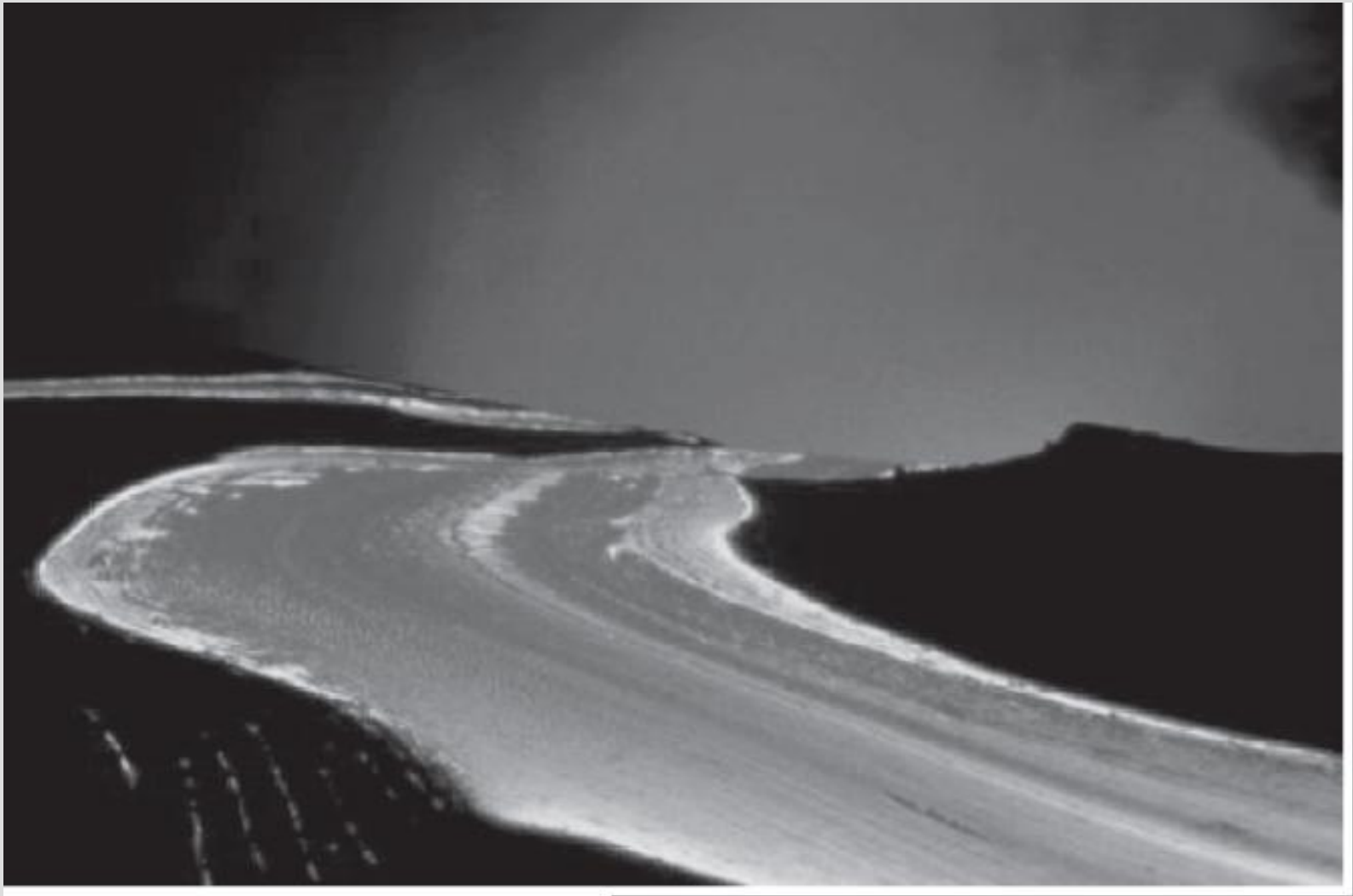


Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications, 2nd Edition
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala
McGraw-Hill, 2010

Bölüm 10
NAVIER–STOKES
DENKLEMİNİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİ

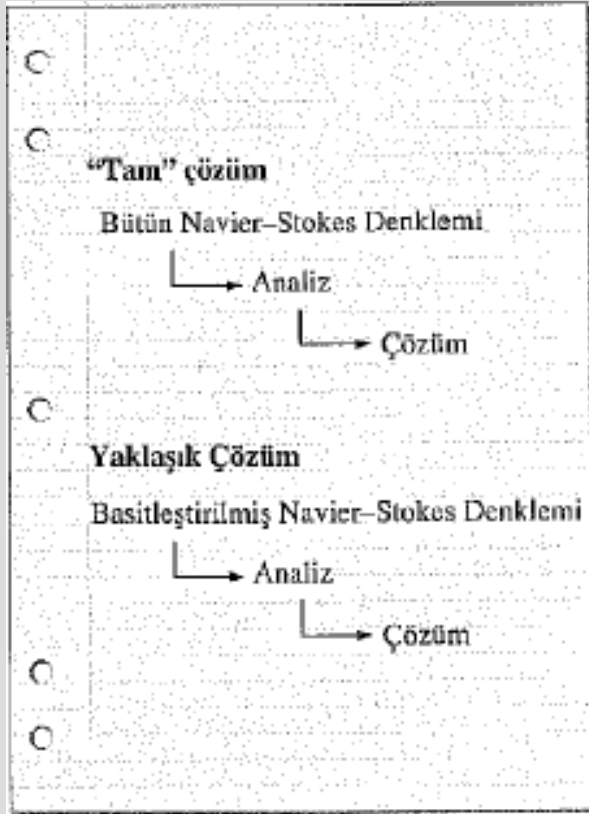


Bu bölümde Navier-Stokes denklemini, bazı terim ya da terimleri yok etmek suretiyle daha kolay çözülebilir basit bir forma indirgeyen birkaç yaklaşımla üzerinde duracağız. Lavın bir volkandan akışı, sürünme akışına iyi bir örnektir—eriyen kayaların viskozitesi o kadar büyüktür ki boyu uzun olmasına rağmen Reynolds sayısı çok küçüktür.

Amaçlar

- Pek çok akış problemi çözümede yaklaşıtlara neden gereksinim duyulduğunu anlayabilme ve bunların ne zaman ve nerede uygun olduğunu değerlendirebilme
- Sürünme akışı yaklaşımında denklemlerden yoğunluk teriminin kalkması da dahil olmak üzere atalet terimlerinin yokluğunun etkilerini anlayabilme
- Potansiyel akış problemlerinin bir çözüm yöntemi olarak süperpozisyon ilkesinin anlaşılabilmesi
- Sınır tabaka kalınlığı ve diğer sınır tabaka özelliklerinin anlaşılabilmesi

10-1 ■ GİRİŞ



Yaklaşık çözüme, Navier-Stokes denkleminin çözümüne başlamadan önce elde edilen basitleştirilmiş bir formu ile başlanırken "tam" çözüme Navier-Stokes denkleminin bütününden başlanır.

Bölüm 9 'da sabit özelliklere sahip Newton tipi bir akışkan için **doğrusal momentumun korunumuna ait diferansiyel denklemi-Navier-Stokes denklemi-** türettik.

