$ karar değişkenleri vektörü, $\mathbf{c}$ amaç fonksiyonu katsayıları vektörü, $\mathbf{A}$ teknoloji katsayıları matrisi, $\mathbf{b}$ sağ taraf değerleridir.

Örneğin aşağıda verilen Dakota Mobilya DP'si için;

$$\text{maks } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\text{öyle ki } 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + .5x_3 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [60, 30, 20], \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Notasyon tablosu

c	$1 \times n$ satır vektörü, amaç fonksiyonu katsayıları
x	$n \times 1$ sütun vektörü, karar değişkenleri
A	$m \times n$ matrisi; teknoloji katsayıları
b	sağ taraf değerleri vektörü
BV	temel değişkenler kümesi (BV'nin ilk elemanı ilk kısıttaki temel değişken, BV'nin ikinci elemanı ikinci kısıttaki temel değişken,,
BV_j	j 'inci kısıttaki temel değişken
NBV	temel olmayan değişkenlerin kümesi
a_j	orijinal problemde kısıtların x_j sütunu
B	$m \times m$ matrisi; j 'inci sütunu orijinal kısıtlarda BV _j için olan sütunlardan oluşur
N	$m \times (n - m)$ matrisi; sütunları orijinal kısıtlarda temel olmayan değişkenler için olan sütunlardan oluşur
c_j	amaç fonksiyonunda x_j nin katsayıları
c_B	$1 \times m$ satır vektörü; j 'inci elemanı BV _j 'nin amaç fonksiyonu katsayısı
c_N	$1 \times (n-m)$ satır vektörü; j 'inci elemanı NBV'nin j 'inci elemanına karşılık gelen amaç fonksiyonu katsayısı
x_B	$m \times 1$ sütun vektörü, temel değişkenler
x_N	$n-m \times 1$ sütun vektörü, temel dışı değişkenler

Simpleks yöntemde herhangi bir temel olurlu çözüm içerdiği temel değişkenler ile ifade edilebilir. Bunun için BV temel değişkenler kümesinin tanımlanması gerekir. Herhangi bir BV için **A**, **x** ve **c** temel ve temel dışı değişkenlere karşı gelen sütunlara göre iki kısma ayrılırsa;

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N]$$

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N]$$

elde edilir. Bunlara göre ilgilenilen DP aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\text{Maks } Z = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N$$

$$\text{Öyle ki; } \mathbf{B} \mathbf{x}_B + \mathbf{N} \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq 0$$

buradaki sembollerin tanımları notasyon tablosunda verilmiştir.

Bu modelde **B** matrisi doğrusal bağımsız vektörlerden oluştuğu için tersi alınabilir.

Temel değişkenlerin ilgili temel olurlu çözümdeki değerlerini bulabilmek için kısıtların her iki tarafı **B**⁻¹ ile çarpılır:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Burada $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ temel dışı değişkenlerin simpleks tablosundaki katsayılarını, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ise sağ taraf değerlerini verir.

Simpleks tablosundaki sıfıncı satırı bulabilmek için $Z = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N$ denkleminde $\mathbf{x}_B$ yerine $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$ yazılırsa;

$$Z = \mathbf{c}_B(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N$$

$$Z + (\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Burada $(\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N)$ temel dışı değişkenlerin sıfıncı satırdaki katsayıları, $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ise sıfıncı satırın sağ taraf değeridir. Bir temel dışı değişkenin sıfıncı satırdaki katsayısı indirgenmiş maliyet olarak adlandırılır ve $z_j - c_j = \mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ şeklinde ifade edilebilir.

Verilen formülere göre herhangi bir temel olurlu çözümdeki BV için simpleks tablosu aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

	Z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	ST
Z	1	0	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ Satır 0 (R_0)
$\mathbf{x}_B$	0	I	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ Satır 1 – m (R_1-R_m)

Bu tablo üzerinden en iyilik koşulu (maks problemi için) $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N \geq 0$ 'dır. Eğer herhangi bir j temel dışı değişkeni için $z_j - c_j = \mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j < 0$ ise mevcut tablo en iyi değildir. Hangi temel dışı değişkenin temel; hangi temel değişkenin temel dışı olacağına karar verilerek sonraki iterasyona geçilir.

Yukarıda verilen tabloda çözüme girmeyecek olan temel dışı değişkenler için hesaplanan $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ değerleri simpleks yöntemde kullanılmaz. Kullanılmayacak verilerin hesaplanması ve depolanması büyük problemlerde etkinliği düşürmektedir. Bu yüzden aşağıda adımları verilen düzeltilmiş simpleks yöntemi geliştirilmiştir.

6.1.2 Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Adımları

(Maks problemi için)

Adım 0: $\mathbf{B}^{-1}$ in okunacağı sütunların belirlenmesi. Başlangıçta, $\mathbf{B}^{-1} = I$.

Adım 1: Mevcut tablo için $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ hesaplanır, ($\mathbf{w}$ simpleks çarpanı veya dual/ gölge fiyat olarak adlandırılır)

Adım 2: Tüm temel olmayan değişkenler için R0'daki katsayıları ($z_j - c_j = c_{BV}B^{-1}a_j - c_j = wa_j - c_j$) hesaplanır.

- Tüm katsayılar negatif olmayan değerler almış ise, mevcut çözüm en iyidir.
- Mevcut çözüm en iyi değil ise en negatif katsayılı değişken çözüme girecek değişken olarak belirlenir. Bu değişkene x_k denir.

Adım 3: x_k 'nın hangi satırdan temel değişken olarak gireceğini belirlemek için,

- x_k 'nin mevcut tablodaki sütunu hesaplanır ($y_j = B^{-1}a_j$)
- Mevcut tablonun sağ taraf değeri hesaplanır ($\bar{b} = B^{-1}b$)
- Oran testi ile hangi değişkenin temel dışı olacağı belirlenir.
- Yeni BV kümesi bulunmuş olur.

Adım 4: Mevcut tablodaki x_k 'nın temele girmesi için gerekli ERO'lar belirlenir. Bu ERO'lar mevcut B^{-1} 'e uygulanırsa yeni B^{-1} elde edilir. Adım 1'e dönlür.

Düzeltilmiş Simplekste kullanılan formüller

Formül	Açıklama
$y_j = B^{-1}a_j$	BV tablosundaki x_j sütunu
$w = c_B B^{-1}$	Simpleks çarpanları – gölge fiyat
$z_j - c_j = c_B B^{-1}a_j - c_j = wa_j - c_j$	x_j nin R0'daki katsayıları – indirgenmiş maliyet
$\bar{b} = B^{-1}b$	BV tablosundaki kısıt sağ taraf değerleri – temel değişken değerleri
$Z = c_B B^{-1}b = c_B \bar{b} = wb$	BV tablosunda R0'daki sağ taraf değeri - Amaç fonksiyonu değeri

Örnek 6.1. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

$$\text{Maks } Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6$$

$$\text{Öyle ki; } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 6$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 4$$

$$\text{Tüm değişkenler } \geq 0$$

Yanıt

Öncelikle problem standart biçime dönüştürülür:

$$\text{Maks } Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6$$

$$\text{Öyle ki; } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + s_1 = 6$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + s_2 = 4$$

$$x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + s_3 = 4$$

$$\text{Tüm değişkenler } \geq 0$$

Başlangıçta gevşek değişkenler temel değişkendir. $BV = \{s_1, s_2, s_3\}$

$$\text{Adım 0: } \mathbf{B} = [a_7, a_8, a_9] = \mathbf{I}, \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. İterasyon

$$\text{Adım 1: } BV = \{s_1, s_2, s_3\}, \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}, \mathbf{c}_B = [0, 0, 0]$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}; \mathbf{w} = [0, 0, 0] \mathbf{I} = [0, 0, 0]$$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j)$ hesaplanır.

$$z_1 - c_1 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1; \quad z_2 - c_2 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 = -2$$

$$z_3 - c_3 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = 1; \quad z_4 - c_4 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = -1$$

$$z_5 - c_5 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 4 = -4; \quad z_6 - c_6 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = 2$$

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişkenler var, bu yüzden çözüm en iyi değildir. En negatif indirgenmiş maliyet değerine sahip olan x_5 çözüme girer.

Adım 3: çıkan değişkenin belirlenmesi;

$$x_5 \text{ in mevcut tablodaki sütunu: } \mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_5 = \mathbf{I} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{Mevcut tablonun sağ taraf değeri: } \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Oran testi: } \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 6 \\ - \\ 2 * \end{matrix} \quad s_3 \text{ çözümden çıkar}$$

$$\text{Yeni BV} = \{s_1, s_2, x_5\}$$

Adım 4: Yeni BV için $\mathbf{B}^{-1}$ hesaplanır. $\mathbf{y}_5$ 'i $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ haline getirmek için gerekli ERO'lar B'ye

$$\text{uygulanır. } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ için } R_3' = R_3 / 2; R_1' = R_1 - R_3'; R_2' = R_2.$$

$$\text{Bu işlemler } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 'e uygulanırsa yeni } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

2. İterasyon

$$\text{Adım 1: } BV = \{s_1, s_2, x_5\}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B = [0, 0, 4]$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}; \mathbf{w} = [0, 0, 4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [0, 0, 2]$$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j)$ hesaplanır.

$$z_1 - c_1 = [0, 0, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1; \quad z_2 - c_2 = [0, 0, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 = -2$$

$$z_3 - c_3 = [0, 0, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = 3; \quad z_4 - c_4 = [0, 0, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = 1$$

$$z_6 - c_6 = [0, 0, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = 4; \quad z_9 - c_9 = [0, 0, 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 2;$$

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişkenler var, bu yüzden çözüm en iyi değildir. En negatif indirgenmiş maliyet değerine sahip olan x_2 çözüme girer.

Adım 3: Çıkan değişkenin belirlenmesi;

$$x_2 \text{ nin mevcut tablodaki sütunu: } \mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{Mevcut tablonun sağ taraf değeri: } \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Oran testi: } \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 4 * \\ - \\ - \end{matrix} \quad s_1 \text{ çözümden çıkar}$$

$$\text{Yeni BV} = \{x_2, s_2, x_5\}$$

Adım 4: Yeni BV için $\mathbf{B}^{-1}$ hesaplanır. $\mathbf{y}_2$ 'yi $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ haline getirmek için gerekli ERO'lar B'ye

$$\text{uygulanır. } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ için } R_1' = R_1; R_2' = R_2 + R_1'; R_3' = R_3.$$

$$\text{Bu işlemler } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{'e uygulanırsa yeni } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ olarak}$$

bulunur.

3. İterasyon

$$\text{Adım 1: } BV = \{x_2, s_2, x_5\}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B = [2, 0, 4],$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}; \mathbf{w} = [2, 0, 4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [2, 0, 1]$$

Adım 2: $(z_j - c_j = \mathbf{c}_{BV} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - c_j)$ hesaplanır.

$$z_1 - c_1 = [2, 0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = 1; \quad z_3 - c_3 = [2, 0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = 4;$$

$$z_4 - c_4 = [2, 0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = 2; \quad z_6 - c_6 = [2, 0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = 5;$$

$$z_7 - c_7 = [2, 0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2; \quad z_9 - c_9 = [2, 0, 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1;$$

İndirgenmiş maliyeti negatif olan değişken yok, bu yüzden çözüm en iyidir.

Temel değişkenlerin değeri $x_B = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ formülü ile hesaplanırsa;

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur. Temel dışı değişkenlerin değeri 0'dır.}$$

Amaç fonksiyon değeri $Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_{BV} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{w} \bar{\mathbf{b}}$ formülüne göre;

$$Z = \mathbf{w} \bar{\mathbf{b}} = [2, 0, 1] \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 16 \text{ olur.}$$

6.1.3 Düzeltilmiş Simpleks Yöntemi Tablo Gösterimi

Düzeltilmiş simpleks yöntemi ile elle çözmek için tablo gösteriminden faydalanılabilir.

Bunun için tabloda simpleks yönteminden farklı olarak sağ taraf değerleri, simpleks çarpanları $\mathbf{w}$ ve temel matrisin tersi değerleri saklanır. Gerekli olduğunda çözüme girecek değişkenin katsayıları tabloya ek olarak ilave edilir.

Başlatma adımı

$\mathbf{B}^{-1}$ ile bir temel olurlu çözüm bul. $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ hesaplayarak aşağıdaki düzeltilmiş simpleks tablosunu oluştur:

Temel tersi	ST
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$

Ana adım

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{w} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla.

$z_k - c_k = \min_{j \in J} \{z_j - c_j\}$ belirle. Eğer $z_k - c_k \geq 0$ ise dur! Mevcut çözüm en iyi çözümdür.