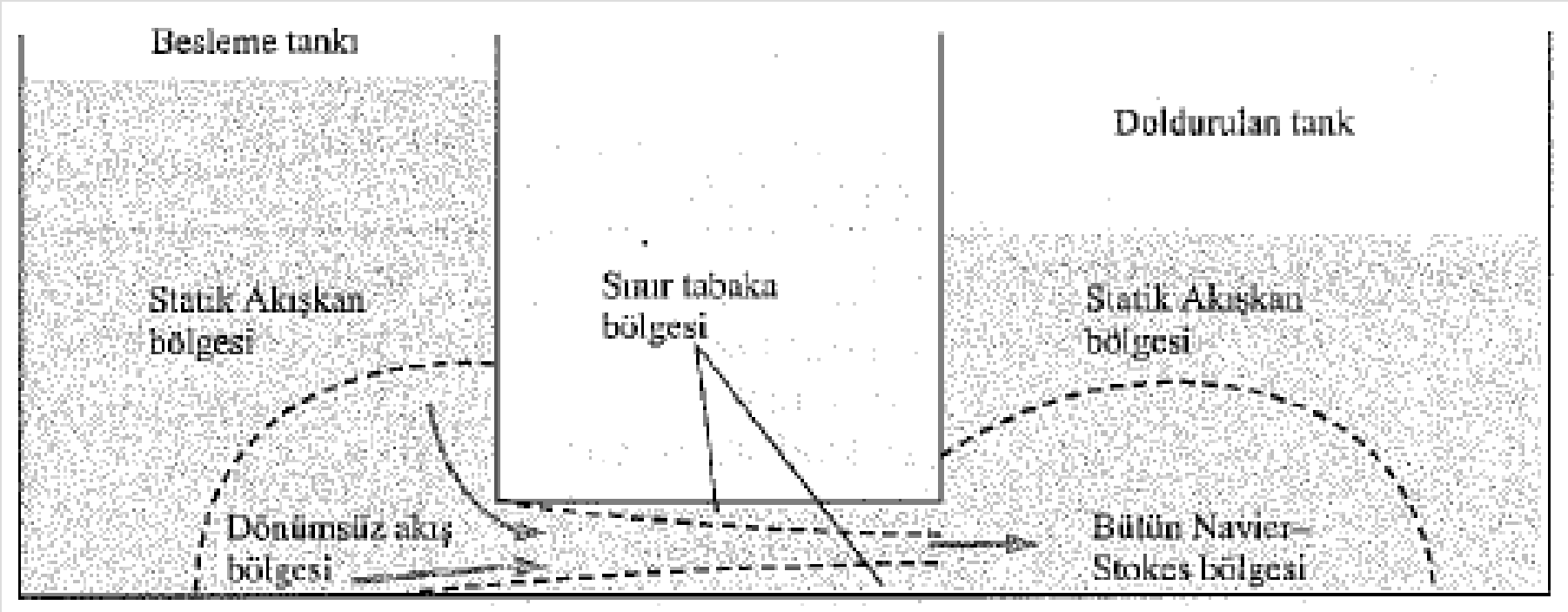
Uygulamadaki akışkanlar mekaniği problemlerinin büyük bir bölümü analitik olarak **çözülemez**. Bu yüzden

- (1) Daha fazla sayıda **yaklaşım**
- (2) **Bilgisayar yardımı** gerektirir.

Biz burada 1. seçeneği göz önüne alacağız.

Basitlik bakımından bu bölümde yalnızca sıkıştırılmaz Newton tipi akışkanları dikkate alacağız.

Uyguladığımız yaklaşımlara çok dikkat etmeli ve her zaman, her nerede olursa olsun yaklaşımlarımızı doğrulamalı ve desteklemeliyiz.



Navier-Stokes denkleminin belirli bir yaklaştırımı, akış alanının sadece bazı *bölgelerinde* uygun olurken, diğer yaklaşımlar akış alanının diğer bölgelerine uygun gelebilir.

10-2 ■ BOYUTSUZLAŞTIRILMIŞ HAREKET DENKLEMLERİ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Süreklilik ve momentum denklemlerini boyutsuzlaştırmada kullanılan ölçeklendirme parametreleri ve ana boyutları

Ölçeklendirme parametresi	Tarif	Ana boyutlar
L	Karakteristik boy	{L}
V	Karakteristik hız	{L t ⁻¹ }
f	Karakteristik frekans	{t ⁻¹ }
$P_0 - P_\infty$	Referans basınç farkı	{m L ⁻¹ t ⁻² }
g	Yerçekimi ivmesi	{L t ⁻² }

$$t^* = ft \quad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \quad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V}$$

$$P^* = \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} \quad \vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{g} \quad \vec{\nabla}^* = L \vec{\nabla}$$

Kartezyen koordinatlar

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{L\partial\left(\frac{x}{L}\right)}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{y}{L}\right)}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{L} \vec{\nabla}^*$$

Silindirik koordinatlar

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{L\partial\left(\frac{r}{L}\right)}, \frac{1}{L\left(\frac{r}{L}\right)} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{L\partial\left(\frac{z}{L}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial r^*}, \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{L} \vec{\nabla}^*$$

$$\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho \left(V\vec{V}^* \cdot \frac{\vec{\nabla}^*}{L} \right) V\vec{V}^* = \frac{\rho V^2}{L} (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^*$$

$$\frac{V}{L} \vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0$$

Boyutsuz süreklilik denklemi:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0$$

$$\rho V f \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{L} (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = -\frac{P_0 - P_\infty}{L} \vec{\nabla}^* P^* + \rho g \vec{g}^* + \frac{\mu V}{L^2} \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

$$\left[\frac{fL}{V} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2} \right] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{gL}{V^2} \right] \vec{g}^* + \left[\frac{\mu}{\rho VL} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

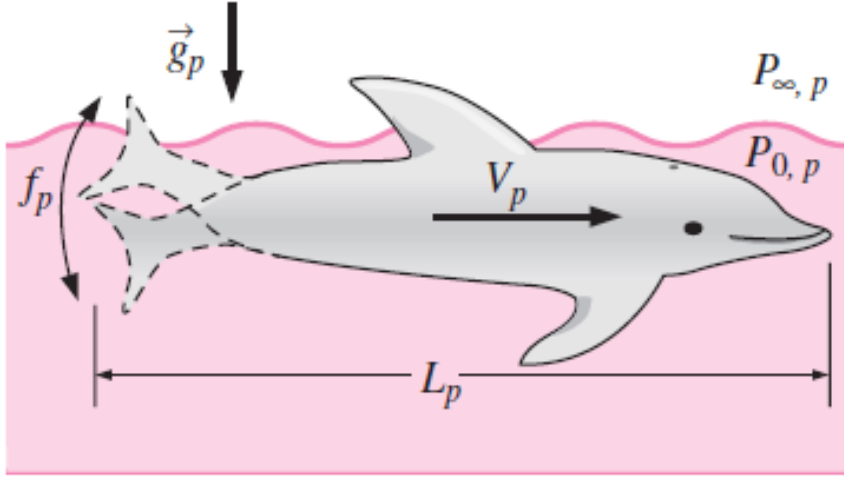
Boyutsuzlaştırılmış Navier–Stokes:

$$[St] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = -[Eu] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{Fr^2} \right] \vec{g}^* + \left[\frac{1}{Re} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

Gradyen operatörü, koordinat sistemi seçimine bağlı kalmaksızın Denklem 10-3 ile boyutsuzlaştırılır.

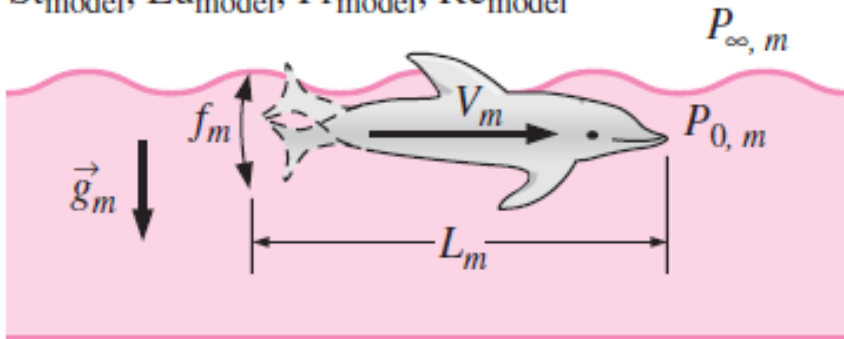
Prototype

$St_{\text{prototype}}, Eu_{\text{prototype}}, Fr_{\text{prototype}}, Re_{\text{prototype}}$



Model

$St_{\text{model}}, Eu_{\text{model}}, Fr_{\text{model}}, Re_{\text{model}}$

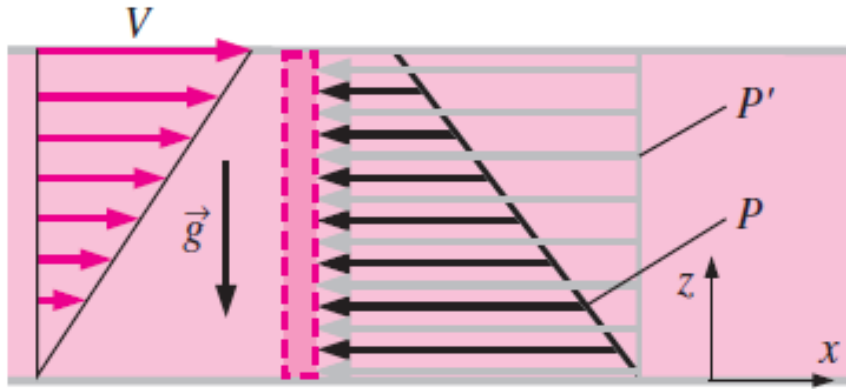


Serbest yüzey etkili akışlarda yerçekimi, akış dinamiğini etkilemez - tek etkisi, dinamik basınç alanı üzerine bir hidrostatik basınç eklemekten ibarettir.

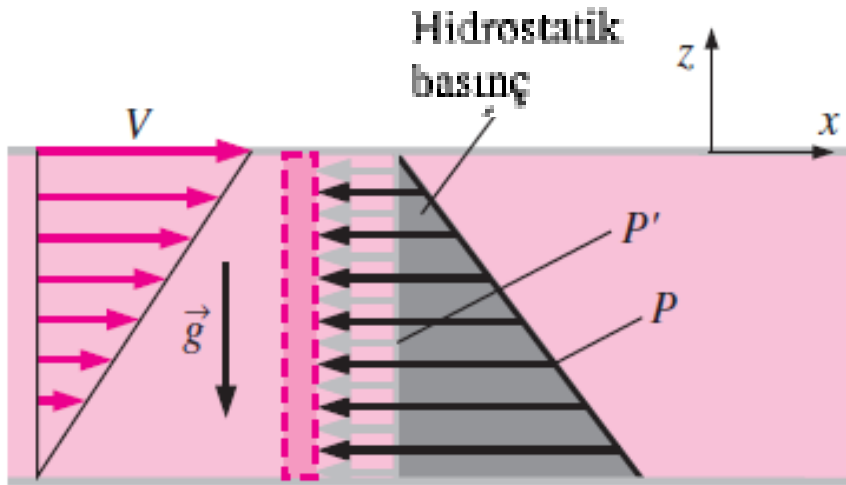
Değiştirilmiş basınç: $P' = P + \rho g z$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P' + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Prototip (alt indis p) ve model (alt indis m) arasındaki tam dinamik benzerlik için model, geometrik olarak prototipe benzemelidir ve (genellikle) boyutsuz dört parametre de, St , Eu , Fr ve Re , aynı olmalıdır.



(a)



(b)

Sonsuz, paralel ve yatay iki düz plaka arasındaki Couette akışında bir akışkan elemanının sağ yüzündeki basınç ve değiştirilmiş basınç dağılımları: (a) Alt plakada $z = 0$ ve (b) üst plakada $z = 0$. Değiştirilmiş basınç P' sabit olmakla birlikte gerçek basınç P her iki durumda da sabit değildir, (b)'de görülen gölgeli alan hidrostatik basınç bileşenini temsil etmektedir.

10-3 ■ SÜRÜNME AKIŞI YAKLAŞTIRMASI

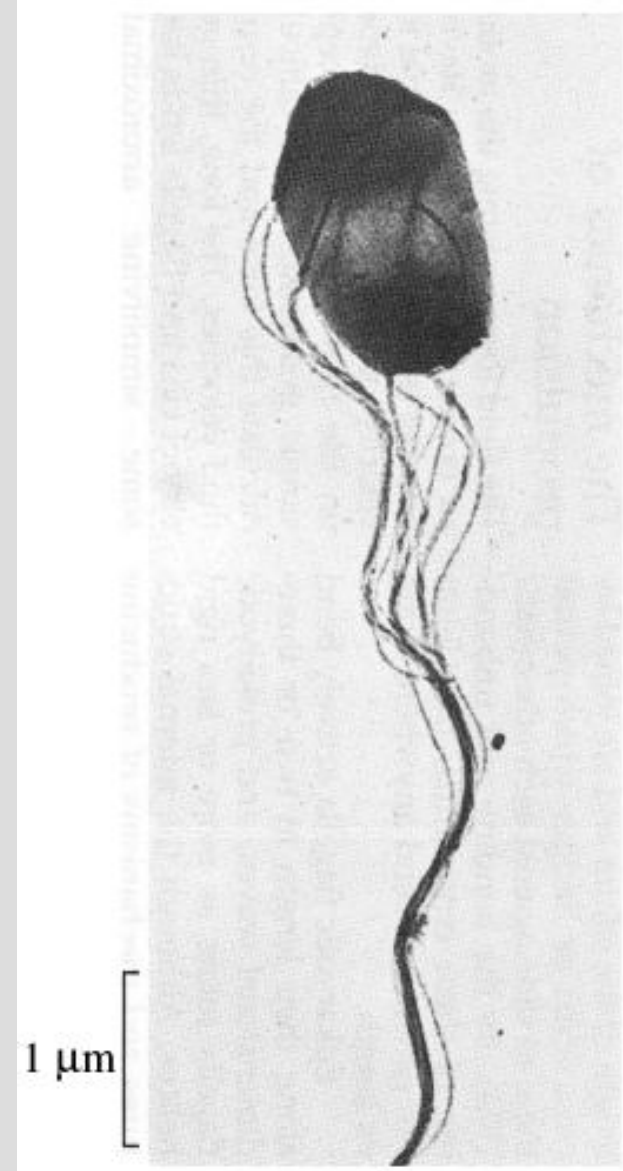
Ele alacağımız ilk yaklaştırmamız, sürünme akışı olarak adlandırılan akış türüdür. Bu tür akışlar için **Stokes akışı** ve **düşük Reynolds sayılı akış** deyimleri de kullanılmaktadır.