Değil ise $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k$ hesapla. Eğer $\mathbf{y}_k \leq 0$ ise en iyi çözüm sınırsızdır. Eğer $\mathbf{y}_k \not\leq 0$ ise $\left[\frac{z_k - c_k}{y_k} \right]$ sütununu tablonun sağına ekle.

Temel tersi	ST	x_k
$\mathbf{w}$	$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$	$z_k - c_k$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\bar{\mathbf{b}}$	$\mathbf{y}_k$

r indisini standart oran testi ile belirle: $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$

y_{rk} 'ya göre pivot işlemler yaparak tabloyu güncelle, ana adımı tekrar et.

Örnek 6.2. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{Öyle ki;} \quad &8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\ &4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 20 \\ &2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \leq 8 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Yanıt

Öncelikle problem standart biçime dönüştürülür:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{Öyle ki;} \quad &8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48 \\ &4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + s_2 = 20 \\ &2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + s_3 = 8 \\ &\text{Tüm değişkenler} \geq 0 \end{aligned}$$

Başlatma adımı

Başlangıçta gevşek değişkenler temel değişkendir. $BV = \{s_1, s_2, s_3\}$,

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0, 0, 0] \mathbf{I} = [0, 0, 0]$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}} = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 0$$

Düzeltilmiş simpleks tablosunu oluştur:

	Temel Tersi			ST
Z	0	0	0	0
S ₁	1	0	0	48
S ₂	0	1	0	20
S ₃	0	0	1	8

Ana adım – 1. iterasyon

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla.

$$z_1 - c_1 = \mathbf{w}\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 60 = -60$$

$$z_2 - c_2 = \mathbf{w}\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - 30 = -30$$

$$z_3 - c_3 = \mathbf{w}\mathbf{a}_3 - \mathbf{c}_3 = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - 20 = -20$$

$\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k = \min_{j \in J} \{z_j - c_j\} = \min\{-60, -30, -20\} = -60 < 0$; mevcut temel olurlu çözüm en iyi değildir.

x_1 çözüme girer; $k = 1$. $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \mathbf{I} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} z_k - c_k \\ y_k \end{bmatrix}$ sütununu tablonun sağına ekle.

	Temel Tersi			ST	x_1	Oran
Z	0	0	0	0	-60	
S ₁	1	0	0	48	8	48/8 = 6
S ₂	0	1	0	20	4	20/4=5
S ₃	0	0	1	8	2	8/2=4**

Oran testi ile çıkan değişken s_3 olarak belirlenir. Yeni tabloyu elde etmek için

düzeltilmiş simpleks tablosuna eklenen sütuna göre pivot işlem yapılır $\begin{bmatrix} -60 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$R_3' = R_3 / 2; \quad R_2' = R_2 - 4R_3', \quad R_1' = R_1 - 8R_3', \quad R_0' = R_0 + 60R_3'$$

	Temel Tersi			ST
Z	0	0	30	240
S ₁	1	0	-4	16
S ₂	0	1	-2	4
x_1	0	0	0,5	4

Ana adım – 2. iterasyon

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla. $\mathbf{w}$ vektörünü düzeltilmiş simpleks tablosu R_0' 'dan al!

$$z_2 - c_2 = \mathbf{w}\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2 = [0, 0, 30] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - 30 = 15$$

$$z_3 - c_3 = \mathbf{w}\mathbf{a}_3 - \mathbf{c}_3 = [0, 0, 30] \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - 20 = -5$$

$$z_6 - c_6 = \mathbf{w}\mathbf{a}_6 - \mathbf{c}_6 = [0, 0, 30] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 30$$

$z_k - c_k = \min_{j \in J} \{z_j - c_j\} = \min\{15, -5, 30\} = -5 < 0$; mevcut çözüm en iyi değildir.

$$x_3 \text{ çözüme girecek; } k = 3. \mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{z_k - c_k}{y_k} \right] \text{ sütununu}$$

tablonun sağına ekle.

	Temel Tersi			ST			Oran
z	0	0	30	240		x_3	
s_1	1	0	-4	16		-5	
s_2	0	1	-2	4		-1	--
x_1	0	0	0,5	4		0,5	4/0,5=8**
						0,25	4/0,25=16

Oran testi ile çıkan değişken s_2 olarak belirlenir. Yeni tabloyu elde etmek için

düzeltilmiş simpleks tablosuna eklenen sütuna göre pivot işlem yapılır $\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$R_2' = R_2 / 0,5; \quad R_1' = R_1 + R_2', \quad R_3' = R_3 - 0,25 R_2', \quad R_0' = R_0 + 5R_2'$$

	Temel Tersi			ST
z	0	10	10	280
s_1	1	2	-8	24
x_3	0	2	-4	8
x_1	0	-0,5	1,5	2

Ana adım – 3. iterasyon

Her temel dışı değişken için $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ hesapla. $\mathbf{w}$ vektörünü düzeltilmiş simpleks tablosu R_0' 'dan al!

$$z_2 - c_2 = \mathbf{w}\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - 30 = 5$$

$$z_5 - c_5 = \mathbf{w}\mathbf{a}_5 - \mathbf{c}_5 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

$$z_6 - c_6 = \mathbf{w}\mathbf{a}_6 - \mathbf{c}_6 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

$$z_k - c_k = \min_{j \in J} \{z_j - c_j\} = \min\{5, 10, 10\} = 5 \geq 0 ; \text{ mevcut temel olurlu çözüm en iyidir.}$$

Değişkenlerin çözümdeki değerleri tablodan görülebilir:

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8, z = 280.$$

Örnek 6.3. Aşağıdaki DP'yi düzeltilmiş simpleks ile çözünüz.

$$\text{Maks } Z = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6$$

Öyle ki;

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 9$$

$$x_3 + x_5 + x_6 = 3$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6.$$

Dikkat! Bu DP'de başlangıç temel olurlu çözüm bulabilmek için Büyük M yöntemi kullanılır.

Yanıt

Öncelikle problem Büyük M ile çözülebilecek hale getirilecektir. Bunun için problem standart biçime dönüştürülür:

$$\text{Maks } Z = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6$$

Öyle ki;

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 - e_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + s_2 = 9$$

$$x_3 + x_5 + x_6 = 3$$

$$\text{tüm değişkenler} \geq 0$$

$\geq$ ve $=$ kısıtlarına ve amaç fonksiyonuna yapay değişkenler ilave edilir:

$$\text{Maks } Z = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 - Ma_1 - Ma_3$$

Öyle ki;

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 - e_1 + a_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + s_2 = 9$$

$$x_3 + x_5 + x_6 + a_3 = 3$$

$$\text{tüm değişkenler} \geq 0$$

Başlangıçta $BV = \{a_1, s_2, a_3\}$ temel çözüm olacaktır. Başlangıç tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

	Temel Tersi			ST
	-M	0	-M	-9M
a_1	1	0	0	6
s_2	0	1	0	9
a_3	0	0	1	3

Bu tablodan başlayarak en iyi çözümü buluncaya kadar düzeltilmiş simpleks uygulanır.

Örnek 6.4. Aşağıdaki DP için $BV = \{x_1, x_2, x_3\}$ çözümünün temel olurlu çözüm olduğunu gösteriniz. Bu çözümden başlayarak en iyi çözümü bulunuz.

$$\text{Maks } x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6$$

Öyle ki;

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 9$$

$$x_3 + x_5 + x_6 = 3$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,\dots,6.$$

Dikkat! Bu DP'yi çözmek için $BV = \{x_1, x_2, x_3\}$ ile ilgili **B** matrisinin belirlenmesi ve B^{-1} matrisinin hesaplanması gerekmektedir.

Yanıt

Öncelikle problem standart biçime dönüştürülür.

$$\text{Maks } Z = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6$$

Öyle ki;

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 - e_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + s_2 = 9$$

$$x_3 + x_5 + x_6 = 3$$

tüm değişkenler ≥ 0

Verilmiş bir temel çözümden başlanacağı için yapay değişken ilave etmeye gerek yoktur.

Düzeltilmiş simpleks tablosu oluşturmak için, B^{-1} , w , Z ve $\bar{b}$ hesaplanmalıdır.

Verilen temel çözüm ($BV = \{x_1, x_2, x_3\}$)'e göre **B** matrisi temel değişkenlerinin problemdeki sütunlarına göre belirlenir:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Buna göre matris tersi alınarak B^{-1} , hesaplanır (Bir matrisin tersi nasıl alınır, öğreniniz!!)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$w = c_B B^{-1}$ formülüne göre hesaplanır:

$$w = c_B B^{-1} = [1 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-3 \quad 2 \quad -2]$$

$\bar{b} = B^{-1}b$ formülüne göre hesaplanır:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ formülüne göre hesaplanır:

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = [1 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = -6$$

Elde edilen değerlere göre düzeltilmiş simpleks tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur:

	Temel Tersi			ST
	-3	2	-2	-6
x_1	-1	1	-1	0
x_2	2	-1	0	3
x_3	0	0	1	3

Tablodan görülebileceği gibi $\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} > 0$ olduğu için bu temel çözüm olurludur.

Bu tablodan başlayarak düzeltilmiş simpleks ile problem çözülebilir.

6.2 SİMPLEKS KULLANARAK DUYARLILIK

Simpleks kullanarak yapılabilecek duyarlılık analizleri Dakota mobilya örneğinde incelenecektir. Dakota mobilya probleminde x_1, x_2, x_3 sırasıyla üretilen sıra, masa ve sandalye miktarı olarak tanımlanmıştır.

Karı enbüyüklemek için kurulan DP:

$$\begin{aligned} \text{maks } z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 &= 48 \quad \text{Tahta} \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 &= 20 \quad \text{Montaj} \\ 2x_1 + 1.5x_2 + .5x_3 + s_3 &= 8 \quad \text{Marangozluk} \end{aligned}$$

Bu problemin en iyi çözümü (Simpleks tablosu):

$$\begin{aligned} z &+5x_2 +10s_2 +10s_3 = 280 \\ &-2x_2 +s_1 +2s_2 -8s_3 = 24 \\ &-2x_2 +x_3 +2s_2 -4s_3 = 8 \\ &+x_1 +1.25x_2 -.5s_2 +1.5s_3 = 2 \end{aligned}$$

En iyi çözümde BV: $\{s_1, x_3, x_1\}$, NBV: $\{x_2, s_2, s_3\}$, $\mathbf{w} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0, 10, 10]$ ve

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Düzeltilmiş simpleks tablosu:

	Temel Tersi			ST
z	0	10	10	280
S ₁	1	2	-8	24
X ₃	0	2	-4	8
X ₁	0	-0,5	1,5	2

6.2.1 Analiz 1: Temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi

x_j temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı c'_j olursa; bu değişkenin en iyi tablodaki indirgenmiş maliyeti $[z_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c'_j]$ kontrol edilir.

Eğer $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır ve mevcut çözüm değişmez.

Eğer $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

x_j temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı için mevcut temel çözümün en iyi kalacağı aralığı bulunmak için; $c'_j = c_j + \delta$ kabul edilerek δ 'nın $z_j - c_j \geq 0$ (Maks problemi için) eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 6.5. Dakota Mobilya problemi için x_2 'nin amaç fonksiyonu katsayısı hangi aralıklarda değişirse mevcut temel çözüm en iyi kalır?

Yanıt

$$c'_2 = 30 + \delta \Rightarrow z_2 - c_2 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - (30 + \delta) \geq 0$$

$$5 - \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 5$$

veya $c'_2 \leq 35$ iken mevcut temel değişmez.

Örnek 6.6. Dakota Mobilya probleminde masanın satış fiyatı 40 birim olursa yeni çözüm ne olur?

Yanıt

Masanın satış fiyatı x_2 'nin amaç fonksiyonu katsayısıdır. 40 olursa Örnek 1'den

görülebileceği gibi mevcut temel en iyi değildir. $z_2 - c_2 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - (40) = -5$

olarak hesaplanır ve x_2 çözüme girer. Oran testi ile x_1 'in çözümden çıkacağı belirlenir ve simpleks ile yeni çözüm bulunur (lütfen kendiniz bulunuz).

6.2.2 Analiz 2. Temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişmesi

x_k temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı c'_k olursa; tüm temel dışı

değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri $[z_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j]$ kontrol edilir.

Eğer tüm temel dışı değişkenler için $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır. Mevcut çözümdeki amaç fonksiyonu değeri değişir ve $Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}}$ formülü ile hesaplanır.