Son isimlendirmeden anlaşılacağı gibi bunlar Reynolds sayısının çok küçük ($Re \ll 1$) olduğu akış türleridir. Reynolds sayısının tanımından hareketle, $Re = \rho V L / \mu$, sürünme akışının ya çok küçük ρ , V , L değerlerinde ya da çok yüksek μ , değerinde (veya bunların bir kombinasyonu halinde) ortaya çıktığını görüyoruz.



Suda yüzen *Salmonella abortusequi* bakterisi.

Bal benzeri çok viskoz bir sıvının yavaş akışı sürünme akışı olarak sınıflandırılır.



Sürünme akışı yaklaşımı:

$$[\text{Eu}] \vec{\nabla}^* P^* \cong \left[\frac{1}{\text{Re}} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

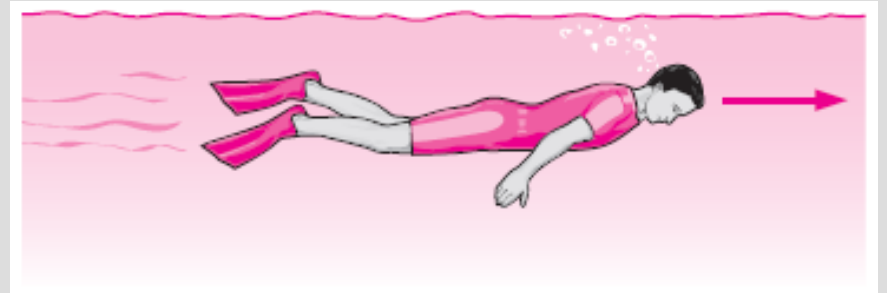
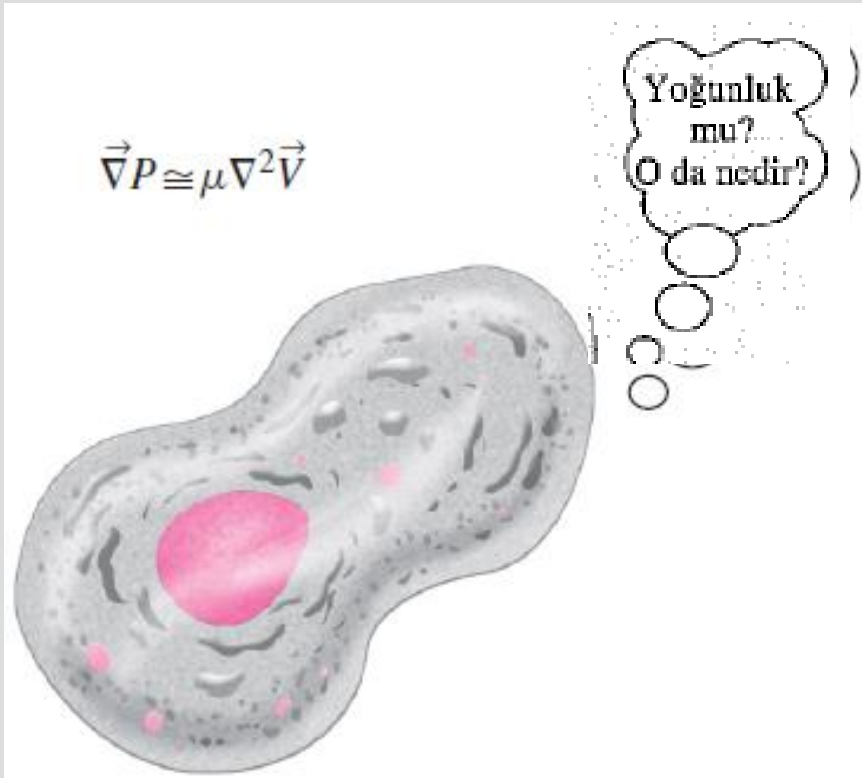
$$[\text{Eu}] = \frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2} \sim \left[\frac{1}{\text{Re}} \right] = \frac{\mu}{\rho V L}$$

Sürünme akışı için basınç ölçeği:

$$P_0 - P_\infty \sim \frac{\mu V}{L}$$

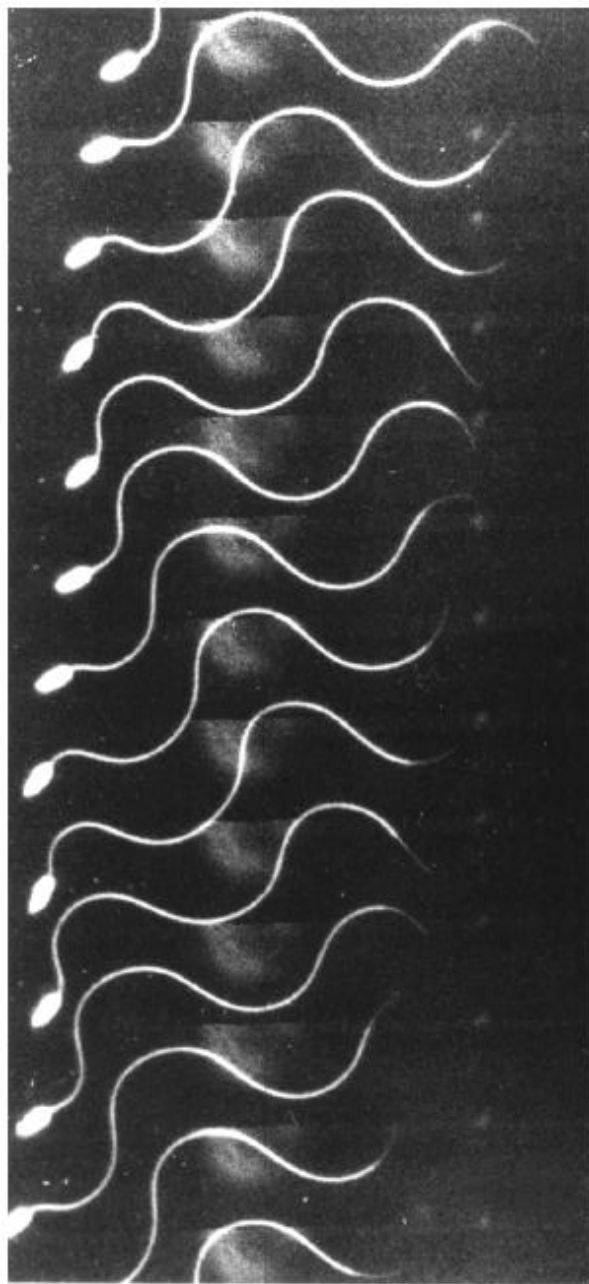
Sürünme akışı için Navier-Stokes denkleminin yaklaşık ifadesi:

$$\vec{\nabla} P \cong \mu \nabla^2 \vec{V}$$



Bir kimse çok yüksek Reynolds sayısında yüzer ve atalet terimleri büyüktür; böylece hareket etmeksizin uzun mesafeleri süzülerek kat edebilir.

Sürünme akışı yaklaşımında yoğunluk momentum denkleminde yer almaz.



10 μm



Plastik toplarla dolu bir havuzda hareket etmeye çalışan bir çocuk, ataletten faydalanmaksızın kendini ileriye doğru itirmeye çalışan bir mikroorganizmaya benzer.

Deniz suyunda yüzen bir tür omurgasız olan *Ciona* 'ya ait sperm; saniyede 200 kare fotoğraf alınmıştır.

ÖRNEK 10-1 Sürünme Akışında Bir Cisme Etki Eden Direnç

Yoğunluk Navier–Stokes denkleminde yok olduğundan, sürünme akışında bir cisim üzerindeki aerodinamik direnç yalnızca bu cismin V hızına, L karakteristik boyuna ve akışkanın μ viskozitesine bağlıdır (Şekil 10-12). Boyut analizini kullanarak F_D için bu bağımsız değişkenlerin fonksiyonu şeklinde bir bağıntı geliştiriniz.

ÇÖZÜM Boyut analizini kullanarak F_D ile değişkenler V , L ve μ arasında bir bağıntı geliştireceğiz.

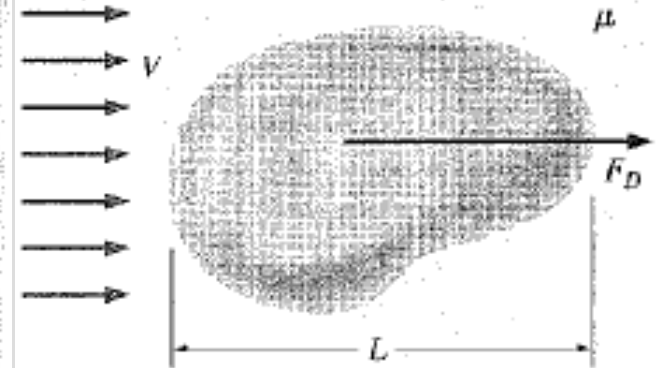
Kabuller 1 Sürünme akışı yaklaşımını uygulayabilmek için $Re \ll 1$ olduğunu kabul ediyoruz. 2 Yerçekimi etkileri önemsizdir. 3 Yukarıda sayılan parametrelerin dışında, problemle ilgisi bulunan başka parametre yoktur.

Analiz Bölüm 7’de tartışılan tekrarlayan değişkenler metodu adım adım takip edilmelidir, bunun ayrıntıları bir alıştırmaya bırakılmıştır. Bu problemde dört adet parametre vardır ($n = 4$). Üç ana boyut vardır: kütle, uzunluk ve zaman, dolayısıyla $j = 3$ ’tür. V , L ve μ ’yi tekrarlayan değişkenler olarak alalım. $k = n - j = 4 - 3 = 1$ olduğundan tek bir Π terimi vardır ve bu Π ’nin bir sabite eşit olması gerekir. Sonuç olarak,

$$F_D = \text{sabit} \cdot \mu V L$$

elde edilir. Böylece herhangi bir üç-boyutlu cismin etrafındaki sürünme akışında aerodinamik direnç kuvvetinin basit olarak bir sabitle $\mu V L$ ifadesinin çarpımına eşit olduğu görülmektedir.

İrdeleme Bu sonuç oldukça önemlidir, zira yapılması gereken tek şey cismin şeklinin bir fonksiyonu olan sabitin bulunmasından ibarettir.



ŞEKİL 10-12

Üç-boyutlu bir cisim üzerindeki sürünme akışında cisme etki eden aerodinamik direnç yoğunluğuna bağlı değildir. Bu kuvvet sadece cismin hızı V 'ye, cismin bir karakteristik boyutu L 'ye ve akışkan viskozitesi μ 'ye bağlıdır.

Sürünme Akışında Bir Küre Üzerindeki Direnç

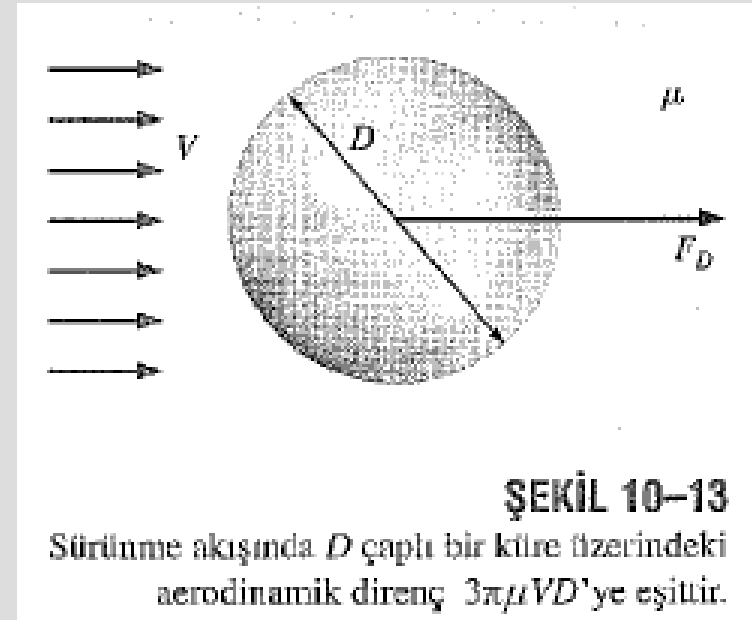
Viskozitesi μ olan bir akışkan içerisinde V hızındaki sürünme akışı şartlarında, üç-boyutlu, L karakteristik uzunluğuna sahip bir cisme etkiyen F_D direnç kuvveti; $F_D = \text{sabit} \cdot \mu VL$ ile verilir.

Boyut analizi; cismin şekline ve akışkan içerisindeki yerleştirme biçimine bağlı olduğundan, ifadedeki sabitin değeri hakkında fikir vermez.

Cismin bir *küre* olması durumunda Denklem 10-11 analitik olarak çözülebilir.

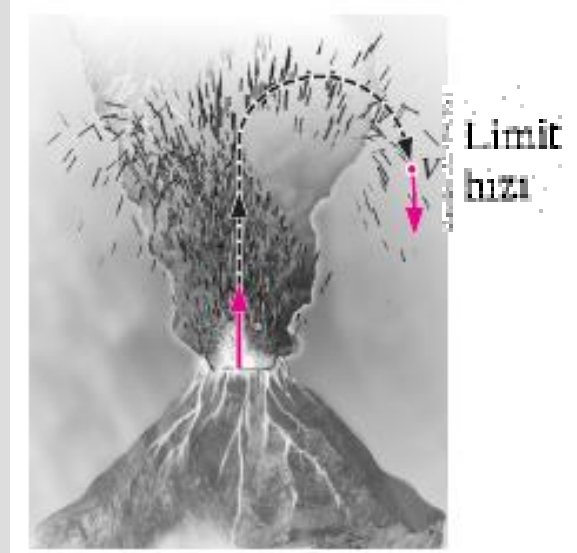
Sürünme akışında bir küre üzerindeki direnç kuvveti:

$$F_D = 3\pi\mu VD$$



ÖRNEK 10-2 Bir Yanardağdan Fırlayan Parçacığın Limit Hızı

Bir yanardağ püskürmesi sırasında volkanik taşlar, buhar ve küllerle beraber yüzlerce metre yüksekliğe çıkabilir (Şekil 10-14). Bir süre sonra, parçacıklar yeryüzüne dönmeye başlar. 50 μm çapında yaklaşık olarak küresel şekilli bir kül parçacığının $-50\text{ }^\circ\text{C}$ sıcaklıkta ve 55 kPa basınçtaki hava içerisinde düşmesini göz önüne alınız. Parçacığın yoğunluğu 1240 kg/m^3 'tür. Verilen yükseklikte parçacığın limit hızını belirleyiniz.



ŞEKİL 10-14

Bir yanardağdan püsküren küçük kül parçacıkları yavaşça yere iner; bu tip bir akış alanı için sürünme akışı yaklaşımını uygundur.