Eğer en az bir temel dışı değişken için $z_j - c_j < 0$ ise (Maks için) mevcut temel en iyi değildir, en negatif katsayılı x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

x_k temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı için temel çözümün en iyi kalmasını sağlayacak aralığı bulunmak için; $c'_k = c_k + \delta$ kabul edilerek δ 'nın tüm temel dışı değişkenler için $z_j - c_j \geq 0$ (Maks problemi için) eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 6.7. Dakota Mobilya probleminde sıranın satış fiyatı (x_1 'in amaç fonksiyonu katsayısı) hangi aralıklarda değişirse mevcut temel çözüm en iyi kalır?

Yanıt

$$c'_1 = 60 + \delta$$

$$z_2 - c_2 = [0, 20, 60 + \delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - 30 \geq 0 \Rightarrow 5 + 1.25\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4$$

$$z_5 - c_5 = [0, 20, 60 + \delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow 10 - 0.5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 20$$

$$z_6 - c_6 = [0, 20, 60 + \delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow 10 + 1.5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -20/3$$

Sonuç olarak $-4 \leq \delta \leq 20$; veya $56 \leq c'_1 \leq 80$ ise mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 6.8. Dakota Mobilya probleminde sıranın satış fiyatı (x_1 'in amaç fonksiyonu katsayısı) 50 olursa çözüm ne olur?

Yanıt

Örnek 3'te hesaplandığı gibi eğer x_1 'in amaç fonksiyonu katsayısı 50 olursa mevcut temel en iyi değildir. Yeni çözümü bulabilmek için düzeltilmiş simpleks tablosu oluşturulur (Orjinal en iyi tablo üzerinde z satırı güncellenir):

	Temel Tersi			ST
z	0	15	-5	260
S ₁	1	2	-8	24
X ₃	0	2	-4	8
X ₁	0	-0,5	1,5	2

Temel dışı değişkenler için indirgenmiş maliyetler hesaplanır:

$$z_2 - c_2 = -7.5; \quad z_5 - c_5 = 15; \quad z_6 - c_6 = -5$$

x_2 çözüme girer. x_2 sütunu tabloya eklenir:

	Temel Tersi			ST	x_2	Oran
z	0	15	-5	260	-7,5	
S ₁	1	2	-8	24	-2	-
X ₃	0	2	-4	8	-2	-
X ₁	0	-0,5	1,5	2	1,25	1.6*

x_1 çözümden çıkar. Yeni tablo:

	Temel Tersi			ST
z	0	12	4	272
S ₁	1	1,2	-5,6	27,2
X ₃	0	1,2	-1,6	11,2
X ₂	0	-0,4	1,2	1,6

Bu çözümün en iyiliği kontrol etmek için temel dışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri hesaplanmalıdır. Hesaplandığında hepsinin pozitif olduğu görülebilir (lütfen kendiniz hesaplayınız).

Sonuç olarak sıranın satış fiyatı 50 olursa firma sıra üretmeyi bırakmalı onun yerine masa üretmelidir. Üretim miktarları $x_2 = 1.6$; $x_3 = 11.2$; kar ise 272 olacaktır.

6.2.3 Analiz 3. Kısıt sağ taraf değerinin değişmesi

i 'nci kısıtın sağ taraf değeri b'_i olursa; en iyi simpleks tablosunun sağ taraf değerleri $[\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}]$ kontrol edilir.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ ise mevcut temel en iyi kalır. Karar değişkenlerindeki ve amaç fonksiyonu değerindeki değişim değişir, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ve $Z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$ formülleri ile hesaplanır.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \not\geq \mathbf{0}$ (en az bir sağ taraf değeri negatif) ise mevcut çözüm yeni durum için olurlu değildir. Bu durumda dual simpleks yöntemi ile en iyi çözüm bulunur.

i 'nci kısıtın sağ taraf değeri için temel çözümü değiştirmeyecek aralık bulunmak istenirse; $b'_i = b_i + \delta$ kabul edilerek δ 'nın $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ eşitsizliğini sağlayan değerleri bulunur.

Örnek 6.9. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (ikinci kısıt sağ taraf değeri) hangi aralıklarda değişirse mevcut çözüm en iyi kalır?

Yanıt

$$b'_2 = 20 + \delta$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + 2\delta \\ 8 + 2\delta \\ 2 - 0,5\delta \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta \geq -12 \\ \delta \geq -4 \\ \delta \leq 4 \end{array}$$

Sonuç olarak $-4 \leq \delta \leq 4$ veya $16 \leq b'_2 \leq 24$ için mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 6.10. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (ikinci kısıt sağ taraf değeri) 18 saat olursa çözüm ne olur?

Yanıt

Önerilen değişim mevcut cilalama miktarı için izin verilen aralıkta olduğu için mevcut

$$\text{temel en iyidir. Yeni karar değişkeni değerleri } \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olarak ($x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$) bulunur. Yeni amaç fonksiyonu değeri ise $Z = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}} =$

$$[0, 20, 60] \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 260 \text{ 'tır.}$$

Örnek 6.11. Dakota Mobilya probleminde mevcut cilalama miktarı (ikinci kısıt sağ taraf değeri) 30 saat olursa çözüm ne olur?

Yanıt

Önerilen değişim mevcut cilalama miktarı için izin verilen aralıkta değildir. Yeni çözümü bulabilmek için dual simpleks yöntemi kullanılmalıdır. Bunun için öncelikle simpleks tablosu oluşturulur:

Z	X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	S ₂	S ₃	ST	TD
1	0	$z_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$	0	$W = \mathbf{c}_{BV} \mathbf{B}^{-1}$			$Z = \mathbf{c}_{BV} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	Z
0	0	$y_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$	0	$\mathbf{B}^{-1}$			$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	S ₁
0	0		1					X ₃
0	1		0					X ₁

Z	X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	S ₂	S ₃	ST	TD
1	0	5	0	0	10	10	380	Z
0	0	-2	0	1	2	-8	44	S ₁
0	0	-2	1	0	2	-4	28	X ₃
0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	-3	X ₁

Çözümünden x₁ çıkar, s₂ girer.

Z	X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	S ₂	S ₃	ST	TD
1	20	30	0	0	0	40	320	Z
0	4	3	0	1	0	-2	32	S ₁
0	4	3	1	0	0	2	16	X ₃
0	-2	-2,5	0	0	1	-3	6	S ₂

En iyi çözüm bulunmuştur. En iyi çözümde x₁ = 0, x₂ = 0, x₃ = 16 ve Z = 320'dir.

6.2.4 Analiz 4. Yeni bir karar değişkeni eklenmesi

Probleme yeni bir x_j karar değişkeni eklenirse; mevcut en iyi çözümün değişip değişmeyeceği bu karar değişkeni için indirgenmiş maliyet [$z_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$] hesaplanarak kontrol edilir.

Eğer $z_j - c_j \geq 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi kalır ve mevcut çözüm değişmez.

Eğer $z_j - c_j < 0$ ise (Maks problemi için) mevcut temel en iyi değildir, x_j çözüme girer ve oran testi ile hangi değişkenin çözümden çıkacağı belirlenerek yeni çözüm simpleks yöntem ile elde edilir.

Örnek 6.12. Dakota Mobilya probleminde yeni bir ürün olarak sehpa üretilmesi değerlendirilmektedir. Sehpa üretimi için birer birim marangozluk, cilalama ve tahta kullanılmaktadır ve sehpanın satış fiyatı 15\$'dır. Dakota için sehpa üretmek karlı olup olmadığını belirleyiniz.

Yanıt

x_7 üretilen sehpa miktarı olmak üzere $c_7 = 15$, $a_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun. Öncelikle x_7 için

indirgenmiş maliyet hesaplanır: $z_7 - c_7 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 5$. İndirgenmiş maliyet

pozitif olduğu için mevcut çözüm en iyidir. Sonuç olarak $x_7 = 0$ elde edilir, yani Dakota için sehpa üretmek karlı değildir.

Örnek 6.13. Örnek 6.12'de verilen durumda sehpa üretiminin Dakota Mobilya için karlı olması için sehpanın fiyatı ne olmalıdır? Sehpa fiyatı 28\$ olursa yeni çözüm ne olur?

Yanıt

x_7 için indirgenmiş maliyeti negatif yapacak c_7 değerleri x_7 'yi çözüme sokacaktır. Bu sehpanın üretilmesini sağlayacak, bir başka deyişle sehpa üretimini karlı kılacaktır.

$$z_7 - c_7 = [0, 10, 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - c_7 < 0$$

Buradan $c_7 > 20$ olduğunda sehpa üretmek karlı olacaktır.

$c_7 = 28$ olursa, $z_7 - c_7 = -8$ olur x_7 i çözüme girer. Oran testi ile çıkacak değişken bulunur. Düzeltilmiş simpleks ile çözüme devam edilir.

6.2.5 Analiz 5. Yeni bir kısıt eklenmesi

Probleme yeni bir kısıt eklenirse en iyi çözümün değişip değişmeyeceği eklenen yeni kısıt için en iyi tabloda sağ taraf değeri $[\bar{b} = B^{-1}b]$ hesaplanarak kontrol edilir. Burada yeni kısıt ile birlikte temel değişken kümesine yeni kısıtla ilgili gevşek değişken

eklenecektir. Dolayısıyla $\mathbf{B}$ temel matrisi ile $\mathbf{B}^{-1}$ temel matris tersi değişecektir. Bu analizi yapabilmek için öncelikle yeni $\mathbf{B}^{-1}$ bulunmalı ve $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ hesaplanmalıdır. Eğer $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ ise mevcut temel çözüm yeni kısıtı sağladığı anlaşılır. Mevcut temel en iyi kalır, karar değişkenlerinin ve amaç fonksiyonun değeri değişmez.

Eğer $\bar{\mathbf{b}} \not\geq \mathbf{0}$ (yeni kısıtın sağ taraf değeri negatif) ise mevcut temel çözümüm yeni kısıtı sağlamadığı anlaşılır. Mevcut çözüm yeni durum için olurlu değildir. Bu durumda simpleks tablosu oluşturularak dual simpleks yöntemi ile en iyi çözüm bulunur.

Örnek 6.14. Dakota Mobilya probleminde ürünler bittikten sonra son bir kalite kontrolü yapılması gerektiği ortaya çıkmıştır. Her ürün 0,5 saatte kontrol edilmektedir ve haftalık toplam 7 saat mevcuttur. Yeni durum için en iyi çözümü bulunuz.

Yanıt

Yeni kısıt: $0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \leq 7 \Rightarrow 0,5x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 + s_4 = 7$

Yeni temel çözüm: $BV = \{s_1, x_3, x_1, s_4\}$, $NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1,5 & 4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \text{ kullanılarak; } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & -0,75 & 1,25 & 1 \end{bmatrix} \text{ hesaplanır.}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & -0,75 & 1,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ olduğu için mevcut çözüm}$$

değişmez.

Dikkat! Eğer $\bar{\mathbf{b}}$ 'de en az bir değer negatif olsaydı, mevcut çözüm olurlu değildir denirdir. Yeni çözümü bulmak için simpleks tablosu oluşturulup Dual Simpleks ile çözüm bulunması gerekirdi.

7. ULAŞTIRMA SORUNLARI

7.1 ULAŞTIRMA SORUNLARININ FORMÜLASYONU

Genel olarak, bir ulaştırma sorunu aşağıdaki bilgileri barındırır:

- Bir ürün/hizmet gönderen m adet **arz noktası** (supply point). i arz noktası en fazla s_i birim arz edebilir.
- Ürünün/hizmetin gönderildiği n adet **talep noktası** (demand point). j talep noktası en az d_j birime gereksinim duyar.
- Bir birimin i arz noktasından j talep noktasına gönderilmesi maliyeti c_{ij} 'dir.

Söz konusu bilgi aşağıdaki **ulaştırma tablosu** ile formüle edilebilir:

	Talep noktası 1	Talep noktası 2		Talep noktası n	ARZ
Arz noktası 1	C_{11}	C_{12}		C_{1n}	S_1
Arz noktası 2	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	S_2
.....					
Arz noktası m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	S_m
TALEP	d_1	d_2		d_n	

Eğer toplam talep miktarı toplam arz miktarına eşitse sorun **dengeli ulaştırma sorunu** olarak isimlendirilir.

x_{ij} = i arz noktasından j talep noktasına gönderilen miktar olsun.

Bu durumda ulaştırma sorununun genel DP gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{öyle ki } \sum_j x_{ij} \leq s_i \quad (i=1,2, \dots, m) \quad \text{Arz kısıtları}$$

$$\sum_i x_{ij} \geq d_j \quad (j=1,2, \dots, n) \quad \text{Talep kısıtları}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Yukarıdaki sorun, bir enbüyüklenme sorunu (ulaştırma sonucu kar elde edilmesi gibi) da olsa, kısıtlarının benzer özellikler taşıması durumunda yine bir ulaştırma sorunudur.