ÇÖZÜM Düşen bir kül parçacığının limit hızını belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Reynolds sayısı çok küçüktür (çözümü tamamladıktan sonra bunu doğrulamamız gerekecek). 2 Parçacık küresel şekle sahiptir.

Özellikler Verilen basınç ve sıcaklıkta ideal gaz yasasından $\rho = 0.8588\text{ kg/m}^3$ elde edilir. Viskozite basıncın zayıf bir fonksiyonu olduğundan $-50\text{ }^\circ\text{C}$ ve atmosferik basınçtaki değerini kullanalım, $\mu = 1.474 \times 10^{-5}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$.

Analiz Problemi sanki daimi olarak ele alıyoruz. Parçacık bir kez limit hızına ulaştığında, Şekil 10-15'te gösterildiği gibi aşağı yönlü olan net kuvvet (ağırlık) yukarı yönlü olan net kuvveti (aerodinamik direnç + kaldırma) dengeler.

Aşağı yönlü kuvvet:

$$F_{\text{ağırlık}} = W = \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{parçacık}} g \quad (1)$$

Parçacık üzerine etkiyen aerodinamik kuvvet Denklem 10-12'den elde edilir. Kaldırma kuvveti ise yer değiştiren havanın ağırlığına eşittir:

Yukarı yönlü kuvvet:

$$F_{\text{yukarı}} = F_D + F_{\text{kaldırma}} = 3\pi\mu VD + \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{hava}} g \quad (2)$$

Denklem 1 ve 2'yi eşitleyip ve limit hız V 'yi çekersek,

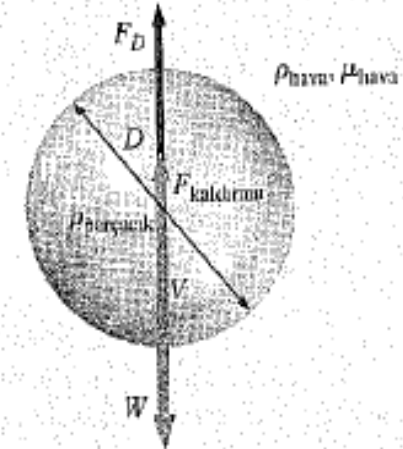
$$V = \frac{D^2}{18\mu} (\rho_{\text{parçacık}} - \rho_{\text{hava}})g$$
$$= \frac{(50 \times 10^{-6} \text{ m})^2}{18(1.474 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s})} [(1240 - 0.8588) \text{ kg/m}^3] (9.81 \text{ m/s}^2) = 0.115 \text{ m/s}$$

elde edilir. Son olarak sürünme akışının yerinde bir yaklaşım olması için, Reynolds sayısının yeterince küçük olduğundan emin olalım.

$$Re = \frac{\rho_{\text{hava}} V D}{\mu} = \frac{(0.8588 \text{ kg/m}^3)(0.115 \text{ m/s})(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{1.474 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 0.335$$

Sonuç olarak Reynolds sayısı 1'den küçüktür ancak, elbette 1'den çok küçük değildir.

İrdeleme Her ne kadar bir küre üzerindeki sürünme akış direnci için verdiğimiz denklem (Denklem 10-12) $Re \ll 1$ olması durumu için türetiliyse de, yaklaşımın $Re \approx 1$ 'e kadar iyi sonuç verdiği görülür. Bir Reynolds sayısı düzeltmesi ve hava moleküllerinin ortalama serbest yörüngesine dayalı bir düzeltmenin dahil edildiği daha kapsamlı bir hesaplama ile limit hızın değeri 0.110 m/s olarak elde edilir (Heinsohn ve C. Jimbala, 2003). Dolayısıyla sürünme akışı yaklaşımıyla yapılan hata yüzde 5'in altındadır.

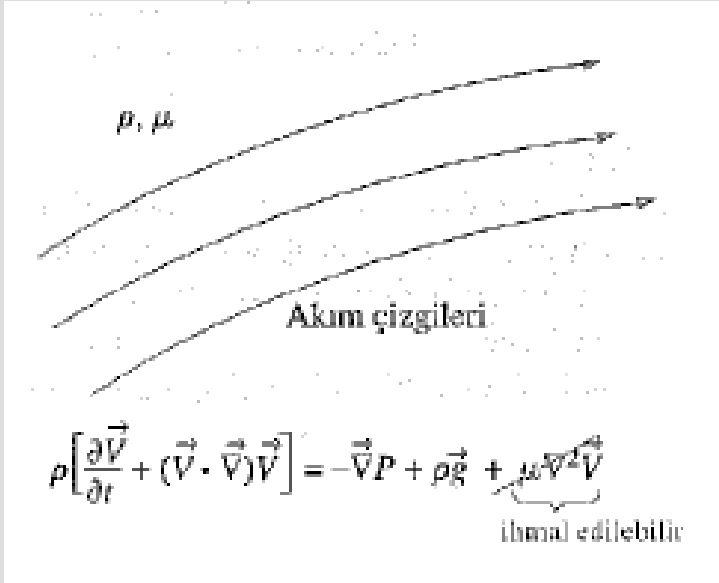


ŞEKİL 10-15

Daimi bir limit hızda düşmekte olan bir parçacığın ivmesi yoktur; dolayısıyla parçacığın ağırlığı parçacık üzerine etkileyen aerodinamik direnç ve kaldırma kuvveti ile dengelenir.

Yoğun ve küçük bir parçacığının sürünme akışı şartlarındaki limit hızı, akışkanın yoğunluğundan bağımsız olmasına karşın viskozitesine oldukça bağlıdır.

10–4 ■ VISKOZ OLMAYAN AKIŞ BÖLGELERİ İÇİN YAKLAŞTIRIM



Bir viskoz olmayan akış bölgesi, Reynolds sayısının yüksekliğinden dolayı net viskoz kuvvetlerin atalet ve/veya basınç kuvvetlerine kıyasla ihmal edilebilir olduğu, bununla beraber akışkanın kendisinin hala viskoz olduğu bir akış bölgesidir.

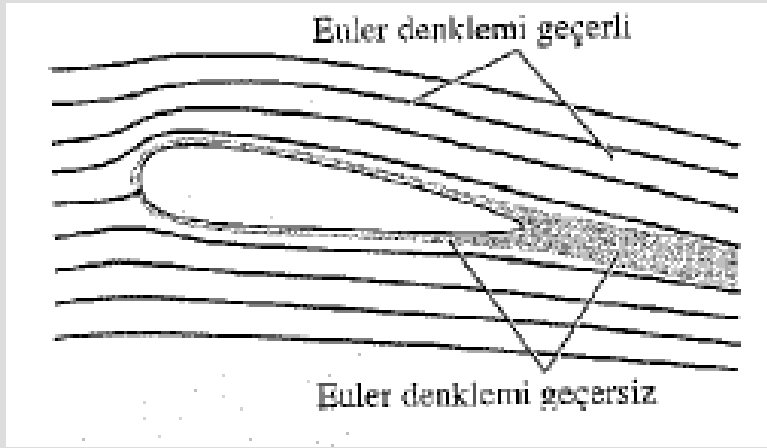
Viskoz olmayan akış bölgeleri *yüksek Reynolds sayısına sahip* bölgelerdir—sürünme akışı bölgelerinin tersi.

Navier-Stokes denklemi viskoz terimini kaybeder ve Euler denklemine indirgenir:

Euler equation:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

Katı çeperlerdeki kaymama koşulundan ötürü bir katı çeperin çok yakınındaki akış bölgesinde sürtünme kuvvetleri ihmal *edilemez*. Sınır tabaka olarak bilinen böyle bir bölgede çepere dik doğrultudaki hız gradyanları küçük $1/Re$ değerini dengeleyecek ölçüde yeterince büyüktür.



Euler denklemleri Navier-Stokes denkleminin bir yaklaşıdır ve sadece Reynolds sayısının yüksek olduğu, net viskoz kuvvetlerin atalet ve/veya basınç kuvvetlerine oranla ihmal edilebilir olduğu akış bölgeleri için geçerlidir.

Euler denklemleri, çeperlerden ve art izlerinden uzakta net viskoz kuvvetlerin ihmal edilebilir olduğu yüksek Reynolds sayılı akış bölgeleri için uygun bir yaklaşıdır.

Akışkanın çeper *içerisinden* akamayacağını belirtebilmemize rağmen, Euler yaklaşımını kullandığımızda katı çeperlerde kaymama sınır şartını *belirtemeyiz*.

Dolayısıyla Euler denkleminin çözümleri katı çeperler yakınlarında fiziksel olarak anlamsızdır.

Viskoz Olmayan Akış Bölgelerinde Bernoulli Denklemi'nin Türetilmesi

Vektör özdeşliği: $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\zeta}$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\zeta} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} = \vec{\nabla}\left(-\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}$$

$$\vec{g} = -g\vec{k} = -g\vec{\nabla}z = \vec{\nabla}(-gz)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) = \vec{v} \times \vec{\zeta}$$

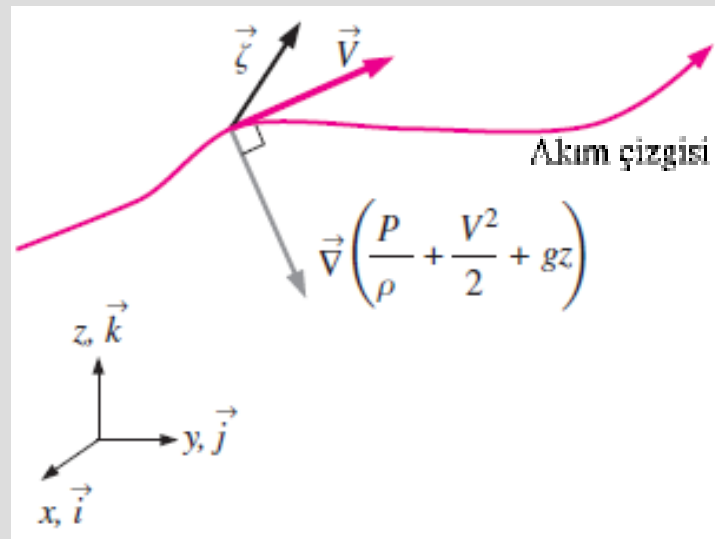
$z =$ Düşey mesafe

$\vec{k} = z$ -yönünde birim vektör

$$\vec{\nabla}(z) = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_0 \vec{i} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_0 \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_1 \vec{k} = \vec{k}$$

$g\vec{g}$

O halde, $\vec{g} = -g\vec{k} = -g\vec{\nabla}z = \vec{\nabla}(-gz)$

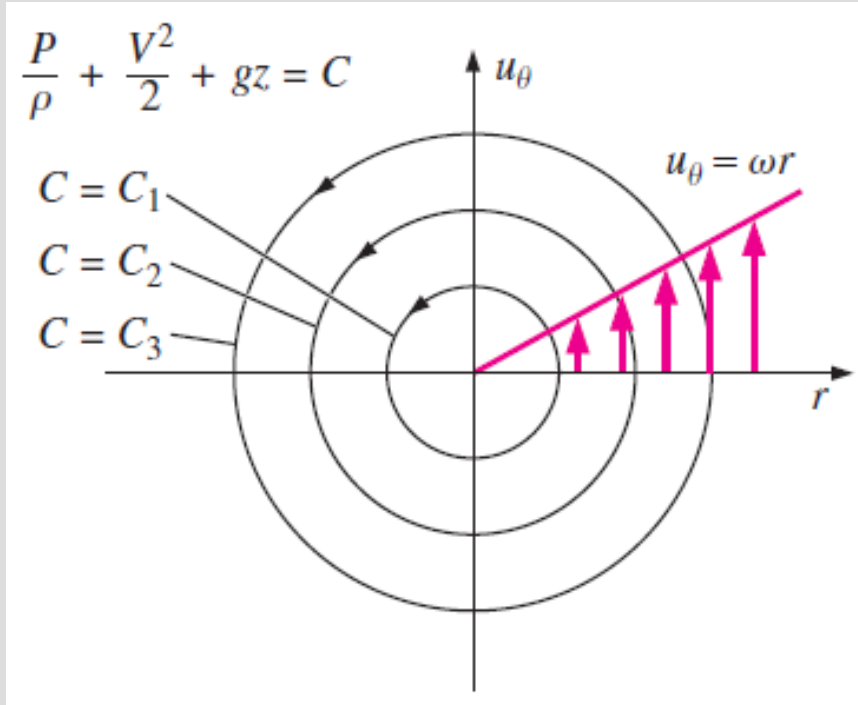


Bir akım çizgisi boyunca $\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)$ akım çizgisine her yerde dik bir vektördür, böylece $\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)$ akım çizgisi boyunca sabittir.

Yerçekimi negatif z -yönünde etkidiğinde, \vec{g} yerçekimi vektörü $\vec{\nabla}(-gz)$ olarak yazılabilir.

Viskoz olmayan akış bölgelerinde daimi sıkıştırılmaz Bernoulli denklemi:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{sabit (akım çizgisi boyunca)}$$



Şekil 10.20

Katı cisim dönmesi aynı zamanda dönümlü olan bir viskoz olmayan akış bölgesi örneğidir.

Bernoulli sabiti C akım çizgisinden akım çizgisine farklıdır ancak belirli bir akım çizgisi boyunca sabittir.

ÖRNEK 10–3 Katı Cisim Dönmesinde Basınç Alanı

Bir akışkan, Şekil 10–20’de gösterildiği gibi z -ekseni etrafında dönmektedir (katı cisim dönmesi yapmaktadır). Daimi sıkıştırılmaz hız alanı $u_r = 0$, $u_\theta = \omega r$ ve $u_z = 0$ olarak verilmektedir. Orijindeki basınç P_0 ’dır. Akışta her noktadaki basınç alanını hesaplayınız ve her bir akım çizgisi boyunca Bernoulli sabitini belirleyiniz.

ÇÖZÜM Verilen bir hız alanı için basınç alanını hesaplayacağız ve Bernoulli sabitini belirleyeceğiz.

Kabuller **1** Akış daimi ve sıkıştırılmazdır. **2** z -yönünde (düşeyde) herhangi bir akış olmadığından düşey yönde hidrostatik basınç dağılımı mevcuttur. **3** Viskoz kuvvetler sıfır olduğundan tüm akış alanı viskoz olmayan bir akış bölgesi ile temsil edilebilir. **4** θ -yönünde herhangi bir akış değişkeninde değişim yoktur.

Analiz Kabul 3’ten ötürü, Denklem 10–18 doğrudan uygulanabilir.