7.1.1 Dengeli Ulaştırma Sorununun Formülasyonu

Örnek 7.1. Powerco

Powerco şirketinin dört şehre hizmet veren üç adet elektrik santrali vardır. Her bir santral sırasıyla 35 milyon, 50 milyon ve 40 milyon kWh elektrik üretmektedir. Şehirlerin en yoğun saatlerde talep ettiği elektrik miktarı ise sırasıyla 45 milyon, 20 milyon, 30 milyon ve 30 milyon kWh'dir. 1 milyon kWh elektriğin bir santralden bir şehre gönderilmesinin maliyeti aşağıdaki tabloda verilmiştir. Her şehrin talebini en az maliyetle karşılamak üzere bir ulaştırma tablosunda dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz ve sorunun DP modelini gösteriniz.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Santral 1	\$8	\$6	\$10	\$9
Santral 2	\$9	\$12	\$13	\$7
Santral 3	\$14	\$9	\$16	\$5

Yanıt

Ulaştırma sorununun tablo gösterimi:

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	35
Santral 2	9	12	13	7	50
Santral 3	14	9	16	5	40
TALEP	45	20	30	30	125

Toplam talep ve toplam arz eşit olduğundan (125 milyon kWh) sorun "dengeli"dir.

Sorunun DP modeli:

x_{ij} : Santral i 'de üretilen ve Şehir j 'ye gönderilen elektrik miktarı (million kwh)

$$\min z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

$$\text{s.t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35 \quad (\text{arz kısıtları})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45 \quad (\text{talep kısıtları})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$$

7.1.2 Dengesiz bir Ulaştırma Sorununun Dengelenmesi

Fazla Arz

Eğer toplam arz miktarı toplam talep miktarını geçerse, sorunu dengelemek için talep miktarı aradaki fark (fazla arz miktarı) kadar olan bir **yapay talep noktası** yaratılır. Söz konusu noktaya yapılacak gönderimler aslında olmayacağı için bu noktaya arz noktalarından yapılacak ulaştırma maliyeti **0** olacaktır.

Karşılanmayan Talep

Eğer toplam arz miktarı toplam talep miktarından azsa, aslında olurlu bir çözüm yoktur (talepler karşılanamaz). Bu durumda karşılanamayan talep kadar arzı olan bir **yapay arz noktası** yaratılır. Talebin olmayan bir arz noktasından karşılanması (veya talebin gerçekte karşılanamaması) beraberinde bir “ceza maliyeti” getirir.

Örnek 7.2. Fazla Arz için Değiştirilmiş Powerco

Şehir 1’in talebinin 40 milyon kwh olduğunu farz edelim. Bu durumda dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz.

Yanıt

Toplam talep 120 ve toplam arz 125 olduğundan sorun dengeli değildir.

Sorunu dengelemek için bir yapay talep noktası eklenir. Söz konusu noktanın talebi $125 - 120 = 5$ milyon kwh olacaktır.

Her santralden yapay talep noktasına 1 milyon kwh elektrik göndermenin maliyeti 0 olacaktır.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Yapay	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	0	35
Santral 2	9	12	13	7	0	50
Santral 3	14	9	16	5	0	40
TALEP	40	20	30	30	5	125

Örnek 7.3. Karşılanmayan Talep için Değiştirilmiş Powerco

Şehir 1’in talebinin 50 milyon kwh olduğunu farz edelim. Karşılanamayan her 1 milyon kWh elektrik için 80\$ ceza maliyeti kesildiğine göre problemi dengeli bir ulaştırma sorunu olarak formüle ediniz.

Yanıt

5 milyon kWh elektrik arz eden bir yapay arz noktası eklenir. Yapay arz noktasına atanan talep karşılanmayacağı için maliyet olarak ceza maliyeti (80\$) girilir.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8	6	10	9	35
Santral 2	9	12	13	7	50
Santral 3	14	9	16	5	40
Yapay arz	80	80	80	80	5
TALEP	50	20	30	30	130

Örnek 7.4. Su Kaynağı

Üç şehrin ihtiyaçlarını karşılamak üzere iki su kaynağı mevcuttur. Her bir kaynaktan günlük 50 milyon galon su tedarik edilebilir. Her bir şehrin günlük 40 milyon galon su ihtiyacı vardır. Karşılanmayan talepler cezalandırılır. 1. şehir için ceza 20\$/milyon galon, 2. şehir için ceza 22\$ / milyon galon, 3. şehir için ceza 23\$/milyon galon. Aşağıdaki tabloda bir milyon galon suyu şehirlere taşıma maliyetleri verilmiştir.

Dengeli ulaştırma sorununu tanımlayınız.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3
Su kaynağı 1	7\$	8\$	10\$
Su kaynağı 2	9\$	7\$	8\$

Yanıt

Toplam Arz; 50+50 = 100, toplam talep; 40 + 40 + 40 = 120

Toplam talep toplam arzdan büyük olduğu için yapay arz noktası ilave edilir.

Yapay arz noktasından su alacak şehirlerin talepleri karşılanmamış demektir, bu yüzden ilgili hücrelere soruda verilen ceza maliyetleri yazılacaktır.

Dengeli ulaştırma tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	ARZ
Su Kaynağı 1	7	8	10	50
Su Kaynağı 2	9	7	8	50
Yapay arz	20	22	23	20
TALEP	40	40	40	120

7.2 TEMEL OLURLU ÇÖZÜMÜN BULUNMASI

Bir ulaştırma problemini Ulaştırma Simpleksi ile çözebilmek için öncelikle bir temel olurlu çözüm (basic feasible solution - bfs) bulmak gereklidir.

Dengeli bir ulaştırma sorunu için genel DP gösterimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{öyle ki } \sum_j x_{ij} = s_i \quad (i=1,2, \dots, m) \quad \text{Arz kısıtları}$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad (j=1,2, \dots, n) \quad \text{Talep kısıtları}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Söz konusu soruna bir bfs bulmak için aşağıdaki önemli gözlemi kullanılır:

“Eğer dengeli bir ulaştırma sorununda x_{ij} ’lerin değerler kümesi bir kısıt haricinde tüm kısıtları sağlarsa, bu değerler o kısıdı da sağlar.”

Bu gözlem ulaştırma sorununun çözümü sırasında herhangi bir kısıtı göz ardı edebileceğimizi ve $m+n-1$ kısıttan oluşan bir DP çözeceğimizi gösterir. Genel olarak ilk arz kısıtı değerlendirme dışı bırakılır.

Geri kalan $m+n-1$ kısıda bfs bulmak için herhangi bir $m+n-1$ değişkenin temel çözüm verebileceğini düşünülebilir: fakat söz konusu $m+n-1$ değişkenin temel çözümde olabilmesi için bir **döngü oluşturmamaları** gerekir.

En az dört hücrenin bir döngü oluşturması için:

- Herhangi ardışık iki hücrenin aynı satır veya sütunda olması gerekir,
- Aynı satır veya sütunda ardışık üç hücre olmamalıdır,
- Serinin son hücresi ilk hücre ile aynı satır veya sütunda olup döngüyü kapatmalıdır.

Dengeli bir ulaştırma sorununa temel olurlu çözüm bulmak için üç farklı yöntem kullanılabilir (**Dikkat!** Bu yöntemler ulaştırma problemini tamamen çözmek için değil bir temel olurlu çözüm bulabilmek için uygulanırlar).

1. Kuzeybatı Köşe (Northwest Corner) Yöntemi
2. Enküçük Maliyet (Minimum Cost) Yöntemi
3. Vogel’in Yaklaşımı

7.2.1 Kuzeybatı Köşe Yöntemi

Ulaştırma tablosunun en sol üst köşesinden başlanır ve x_{11} 'e mümkün olduğunca büyük bir değer atanır (tabii ki; x_{11} en çok s_1 ve d_1 ikilisinin en küçük değeri kadar olabilir).

- Eğer $x_{11}=s_1$ ise ilk satır iptal edilir ve d_1 , d_1-s_1 olarak güncellenir,
- Eğer $x_{11}=d_1$ ise ilk sütun iptal edilir ve s_1 , s_1-d_1 olarak güncellenir,
- Eğer $x_{11}=s_1=d_1$ ise ya ilk satır ya da ilk sütun iptal edilir (her ikisini de değil!)
 - Eğer satır iptal edilirse d_1 sıfır yapılır,
 - Eğer sütun iptal edillirse s_1 sıfır yapılır.

Bu şekilde devam ederek (her seferinde geri kalan hücrelerde yeni sol-üst köşeye atama yaparak) tüm atamalar yapılır. Sonuçta, bir hücre geriye kalacaktır. Satır veya sütundaki değeri atayarak ve hem satırı hem de sütunu iptal ederek işlemi bitirilir: böylece bir bfs elde edilmiştir.

Örnek 7.5 Aşağıdaki dengeli ulaştırma sorunu için KBK yöntemiyle bir bfs bulunuz. (Bu yöntemde maliyetler gerekmediğinden verilmemiştir!).

				5
				1
				3
2	4	2	1	

Yanıt

Toplam talep toplam arza eşittir (9): sorun dengelidir.

2				3
				1
				3
X	4	2	1	

2	3			X
				1
				3
X	1	2	1	

2	3			X
	1			X
				3
X	0	2	1	

2	3			X
	1			X
	0	2	1	3
X	0	2	1	

$m+n-1$ ($3+4-1 = 6$) adet değişken atanmış olur. KBK yöntemi ile seçilen değişkenler bir döngü oluşturmadıklarından bir bfs bulunmuştur.

7.2.2 En küçük Maliyet Yöntemi

KBK yöntemi maliyetleri göz önüne almadığından başlangıç bfs'si maliyeti yüksek olan bir çözüm olabilir ve en iyi çözümün bulunması için çok sayıda işlem gerekebilir.

Bu durumla karşılaşmamak için kullanılabilecek olan en küçük maliyet yönteminde en düşük taşıma maliyeti olan hücreye atama yapılır. Bu hücreye yapılacak x_{ij} ataması yine $\min \{s_i, d_j\}$ kadardır.

KBK yöntemindeki gibi atama yapılan hücrenin olduğu satır veya sütun iptal edilip arz ya da talep değeri güncellenir ve tüm atamalar yapıncaya kadar devam edilir.

Örnek 7.6. Aşağıdaki ulaştırma sorunu için En küçük maliyet yöntemiyle bir bfs bulunuz.

Yanıt

	2		3		5		6	5
	2		1		3		5	10
	3		8		4		6	15
12		8		4		6		

	2		3		5		6	5
	2		1		3		5	2
	3		8		4		6	15
12		X		4		6		

	2		3		5		6	5
	2		1		3		5	X
2		8						15
	3		8		4		6	
10		X		4		6		

	2		3		5		6	X
5								
	2		1		3		5	X
2		8						
	3		8		4		6	15
5		X		4		6		

	2		3		5		6	X
5								
	2		1		3		5	X
2		8						
	3		8		4		6	X
5				4		6		
X		X		X		X		

7.2.3 Vogel Yaklaşımı

Her satır ve sütun için ceza hesaplanarak yöneme başlanır. Ceza o satır veya sütundaki en küçük iki maliyet arasındaki farktır.

Daha sonra cezası enbüyük olan satır veya sütun bulunur. Söz konusu satır veya sütundaki en düşük maliyetli hücre ilk temel değişkeni verir.

Yine KBK yöntemindeki gibi bu değişkene atanacak değer, ilgili hücrenin arz ve talep miktarlarına bağlıdır. Gerekli iptaller ve güncellemeler yapılır. Yeniden geri kalan tablo için yeni cezalar hesaplanır ve prosedüre benzer adımlarla devam edilir.

Örnek 7.7. Aşağıdaki dengeli ulaştırma sorunu için Vogel yaklaşımıyla bir bfs bulunuz

Yanıt

	14	22	24	Arz	Satır cezası
				5	$22-14=8$
	6	7	8	8	$7-6=1$
	15	80	78	15	$78-15=63$

Talep	12	7	9
Sütun cezası	$14-6=8$	$22-7=15$	$24-8=16$

	14	22	24	Arz	Satır cezası
X				5	$24-22=2$
	6	7	8	8	$8-7=1$
X					
12	15	80	78	3	$80-78=2$

Talep	X	7	9
Sütun cezası		$22-7=15$	$24-8=16$

	14	22	24	Arz	Satır cezası
X				5	$24-22=2$
	6	7	8	X	
X		X	8		
12	15	80	78	3	$80-78=2$

Talep	X	7	1
Sütun cezası		$80-22=58$	$78-24=54$

	14	22	24	Arz	Satır cezası
X		5	X	X	
	6	7	8	X	
X		X	8		
12	15	80	78	3	$80-78=2$

Talep	X	2	1
Sütun cezası		-	-

Vogel yaklaşımı ile elde edilen temel olurlu çözüm:

				Arz
	14	22	24	5
X		5	X	8
	6	7	8	15
X		X	8	
	15	80	78	
12		2	1	
Talep	12	7	9	

7.3 ULAŞTIRMA SİMPLEKSİ

Ulaştırma simpleksi, simpleks yöntemin ulaştırma probleminin özel yapısına göre düzenlemesi ile geliştirilmiştir. Simpleks yöntemin temel adımları ulaştırma simpleksinde de uygulanır. Herhangi bir bfs'nin en iyi olup olmadığını kontrol etmek için temel dışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri hesaplanmalıdır. Bunun için $\hat{c}_{ij} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{ij} - c_{ij} = \mathbf{w} \mathbf{a}_{ij} - c_{ij}$ formülü kullanılır. Burada $\mathbf{w}$ her kısıt için gölge fiyatları (dual değişkenleri) içeren bir vektördür. Ulaştırma probleminde m arz noktası n talep noktası olursa; $m + n$ adet kısıt yer aldığı için $\mathbf{w}$ içerisinde de bu sayıda eleman bulunur. Diyelim ki; $\mathbf{w} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ olsun; burada $u_1, \dots, u_m$, arz kısıtları ile ilgili dual değişkenler, $v_1, \dots, v_n$ ise talep kısıtları ile ilgili dual değişkenlerdir. a_{ij} ise x_{ij} değişkeninin kısıt katsayılarıdır. Ulaştırma probleminde a_{ij} , i 'inci ve $m+j$ 'inci elemanları 1, diğer elemanları 0 olan bir vektördür. Sonuç olarak $\hat{c}_{ij} = \mathbf{w} \mathbf{a}_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ olarak hesaplanır. u_i ve v_j değerlerini bulabilmek için $\mathbf{w} = \mathbf{c}_{BV} \mathbf{B}^{-1}$ ifadesinden $\mathbf{w} \mathbf{B} = \mathbf{c}_{BV}$ elde edilir; $\mathbf{B}$ içerisinde temel değişkenlerin $\mathbf{a}_{ij}$ değerleri yer aldığından her bir temel değişken için $\mathbf{w} \mathbf{a}_{ij} = u_i + v_j = c_{ij}$ yazılabilir. Burada verilen kavramsal açıklama çerçevesinde yöntemin adımları aşağıda verilmiştir.

Yöntemin Adımları

1. Eğer ulaştırma sorunu dengesiz ise dengelenir,
2. KBK, Enküçük Maliyet veya Vogel yöntemlerinden biri kullanılarak bir bfs bulunur,
3. $u_1 = 0$ olarak kabul edip mevcut bfs'deki tüm temel değişkenler için $u_i + v_j = c_{ij}$ denklemi kullanarak u 'lar ve v 'ler hesaplanır.
4. (Enküçükleme sorunları için) Tüm temel dışı değişkenler için $\hat{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ ise, en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer bu koşul sağlanmazsa $\hat{c}_{ij}$ değeri en pozitif olan

değişken *pivot işlemleri* ile temele girer ve temeldeki değişkenlerden biri çözümden çıkar. Böylece yeni bir bfs bulunmuş olur. Adım 3'e gidiniz.

(Enbüyüklemeye sorunları için) Tüm temel dışı değişkenler için $\hat{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$ ise, en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer bu koşul sağlanmazsa $\hat{c}_{ij}$ değeri en negatif olan değişken *pivot işlemleri* ile temele girer ve temeldeki değişkenlerden biri çözümden çıkar. Böylece yeni bir bfs bulunmuş olur. Adım 3'e gidiniz.

Pivot işlemleri

1. Çözüme girecek olan değişken ile temel değişkenlerin bazıları veya hepsi bir döngü oluşturur (sadece bir olası döngü vardır!).
2. Döngüdeki hücreleri çözüme giren hücreden başlayarak sayılır. Sayısı çift olanları (0, 2, 4, vb.) *çift hücreler* olarak işaretlenir. Döngüdeki diğer hücreleri de *tek hücreler* olarak işaretlenir.
3. Tek hücrelerde değeri en küçük olan değişken bulunur. Bu değişken temel dışı kalacaktır. Bulunan en küçük değere Φ denirse; tüm tek hücrelerdeki değerlerden Φ çıkartılır ve çift hücrelerdeki değerlere Φ eklenir. Döngüde olmayan değişkenlerin değeri değişmez. Eğer $\Phi = 0$ ise giren değişken 0 değeri ile çözüme girecektir.

Örnek 7.8. Powerco

Powerco örneğini Ulaştırma Simpleksi ile çözünüz.

Yanıt

Sorun dengelidir (toplam talep toplam arza eşittir). Powerco örneğine KBK yöntemi uygulanırsa, aşağıdaki tabloda görülen bfs elde edilir ($m+n-1=6$ temel değişken!).

	Şehir 1		Şehir 2		Şehir 3		Şehir 4		ARZ
Santral 1	8		6		10		9		35
	35								
Santral 2	9		12		13		7		50
	10		20		20				
Santral 3	14		9		16		5		40
					10		30		
TALEP	45		20		30		30		125

1. İterasyon:

$$u_1 = 0$$

$$u_1 + v_1 = 8 \Rightarrow v_1 = 8$$

$$u_2 + v_1 = 9 \Rightarrow u_2 = 1$$

$$u_2 + v_2 = 12 \Rightarrow v_2 = 11$$

$$u_2 + v_3 = 13 \Rightarrow v_3 = 12$$

$$u_3 + v_3 = 16 \Rightarrow u_3 = 4$$

$$u_3 + v_4 = 5 \Rightarrow v_4 = 1$$

Tüm temel dışı değişkenler için $\hat{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ hesaplanır:

$$\hat{c}_{12} = 0 + 11 - 6 = 5$$

$$\hat{c}_{13} = 0 + 12 - 10 = 2$$

$$\hat{c}_{14} = 0 + 1 - 9 = -8$$

$$\hat{c}_{24} = 1 + 1 - 7 = -5$$

$$\hat{c}_{31} = 4 + 8 - 14 = -2$$

$$\hat{c}_{32} = 4 + 11 - 9 = 6$$

$\hat{c}_{32}$ en pozitif olan değeri verdiği için, x_{32} temel değişken olacaktır.

x_{32} 'nin de olduğu döngü (3,2)-(3,3)-(2,3)-(2,2) şeklindedir: $\Phi = 10$ bulunur.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 35	6	10	9	35
Santral 2	9 10	$20-\Phi$	$20+\Phi$	7	50
Santral 3	14	Φ	$10-\Phi$	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{33} temel dışı değişken olacaktır. Yeni bfs aşağıdaki tabloda verilmiştir:

2. İterasyon:

u_i/v_j	8	11	12	7	ARZ
0	8 35	6	10	9	35
1	9 10	12 10	13 30	7	50
-2	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$$\hat{c}_{12} = 5, \hat{c}_{13} = 2, \hat{c}_{14} = -2, \hat{c}_{24} = 1, \hat{c}_{31} = -8, \hat{c}_{33} = -6$$

$\hat{c}_{12}$ en pozitif değeri verdiği için, x_{12} çözüme girer.

x_{12} 'nin de olduğu döngü (1,2)-(2,2)-(2,1)-(1,1) şeklindedir ve $\Phi = 10$ 'dur.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 $35 - \Phi$	6 Φ	10	9	35
Santral 2	9 $10 + \Phi$	12 $10 - \Phi$	13 30	7	50
Santral 3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{22} çözümden çıkar. Yeni bfs aşağıdaki tabloda verilmiştir:

3. İterasyon:

u_i/v_j	8	6	12	2	ARZ
0	8 25	6 10	10	9	35
1	9 20	12	13 30	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$$\hat{c}_{13} = 2, \hat{c}_{14} = -7, \hat{c}_{22} = -5, \hat{c}_{24} = -4, \hat{c}_{31} = -3, \hat{c}_{33} = -1$$

$\hat{c}_{13}$ en pozitif olan değeri verdiği için, x_{13} temel değişken olacaktır.

x_{13} 'ün de olduğu döngü (1,3)-(2,3)-(2,1)-(1,1) şeklindedir. $\Phi = 25$

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 $25 - \Phi$	6 10	10 Φ	9	35
Santral 2	9 $20 + \Phi$	12	13 $30 - \Phi$	7	50
Santral 3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

x_{11} temel dışı değişken olur. Yeni bfs:

4. İterasyon:

u_i/v_j	6	6	10	2	ARZ
0	8	6 10	10 25	9	35
3	9 45	12	13 5	7	50
3	14	9 10	16	5 30	40
TALEP	45	20	30	30	125

$$\hat{c}_{11} = -2, \hat{c}_{14} = -7, \hat{c}_{22} = -3, \hat{c}_{24} = -2, \hat{c}_{31} = -5, \hat{c}_{33} = -3$$

Tüm $\hat{c}_{ij}$ 'ler negatif olduğundan en iyi çözüm bulunmuştur.

Rapor

Santral 2'den Şehir 1'e 45 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 1'den Şehir 2'ye 10 milyon kwh elektrik gönderilmelidir. Benzer şekilde Santral 3'den Şehir 2'ye 10 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 1'den Şehir 3'e 25 milyon kwh ve Santral 2'den Şehir 3'e 5 milyon kwh elektrik gönderilmelidir.

Santral 3'den Şehir 4'e 30 milyon kwh elektrik gönderilmelidir

Toplam taşıma maliyeti: $z = .9(45) + 6(10) + 9(10) + 10(25) + 13(5) + 5(30) = \1020 .

7.4 ULAŞTIRMA SORUNLARI İÇİN DUYARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde ulaştırma sorunları için duyarlılık analizi ile ilgili aşağıdaki noktalar incelenmektedir:

- Temel Dışı Değişkenin (NBV) amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi.
- Temel Değişkenin (BV) amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi.
- Bir arzın Δ kadar artırılması ve bir talebin Δ kadar artırılması.

Bu değişiklikler Powerco sorunu kullanılarak açıklanmaktadır. Anımsanacağı gibi Powerco sorunu için en iyi çözüm $z = \$1,020$ 'dir ve en iyi tablo önceki verilmiştir.

Temel Dışı Değişkenin Amaç Fonksiyon Katsayısının Değiştirilmesi

Temel dışı bir x_{ij} değişkeninin amaç fonksiyon katsayısının değiştirilmesi en iyi tablonun sağ taraf değerini değiştirmez. Bu nedenle mevcut temel hala olurludur. $\mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}$ değişmediğinden u_i 'ler ve v_j 'ler değişmez. 0. satırda yalnız x_{ij} 'nin katsayısı değişir. Bu nedenle x_{ij} 'nin katsayısı en iyi tablonun 0. satırında pozitif olmayan bir değer aldığı sürece mevcut temel en iyi kalır.

Örnek 7.9. 1 milyon kwh elektriğin Santral 1'den Şehir 1'e iletim maliyetinin hangi aralıktaki değerleri için mevcut temel en iyi kalır?

Yanıt

c_{11} 'in 8'den $8+\Delta$ 'ya değiştirildiği varsayalım. Δ 'nın hangi değerleri için mevcut temel en iyi kalır? $\bar{c}_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 6 - (8 + \Delta) = -2 - \Delta$.

Bu nedenle mevcut temel $-2 - \Delta \leq 0$, ya da $\Delta \geq -2$, ve $c_{11} \geq 8 - 2 = 6$ olduğu sürece mevcut temel en iyi kalır.

Temel Değişkenin Amaç Fonksiyon Katsayısının Değiştirilmesi

$c_{BV}B^{-1}$ değeri değiştirildiği için 0. satırdaki her temel dışı değişkenin katsayısı değişebilir. Mevcut temelin en iyi kalıp kalmadığını belirlemek için yeni u_i 'ler ve v_j 'ler bulunmalı ve bu değerler kullanılarak her temel dışı değişken için olurluluk koşulu denetlenmelidir. Mevcut temel, temel dışı değişkenlerin olurluluk denetimi pozitif olmayan bir sonuç verdiği sürece en iyi kalır.

Örnek 7.10 1 milyon kwh elektriğin Santral 1'den Şehir 3'e iletim maliyetinin hangi aralıktaki değerleri için mevcut temel en iyi kalır?

Yanıt

c_{13} 'ün 10'dan $10+\Delta$ 'ya değiştiği varsayalım. O zaman $\bar{c}_{13} = 0$ denklemi $u_1 + v_3 = 10$ 'dan $u_1 + v_3 = 10 + \Delta$ 'ya dönüşür. Bu nedenle u_i 'lerin ve v_j 'lerin bulunması için, aşağıdaki denklemler çözülmelidir.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 + v_1 &= 9 \\ u_1 + v_2 &= 6 \\ u_2 + v_3 &= 13 \\ u_3 + v_2 &= 9 \\ u_1 + v_3 &= 10 + \Delta \\ u_3 + v_4 &= 5 \end{aligned}$$

Bu denklemlerin çözülmesi ile $u_1 = 0$, $v_2 = 6$, $v_3 = 10 + \Delta$, $v_1 = 6 + \Delta$, $u_2 = 3 - \Delta$, $u_3 = 3$, ve $v_4 = 2$ sonuçları elde edilir.

Bundan sonra her temel dışı değişken için olurluluk denetimi yapılır. Her temel dışı değişken 0. satırda pozitif olmayan bir katsayıya sahip olduğu sürece mevcut temel en iyi kalır.

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11} &= u_1 + v_1 - 8 = \Delta - 2 \leq 0 & \Delta &\leq 2 \\ \bar{c}_{14} &= u_1 + v_4 - 9 = -7 \\ \bar{c}_{22} &= u_2 + v_2 - 12 = -3 - \Delta \leq 0 & \Delta &\geq -3 \\ \bar{c}_{24} &= u_2 + v_4 - 7 = -2 - \Delta \leq 0 & \Delta &\geq -2 \\ \bar{c}_{31} &= u_3 + v_1 - 14 = -5 + \Delta \leq 0 & \Delta &\leq 5 \\ \bar{c}_{33} &= u_3 + v_3 - 16 = \Delta - 3 \leq 0 & \Delta &\leq 3 \end{aligned}$$

Bu nedenle mevcut temel $-2 \leq \Delta \leq 2$, ya da $8 \leq c_{13} \leq 12$ eşitsizlikleri geçerli olduğu sürece en iyi kalır.

Hem s_i Arzının Hem de d_j Talebinin Δ Kadar Artırılması

Bu değişiklik ulaştırma sorununun dengeli kalmasını sağlar. u_i 'ler and v_j 'ler her kısıtın gölge fiyatının negatifi olarak düşünülebileceğinden mevcut temelin en iyi kalması durumunda yeni z-değeri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\text{yeni z-değeri} = \text{eski z-değeri} + \Delta(u_i) + \Delta(v_j)$$

Örneğin, 1. Santralin arzı ve 2. Şehrin talebi 1 birim arttığında

$$\text{yeni maliyet} = 1,020 + 1(0) + 1(6) = \$ 1,026.$$

Karar değişkenlerinin yeni değerleri ise şu şekilde bulunabilir:

1. x_{ij} en iyi çözümdeki temel değişkense x_{ij} Δ kadar artırılır.
2. x_{ij} en iyi çözümdeki temel dışı değişken ise x_{ij} 'yi ve bazı temel değişkenleri içeren döngü bulunur. i satırında ve döngüde olan tek hücre bulunur. Bu tek hücrenin değeri Δ kadar artırılır ve döngüde dolaşarak ve değişimli olarak değerler artırılarak ve azaltılarak mevcut temel değişkenlerin yeni değerleri bulunur.

Örnek 7.11. 1. Santralin arzı (s_1) 2. Şehrin talebi (d_2) 2 birim artarsa yeni çözüm ne olur?

Yanıt

x_{12} en iyi çözümdeki bir temel değişken olduğu için, yeni en iyi çözüm:

		Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Arz
	u_i/v_j	6	6	10	2	
Santral 1	0	8	6	10	9	37
			12	25		
Santral 2	3	9	12	13	7	50
		45		5		
Santral 3	3	14	9	16	5	40
			10		30	
Talep		45	22	30	30	

Yeni z-değeri $1,020 + 2u_1 + 2v_2 = \$ 1,032$.

Örnek 7.12. 1. Santralin arzı (s_1) 1. Şehrin talebi (d_1) 1 birim artarsa yeni çözüm ne olur?

Yanıt

x_{11} mevcut en iyi çözümde temel dışı bir değişken olduğu için x_{11} 'i ve bazı temel değişkenleri içeren bir döngü bulunmalıdır. Döngü $(1, 1) - (1, 3) - (2, 3) - (2, 1)$ şeklindedir. İlk satırda olup döngü içinde yer alan tek hücre x_{13} 'tür. Bu nedenle yeni en iyi çözüm x_{13} ve x_{21} 'yi 1 artırarak ve x_{23} 'ü 1 azaltarak bulunmaktadır. Bu değişiklik sonucu aşağıdaki en iyi çözüm ortaya konulur:

		Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Arz
	u_i/v_j	6	6	10	2	
Santral 1	0	8	6	10	9	36
			10	26		
Santral 2	3	9	12	13	7	50
		46		4		
Santral 3	3	14	9	16	5	40
			10		30	
Talep		46	20	30	30	

Yeni z-değeri = $1,020 + u_1 + v_1 = \$ 1,026$ 'dır.

Dikkat! Hem s_1 hem d_1 5 birimden fazla arttırılırsa mevcut temel çözüm olurlu olmaz! Neden?

7.5 GEÇİCİ KONAKLAMA SORUNLARI

Bazı durumlarda gönderim sürecindeki bir nokta hem ürün/hizmet gönderebilir, hem de söz konusu noktaya ürün/hizmet gönderilebilir. Ürün/hizmetin arz noktasından talep noktasına gönderimi sırasında geçici olarak konakladığı bu nokta **geçici konaklama noktası** olarak isimlendirilir.

Bu özelliği olan bir gönderim sorunu geçici konaklama sorunudur.

Geçici konaklama sorununa en iyi çözüm söz konusu sorunu ulaştırma sorununa dönüştürerek bulunabilir.

Uyarı

“Ulaştırma Sorunlarının Formülasyonu” bölümünde belirtildiği gibi, bir başka noktaya bir ürün/hizmet gönderen fakat hiç bir noktadan ürün/hizmet alamayan nokta **arz noktası** olarak isimlendirilir.

Benzer şekilde, bir **talep noktası** da diğer noktalardan ürün/hizmet alabilir fakat hiç bir noktaya ürün/hizmet gönderemez.

Bu açıdan **geçici konaklama noktası**; başka noktalara ürün/hizmet gönderebilen ve başka noktalardan ürün/hizmet alabilen noktalar olarak tanımlanabilir.

Adımlar

1. Eğer sorun dengesiz ise sorunu dengeleyiniz.

s = dengeli sorun için toplam arz (veya talep) miktarı olsun.

2. Aşağıdaki şekilde bir ulaştırma tablosu kurunuz:

Her arz ve geçici konaklama noktası için tabloda bir satır gerekecektir,

Her talep ve geçici konaklama noktası için bir sütun gerekecektir,

Her arz noktasının arzı o noktanın arz miktarı kadar olacaktır,

Her talep noktasının talebi o noktanın talep miktarı kadar olacaktır,

Her geçici konaklama noktasının arzı “o noktanın arz miktarı + s ” kadar olacaktır,

Her geçici konaklama noktasının talebi “o noktanın talep miktarı + s ” olacaktır.

3. Ulaştırma sorununu çözünüz.

Örnek 7.13. Kuruoğlu

(Winston 7.6.'dan esinlenilmiştir)

Kuruoğlu Malatya ve G.Antep'deki fabrikalarında akrilik iplik üretmektedir. Malatya'daki fabrika günde en fazla 150 ton, G.Antep'teki fabrika ise günde en fazla 200 ton iplik üretebilmektedir. Üretilen iplikler karayolu ile İstanbul, İzmir ve Ankara'daki müşterilere gönderilmektedir. İzmir ve İstanbul'daki müşterilerin talepleri 130 ton iken Ankara'daki müşterilerin talebi 50 tondur. Gönderim maliyetlerindeki değişiklikler yüzünden ürünlerin fabrikalardan uçakla öncelikle Ankara veya Eskişehir'e gönderilmesi ve daha sonra nihai müşterilere bu şehirlerden ulaştırılması düşünülmektedir. Aşağıdaki tabloda şehirler arası birim taşıma maliyetleri verilmiştir. Kuruoğlu toplam taşıma maliyetlerini enazlayacak şekilde müşteri taleplerini karşılamak istemektedir.

Problemi geçici konaklama problemi olarak düşünerek dengeli ulaştırma tablosunu oluşturunuz.

TL/ton	Ankara	Eskişehir	İstanbul	İzmir
Malatya	8	13	25	28
G.Antep	15	12	26	25
Ankara	0	6	16	17
Eskişehir	6	0	14	16

Yanıt

Bu sorunda Malatya ve G.Antep arz noktası; İstanbul ve İzmir talep noktası; Ankara ve Eskişehir *geçici konaklama* noktasıdır.

Adım 1. Sorunu dengeleme

$$\text{Toplam arz} = 150 + 200 = 350$$

$$\text{Toplam talep} = 130 + 130 + 50 = 310$$

$$\text{Yapay talep} = 350 - 310 = 40$$

$$s = 350 \text{ (dengeli sorun için toplam arz veya talep miktarı)}$$

Adım 2. Bir ulaştırma tablosu kurma

$$\text{Geçici konaklama noktası talebi} = \text{O noktanın talep miktarı} + s$$

$$\text{Ankara için talep: } 50 + 350 = 400$$

$$\text{Eskişehir için talep: } 0 + 350 = 350$$

$$\text{Geçici konaklama noktası arzı} = \text{O noktanın arz miktarı} + s$$

$$\text{Ankara için arz: } 0 + 350 = 350$$

$$\text{Eskişehir için arz: } 0 + 350 = 350$$

	Ankara	Eskişehir	İstanbul	İzmir	Yapay	Arz
Malatya	8	13	25	28	0	150
G.Antep	15	12	26	25	0	200
Ankara	0	6	16	17	0	350
Eskişehir	6	0	14	16	0	350
Talep	400	350	130	130	40	1050

Adım 3. Ulaştırma sorununun çözümü (Adım 2’de oluşturulan ulaştırma tablosunun ulaştırma simpleksi kullanılarak çözümü aşağıda verilmiştir – ulaştırma simpleksinin adımları gösterilmemiştir.)

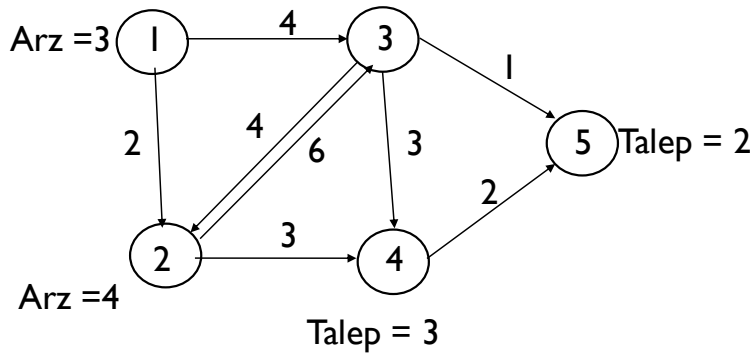
	Ankara	Eskişehir	İstanbul	İzmir	Yapay	Arz
Malatya	8 150	13	25	28	0	150
G.Antep	15	12 30	26	25 130	0 40	200
Ankara	0 250	6	16 100	17	0	350
Eskişehir	6	0 320	14 30	16	0	350
Talep	400	350	130	130	40	1050

Rapor:

Kuruoğlu Malatya'da 150 ton akrilik iplik üretilip bunların tamamını Ankara'ya göndermelidir. Ankara'ya gelen 150 ton ürünün 50'si Ankara'nın talebi için kullanılırken; 100'ü İstanbul'a gönderilir. G.Antep'de 160 ton iplik üretilmelidir (Yapayın 40 çıkması G.Antep'in 200 üretim kapasitesinin 40'nın kullanılmayacağını göstermektedir). Üretimin 130'u doğrudan İzmir'e, 30'u Eskişehir üzerinden İstanbul'a gönderilmelidir.

Bu durumda toplam taşıma maliyeti 6830 TL olacaktır.

Örnek 7.14. Aşağıda bir geçici konaklama problemi ağ yapısı ile gösterilmiştir. Noktaların üzerinde arz/talep miktarları verilmiştir. Olası ulaşım seçenekleri ve birim maliyetleri bağlantılar ve bağlantılar üzerindeki maliyetler ile ifade edilmiştir. Problemi ulaştırma problemine dönüştürerek ulaştırma tablosunu oluşturunuz.

**7.6 ATAMA SORUNLARI**

Ulaştırma sorunlarında her arz noktasının bir talep noktasına atanmasını ve her talebin karşılanmasını gerektiren özel bir durum söz konusudur. Bu tip sorunlar “atama sorunları” olarak isimlendirilir. Örneğin hangi işçinin veya makinenin hangi işi yapacağını belirlemek bir atama sorunudur.

7.6.1 DP Gösterimi

Bir atama sorununda bir arz noktasını bir talep noktasına atamanın maliyeti c_{ij} 'dir.

Öte yandan, bir x_{ij} 0-1 tamsayı değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır:

$x_{ij} = 1$ eğer i . arz noktası j . talep noktasının talebini karşılamak üzere atanırsa

$x_{ij} = 0$ eğer i . arz noktası j . talep noktasının talebini karşılamazsa

Bu durumda, bir atama sorununun genel DP gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{öyle ki } \sum_j x_{ij} = 1 \quad (i=1,2, \dots, m) \quad \text{Arz kısıtları}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad (j=1,2, \dots, n) \quad \text{Talep kısıtları}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ veya } x_{ij} = 1$$

7.6.2 Macar Yöntemi

Tüm arz ve talep miktarları tamsayı olduğundan, en iyi çözümdeki tüm değişkenler de tamsayı olmalıdır. Her kısıtın ST değeri 1'e eşit olduğundan, her x_{ij} 1'den büyük olmayan ve negatif olmayan bir tamsayı olmalıdır. Bu durumda her x_{ij} 0 veya 1 olmalıdır.

$x_{ij} = 0$ veya $x_{ij} = 1$ kısıtlamasını DP gösteriminde ihmal edersek, her arz noktasının bir adet arz ettiği ve her talep noktasının bir adet talep ettiği dengeli bir ulaştırma sorunu ile karşılaşırız.

Fakat atama sorununun ulaştırma simpleks yöntemi ile çözülmesi yukarıda verilen kısıtlamayı kullanmayacağı için etkin olmayacaktır.

Bu yüzden simpleks'den daha basit bir algoritma olan Macar Yöntemi ile atama sorunları çözülür.

Uyarı

1. Amaç fonksiyonunun enbüyüklenmesi istenilen atama sorunlarında karlar matrisindeki elemanların -1 ile çarpılarak sorunun **enküçükleme** sorunu olarak Macar Yöntemi ile çözülmesi gerekir.
2. Eğer maliyet matrisinde satır ve sütun sayıları eşit değilse atama sorunu **dengesizdir**. Bu durumda sorunu Macar Yöntemi ile çözmeden önce bir veya daha fazla sayıda yapay nokta eklenerek dengelenmelidir..

Adımlar

1. $m \times m$ 'lik maliyet matrisinin her satırındaki en küçük maliyeti bulunuz.
2. Her maliyetten kendi satırındaki en küçük maliyeti çıkararak bir matris kurunuz.
3. Yeni matrisde her sütunun en küçük maliyetini bulunuz.
4. her maliyetten kendi sütunundaki en küçük maliyeti çıkararak yeni bir matris (indirgenmiş maliyet matrisi) kurunuz.

5. İndirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfırları örtecek şekilde en az sayıda (yatay veya düşey) çizgi çizin. Eğer bu işlem için m adet çizgi gerekli ise en iyi çözüm bulunmuştur. Eğer gerekli çizgi sayısı m adetten az ise bir sonraki adıma geçiniz.
6. İndirgenmiş maliyet matrisinde Adım 5'de çizilen çizgiler ile örtülmemiş en küçük maliyeti (k) bulunuz.
7. Her üstünden çizgi geçmeyen maliyetten k 'yı çıkarınız ve çift çizgi ile örtülen her maliyete k 'yı ekleyiniz. Adım 5'e dönünüz.

Örnek 7.15. Uçuş Ekibi

(Winston 7.5.'den esinlenilmiştir)

Dört adet kaptan pilot (P1, P2, P3, P4) uçuşlarda beraber oldukları dört adet uçuş teknisyenini (T1, T2, T3, T4) yetkinlik, uyum ve moral motivasyon açısından 1-20 ölçeğinde değerlendirmişlerdir (1: çok iyi, 20: çok kötü). Değerlendirme notları tabloda verilmiştir. Havayolu şirketi her uçuş teknisyeninin kaptan pilotlara atamasını bu değerlendirmelere göre yapmak istemektedir.

	T1	T2	T3	T4
P1	2	4	6	10
P2	2	12	6	5
P3	7	8	3	9
P4	14	5	8	7

Yanıt:

Adım 1 & 2 Tablodaki her satır için en küçük maliyetler bulunur ve her maliyetten kendi satırındaki en küçük maliyet çıkarılır.

				Satır min					
2	4	6	10	2	⇒	0	2	4	8
2	12	6	5	2		0	10	4	3
7	8	3	9	3		4	5	0	6
14	5	8	7	5		9	0	3	2

Adım 3 & 4. Yeni matrisin her sütunun en küçük maliyeti bulunur. Her maliyetten kendi sütunundaki en küçük maliyeti çıkararak indirgenmiş maliyet matrisi elde edilir.

	0	2	4	8	⇒	0	2	4	6
	0	10	4	3		0	10	4	1
	4	5	0	6		4	5	0	4
	9	0	3	2		9	0	3	0
Sütun min	0	0	0	2					

Adım 5. Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi 3. ve 4. satır ile 1. sütunda çizilecek çizgiler indirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfırları örter. Gerekli en az çizgi sayısı 3'dür. 4'den az çizgi gerektiğinden çözüm en iyi değildir. Bir sonraki adıma geçilir.

0	2	4	6
0	10	4	1
4	5	0	4
9	0	3	0

Adım 6 & 7. Örtülememiş en küçük maliyet 1'dir. Her örtülmemiş maliyetten 1 çıkarılır ve iki çizgi ile örtülenlere 1 eklenir.

0	2	4	6		0	1	3	5
0	10	4	1	$\Rightarrow$	0	9	3	0
4	5	0	4		5	5	0	4
9	0	3	0		10	0	3	0

Yeni tabloda tüm sıfırları dörtten daha az çizgi ile örtmek mümkün değildir. En iyi çözüm bulunmuştur.

Sütun 3'deki tek sıfır x_{33} 'de ve Sütun 2'deki tek sıfır x_{42} 'dedir. Satır 4 tekrar kullanılmayacağı için Sütun 4 için kalan sıfır x_{24} 'dedir. Son olarak x_{11} 'i seçeriz. Seçilen tüm karar değişkenleri 1'e eşittir.

Rapor:

P1 T1 ile, P2 T4 ile, P3 T3 ile ve P4 T2 ile uçmalıdır.

Örnek 7.16. Enbüyüklenme sorunu

Aşağıda amaç fonksiyonu enbüyüklenme (maksimizasyon) olan bir atama probleminin amaç fonksiyonu katsayıları verilmiştir. Problemi Macar Yöntemiyle çözünüz.

	F	G	H	I	J
A	6	3	5	8	10
B	2	7	6	3	2
C	5	8	3	4	6
D	6	9	3	1	7
E	2	2	2	2	8

Yanıt:

Enbüyüklenme problemlerinde Macar Yöntem uygulayabilmek için tablodaki katsayılarla ön işleme yapılması gerekir. Bu iki yolla yapılabilir.

Birinci yol: Tüm katsayılar -1 ile çarpılarak problem enküçüklemeye dönüştürülür ve Macar Yöntem yukarıda verilen adımlara göre uygulanır. Bu yolda başlangıç tablosu şu şekilde olacaktır.

	F	G	H	I	J
A	-6	-3	-5	-8	-10
B	-2	-7	-6	-3	-2
C	-5	-8	-3	-4	-6
D	-6	-9	-3	-1	-7
E	-2	-2	-2	-2	-8

İkinci Yol: her satırda en büyük değer bulunarak, en büyük değerden satırdaki değerler çıkarılarak ilk adım uygulanır. Sonrasında Macar Yöntem 3. adımdan başlayarak aynı şekilde uygulanır.

	F	G	H	I	J	Maks
A	6	3	5	8	10	10
B	2	7	6	3	2	7
C	5	8	3	4	6	8
D	6	9	3	1	7	9
E	2	2	2	2	8	8

Her değer için, kendi satırındaki maksimumdan kendi değeri çıkarılır:

	F	G	H	I	J
A	4	7	5	2	0
B	5	0	1	4	5
C	3	0	5	4	2
D	3	0	6	8	2
E	6	6	6	6	0
Min	3	0	1	2	0

Bu tablodan sonra Mayar Yöntemi aynı şekilde uygulanır. Örneğin sonraki adımda her sütunun en küçüğü bulunarak her değerden kendi sütununun en küçüğü çıkarılacaktır:

	F	G	H	I	J
A	1	7	4	0	0
B	2	0	0	2	5
C	0	0	4	2	2
D	0	0	5	6	2
E	3	6	5	4	0

Sonraki adımları lütfen kendiniz uygulayın.

Rapor:

En iyi kar = 36, Atamalar: A-I, B-H, C-G, D-F, E-J

Alternatif en iyi çözüm: A-I, B-H, C-F, D-G, E-J

Örnek 7.17. Dört iş beş işçi tarafından aşağıda verilen tablodaki zamanlarda yapılabilir. Süreler dakika cinsinden verilmiştir. Çizgiler (--) o işçinin o işi yapamayacağını göstermektedir. Toplam gerekli zamanı en küçükleme için hangi iş hangi işçiye atanmalıdır?

İşçi	İş A	İş B	İş C	İş D
1	22	18	30	18
2	18	--	27	22
3	26	20	28	28
4	16	22	--	14
5	21	--	25	28

Yanıt:

Problemi dengeli hale getirmek için yapay iş ilave edilmelidir. (--) ile gösterilen yerlere atama yapılmaması için büyük bir maliyet (M) girilmelidir. Atama için başlangıç tablosu aşağıdaki gibi olacaktır:

İşçi	İş A	İş B	İş C	İş D	Yapay İş
1	22	18	30	18	0
2	18	M	27	22	0
3	26	20	28	28	0
4	16	22	M	14	0
5	21	M	25	28	0

Bu tablodan başlayarak Macar Yöntem uygulanabilir. Çözerken M yerine 100 gibi tablodaki diğer değerlere göre göreceli olarak yüksek bir sayı yazılabilir.

Rapor

En düşük maliyet = 75

Atamalar: 1-B, 2- A, 3-Yapay, 4-D, 5-C

3. İşçinin Yapay'a atanması, o işçiye iş atanmayacağını göstermektedir.

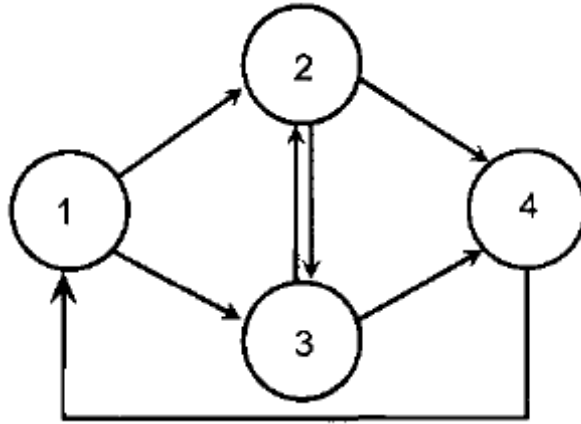
8. AĞ MODELLERİNE GİRİŞ

Telefon hatları, internet, kara yolları, elektrik sistemleri ve su dağıtım sistemleri gibi bir çok fiziksel yapı yaşamımızın içerisinde olan çok bilinen ağlardır. Bu sistemler, ürünlerin en kısa yolla veya en düşük maliyet ile istenilen yerlere gönderilmesi gibi ortak problemler içerirler. Bu fiziksel ağlar gibi bir çok eniyileme problemi de ağ gösterimi ile analiz edilebilir.

Ağ eniyilemesi konusunun kökleri 1940'lara doğrusal programlamanın gelişmesine kadar gider. Bundan sonra teorik ve uygulama araştırmalarının artması ve pratik birçok probleme uygulanması ile ağ eniyilemesi konusu hızla gelişmiştir.

Ders kapsamında birkaç önemli ağ modelinin tanıtımı yapılacaktır: bu konular içerisinde en kısa yol problemi, en büyük akış problemi, en küçük maliyetli akış problemi ve proje yönetimi vardır.

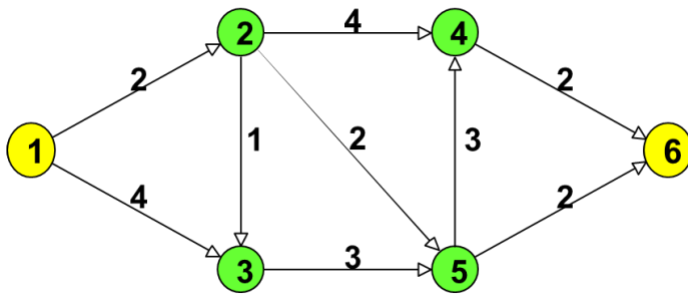
Bir ağ veya çizge iki ana unsur ile tanımlanır. Bir yönlü $G(N,S)$ ağı sonlu düğüm (köşe, nokta) kümesi $N = \{1,2,..., m\}$ ve bu düğümleri birbirlerine bağlayan sonlu yönlü bağlantı (yay, dal, çizgi) kümesi $S = \{(i,j), (k,l),..., (s, t)\}$ ile tanımlanır. (i,j) bağlantısı i ve j düğümlerini i 'den j yönüne bağlar. Bir ağın m düğüm ve n bağlantıdan oluştuğu varsayılabilir. Örneğin aşağıdaki ağ dört düğüm ve yedi bağlantıdan oluşmaktadır ve $N = \{1,2,3,4\}$, $S = \{(1,2), (1,3), (2,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1)\}$.



8.1 EN KISA YOL PROBLEMİ

m düğüm ve n bağlantıdan oluşan bir $G(N,S)$ ağını göz önüne alalım. Her $(i,j) \in S$ bağlantısı için bir c_{ij} maliyeti verilsin. Bir başlangıç noktasından (düğüm 1) bitiş noktasına (düğüm m) en kısa rotayı bulma problemine en kısa yol problemi denir.

Örnek 8.1. Firmalara kargo hizmeti veren ATK-Brown şirketi, bir müşterisinin ürünlerini dağıtım merkezinden (düğüm 1) müşterinin deposuna (düğüm 6) taşımak istemektedir. Olası yollar ve km cinsinden uzunlukları aşağıdaki şekilde verilmiştir. Burada problem 1. noktadan 6. noktaya ulaşmak için en kısa rotayı belirlemektir.



8.1.1 En kısa yol probleminin DP gösterimi

$x_{ij} = 0$ veya 1; (i,j) bağlantısının en kısa yol üzerinde olup olmadığı göstermek üzere,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

Öyle ki; $\sum_{j=1}^m x_{1j} = 1$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0 \quad i=2, \dots, m-1$$

$$\sum_{i=1}^m x_{im} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ veya } 1, i,j=1,2,\dots,m.$$

Burada toplamalar ağdaki mevcut olan bağlantılar için hesaplanır.

8.1.2 Dijkstra Algoritması

Tüm $c_{ij} \geq 0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durum için bir noktadan (düğüm 1) diğer tüm noktalara en kısa yolu veren çok basit ve etkin bir yöntem vardır: Dijkstra Algoritması. Bu yöntem bir etiketleme algoritmasıdır ve düğümleri önce geçici sonra da kalıcı olarak etiketleyerek ilerler.

BAŞLANGIÇ ADIMI

Başlangıç düğümü (düğüm 1) 0 olarak kalıcı etiketlenir.

Diğer tüm düğümler ∞ olarak geçici etiketlenir.

ANA ADIM

1) Tüm geçici etiketleri güncelle:

j düğümü geçici etiketi=

$$\min \begin{cases} j \text{ düğümünün mevcut geçici etiketi} \\ i \text{ düğümünün kalıcı etiketi} + (i, j) \text{ bağlantısının uzunluğu, } (i, j) \in S \text{ için} \end{cases}$$

2) En küçük geçici etikete sahip düğümün geçici etiketini kalıcıya çevir.

3) Ana adımı varış düğümünün kalıcı etiketini buluncaya kadar yürüt, bulunca dur.

En kısa rotayı bulabilmek için m 'den 1'e geriye doğru; etiketleri arasındaki fark aralarındaki mesafeye eşit olan düğümlerden geçerek gidilir.

Örnek 8.2. Örnek 1'deki problem için en kısa yolu bulunuz.

Yanıt: $P(i)$: i 'nin kalıcı etiketi; $T(i)$: i 'nin geçici etiketi olmak üzere;

BAŞLANGIÇ ADIMI

$P(1) = 0$, $T(i) = \infty$, $i = 2, \dots, 6$.

ANA ADIM – 1'nci koşum

$T(2) = \min(\infty, P(1) + c_{12}) = \min(\infty, 2) = 2$

$T(3) = \min(\infty, P(1) + c_{13}) = \min(\infty, 4) = 4$

$T(4) = T(5) = T(6) = \infty$

Düğüm 2'nin geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; $P(2) = 2$.

ANA ADIM – 2'nci koşum

$T(3) = \min(4, P(2) + c_{23}) = \min(4, 2+1) = 3$

$T(4) = 6$, $T(5) = 4$, $T(6) = \infty$

Düğüm 3'nin geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; $P(3) = 3$.

ANA ADIM – 3'üncü koşum

$T(4) = 6$

$T(5) = \min(4, P(3) + c_{35}) = \min(4, 6) = 4$

$T(6) = \infty$

Düğüm 5'in geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; $P(5) = 4$.

ANA ADIM – 4'üncü koşum

$T(4) = \min(6, P(5) + c_{54}) = \min(6, 7) = 6$

$T(6) = \min(\infty, P(5) + c_{56}) = (\infty, 6) = 6$

Düğüm 6'nın geçici etiketini kalıcı hale getiriyoruz; $P(6) = 6$. Varış düğümünün kalıcı etiketi bulundu, dur.

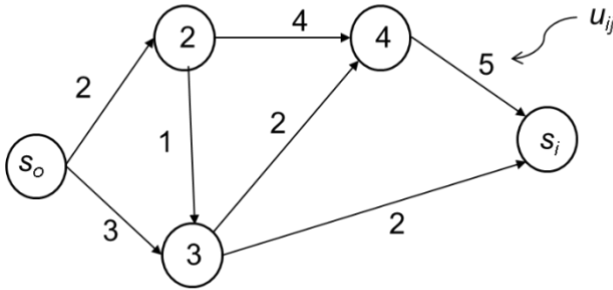
En kısa yol 1-2-5-6 düğümlerinden geçmektedir. Toplam maliyet (toplam uzaklık) 6 km'dir.

8.2 EN BÜYÜK AKIŞ PROBLEMİ

m düğüm ve n bağlantıdan oluşan bir $G(N,S)$ ağını göz önüne alalım. Ağ üzerinden tek bir ürünün akışı planlanmak istensin. Her $(i,j) \in S$ bağlantısının üzerinde akan ürün miktarı bir u_{ij} üst limiti ile sınırlandırılsın. Bu şekilde tanımlanan bir ağda bir başlangıç noktasından (düğüm 1) bitiş noktasına (düğüm m) en fazla ürün akışını bulma en büyük akış problemi olarak tanımlanır. Problemde herhangi bir maliyet söz konusu değildir.

Örnek 8.3. (Winston 8.3'ten esinlenilmiştir.)

ATK-Petrol aşağıda verilen ağ üzerinde s_o 'dan s_i 'ye bir saatte gönderilecek ham petrolü miktarını enbüyüklemek istemektedir. Ham petrol s_o 'dan s_i 'ye taşınırken 2, 3 ve 4 numaralı istasyonların hepsinden veya bir kısmından geçmelidir. Şekildeki bağlantılar farklı çaptaki boru hatlarını göstermektedir. Her bir bağlantı üzerinden bir saatte taşınabilecek en fazla petrol miktarları milyon varil cinsinden şekil üzerinde verilmiştir. Burada problem verilen şartlarda s_o 'dan s_i 'ye bir saatte gönderilecek en fazla ham petrol miktarını bulmaktır.



8.2.1 En büyük akış probleminin DP gösterimi

Düğüm 1'den düğüm m 'ye akış f ile; (i,j) bağlantısı üzerindeki akış x_{ij} ile gösterilmek üzere;

Maks f

Öyle ki; $\sum_{j=1}^m x_{1j} = f$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0 \quad i=2, \dots, m-1$$

$$\sum_{i=1}^m x_{im} = f$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$x_{ij} \geq 0, i,j=1,2,\dots,m.$$

Burada toplamlar ve eşitsizlikler ağıdaki mevcut olan bağlantılar için tanımlanmıştır.

Örnek 8.4. Örnek 3'te verilen problemi çözmek için gerekli DP'yi kurunuz.

Yanıt:

Maks f

Öyle ki;

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} &= f \\ x_{23} + x_{24} - x_{12} &= 0 \\ x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} &= 0 \\ x_{45} - x_{24} - x_{34} &= 0 \\ x_{45} + x_{35} &= f \\ x_{12} &\leq 2 \\ x_{13} &\leq 3 \\ x_{23} &\leq 1 \\ x_{24} &\leq 4 \\ x_{34} &\leq 2 \\ x_{35} &\leq 2 \\ x_{45} &\leq 7 \end{aligned}$$

Tüm değişkenler ≥ 0

(not: s_0 ve s_i noktalarının indis numaraları 1 ve 5 olarak alınmıştır.)

Örnek 8.5. Projeye işgücü planlama

Bir inşaat firması gelecek dört ay içinde üç projeyi bitirmek zorundadır. Projelerin bitirilmesi gereken zamanları ve bu sürede gerekli toplam işgücü miktarı (adam*ay olarak) tabloda verilmiştir. Firmanın elinde 8 adet işçi bulunmaktadır. Bir projede bir ayda en fazla 6 işçi görevlendirilebilir. Üç projenin zamanında tamamlanıp tamamlanmayacağını bulabilmek için bir en büyük akış problemi tanımlayınız. (İpucu: Eğer en büyük akış 30 olursa projeler zamanında tamamlanır.)

Proje no	Bitirme zamanı	Gerekli işgücü
1	3. ay sonu	8 adam*ay
2	4. ay sonu	10 adam*ay
3	2. ay sonu	12 adam*ay

8.3 EN KÜÇÜK MALİYETLİ AKIŞ PROBLEMİ

En küçük maliyetli akış problemi ders kapsamında işlenen ulaştırma, atama, geçici konaklama, en küçük maliyetli akış, en büyük akış ve CPM problemlerinin en genel halidir. En küçük maliyetli akış problemine düğümler için talep ve arz değerleri ile

bağlantılarla ilgili maliyetler ve üst / alt sınırlar dahil edilebilir. Problemin tanımı aşağıda verilmiştir.

m düğüm ve n bağlantıdan oluşan bir $G(N,S)$ ağını göz önüne alalım. N kümesindeki her i düğümü için bir b_i tanımlanır. b_i , eğer $b_i > 0$ ise arz miktarını, eğer $b_i < 0$ ise talep miktarını ifade eder. i düğümleri; eğer $b_i > 0$ ise arz noktası, eğer $b_i < 0$ ise talep noktası olarak sınıflandırılabilir. Eğer $b_i = 0$ ise i düğümü arz veya talep noktası değildir, geçici konaklama veya ara nokta olarak isimlendirilebilir. Her $(i,j) \in S$ bağlantısı için bağlantı üzerindeki akış x_{ij} gösterilsin. Ayrıca her bağlantı için c_{ij} maliyeti ve bağlantı üzerindeki akışın en büyük ve en küçük miktarları u_{ij} ve l_{ij} verilsin.

En küçük maliyetli akış problemi, verilen şartlarda kullanılabilir arzın ağ boyunca taşınarak talepleri en küçük maliyetle taşınması olarak tanımlanır.

Matematiksel olarak problem aşağıdaki DP ile ifade edilebilir (toplamlar ve eşitsizlikler ağıdaki mevcut olan bağlantılar için tanımlanmıştır.)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Öyle ki;} \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = b_i \quad i=1, \dots, m$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j=1, 2, \dots, m.$$

Burada akış dengeleme denklemleri olarak ifade edilen ilk kısıt i düğümündeki net akışın b_i 'ye eşit olmasını sağlar. İkinci kısıt bağlantılardaki akışın alt ve üst sınırlar içerisinde kalmasını sağlar.

Örnek 8.6. (Winston 8.5'ten esinlenilmiştir.)

Aşağıda verilen yol ağına her saat 1 noktasından 900 araç girmektedir. Bu araçlardan 300 tanesi 4 noktasından, 500 tanesi 6 noktasından ve 100 tanesi de 5 noktasından çıkacaktır. Şekil üzerinde her bağlantı üzerinde, araçların bağlantıyı geçme süresi (dakika olarak) ve bağlantıdan bir saatte geçebilecek azami araç sayısı verilmiştir. tüm araçların 1 noktasından 4, 5 ve 6 noktalarına en kısa sürede varması için problemi en küçük maliyetli akış problemi olarak modelleyiniz.