Bernoulli denklemi:

$$P = \rho C - \frac{1}{2} \rho V^2 - \rho g z \quad (1)$$

Burada C , Şekil 10–20’de gösterildiği gibi akım çizgilerine dik yönde yarıçapla değişen Bernoulli sabitidir. Herhangi bir r radyal konumunda $V^2 = \omega^2 r^2$ alınırsa Denklem 1,

$$P = \rho C - \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z \quad (2)$$

halini alır. Orijinde ($r = 0$, $z = 0$) basınç P_0 ’a eşit olur (verilen sınır şartından). Böylece orijinde ($r = 0$), $C = C_0$ elde ederiz.

Orijindeki sınır şartı:

$$P_0 = \rho C_0 \rightarrow C_0 = \frac{P_0}{\rho}$$

Peki C 'yi herhangi bir r konumunda nasıl bulabiliriz? Bunun için Denklem 2 yetersiz kalır, zira C ve P bilinmemektedir. Bu sorunun cevabı Euler denklemini kullanmaktır. Bir serbest yüzey bulunmadığından Denklem 10-7 ile verilen değiştirilmiş basıncı kullanabiliriz. Bu durumda Euler denkleminin r -bileşeni,

$$\frac{\partial P'}{\partial r} = \rho \frac{u_0^2}{r} = \rho \omega^2 r \quad (3)$$

halini alır. (Denklem 9-62b'nin viskoz terimlerinin bulunmadığı haline bakınız.) Burada verilen u_0 hız bileşenini denklemde yerine koyduk. Hidrostatik basınç zaten değiştirilmiş basınç denkleminde dahil edildiğinden, P' basıncı z 'nin fonksiyonu değildir. Sırasıyla 1 ve 4 numaralı kabuller dikkate alındığında P' basıncı t veya θ 'nin da fonksiyonu olamaz. Bu durumda P' yalnızca r 'nin fonksiyonudur ve dolayısıyla Denklem 3'teki kısmi türevi toplam türev ile değiştirebiliriz. Bu denklemi integre edersek,

$$\text{Euler denkleminin } r\text{-bileşeni: } P' = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + B_1 \quad (4)$$

elde ederiz. Burada B_1 bir integral sabitidir. Orijinde, değiştirilmiş basınç P' gerçek basınç P 'ye eşittir. Çünkü bu noktada $z = 0$ 'dir. Böylece B_1 sabiti orijinde bilinen basınç sınır şartı uygulanarak bulunur. Bu durumda $B_1 = P_0$ olur. Şimdi de Denklem 4'ü, Denklem 10-7'yi kullanarak ($P = P' - \rho g z$) gerçek basınca geri dönüştürelim.

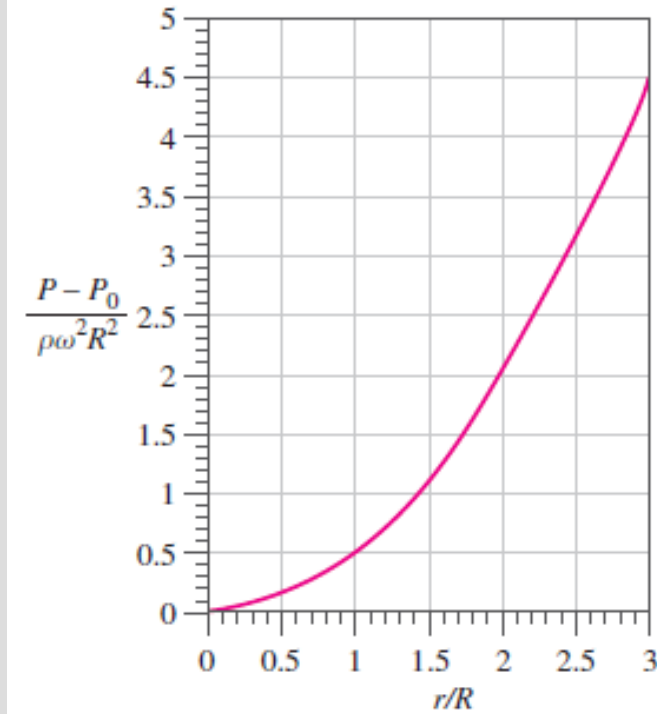
$$\text{Gerçek basınç alanı: } P = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 - \rho g z \quad (5)$$

Referans düzleminde ($z = 0$), boyutsuz basınç boyutsuz yarıçapın fonksiyonu olarak çizilebilir (Şekil 10-21). Boyutsuz yarıçap için akıştaki keyfi bir $r = R$ konumu karakteristik uzunluk ölçeği olarak seçilmiştir. Basınç dağılımı r 'ye göre paraboliktir.

Son olarak C 'yi bulmak üzere Denklem 2 ve 5'i birbirlerine eşitlersek,

$$r\text{'nin fonksiyonu olarak Bernoulli sabiti: } C = \frac{P_0}{\rho} + \omega^2 r^2 \quad (6)$$

elde ederiz. Orijinde $C = C_0 = P_0/\rho$ olup önceki hesabımızla uyusmaktadır.



ŞEKİL 10-21

Katı cisim dönmese yapan bir akışkan için sıfır yükseklikteki boyutsuz basıncın boyutsuz radyal konum ile değişimi.

10–5 ■ DÖNÜMSÜZ AKIŞ YAKLAŞTIRIMI

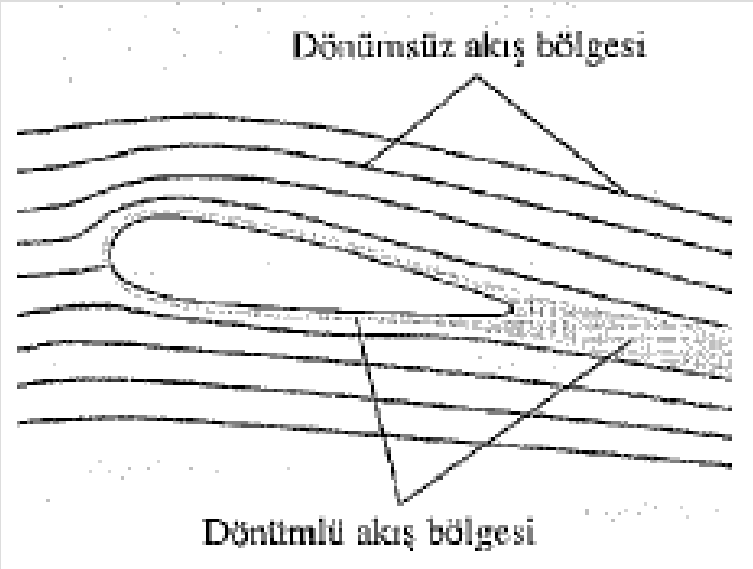
Akışkan parçacıklarının *hiçbir net dönmeye* sahip olmadığı akış bölgeleri vardır ve bu bölgelere **dönümsüz** akış bölgeleri denir.

Daha önce de belirtildiği gibi, viskoz olmayan bir akış bölgesinin dönümsüz *olmayabileceği* (örneğin katı cisim gibi dönme hareketi) durumlar mümkünse de, genel olarak katı çeperlerden ve cisimlerin art izlerinden uzak viskoz olmayan akış bölgeleri dönümsüzdür.

Buna göre, dönümsüzlük ile tanımlanan akış tipleri için elde edilen çözümler, tam Navier-Stokes çözümlerinin *yaklaşımlarıdır*.

Matematiksel olarak bu yaklaşım, çevrintinin ihmal edilebilecek kadar küçük olması demektir.

$$\text{Dönümsüz akış yaklaşımı: } \vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \equiv 0$$



Dönümsüz akış yaklaşımını yalnızca çevrintinin ihmal edilebildiği belirli akış bölgeleri için uygundur.

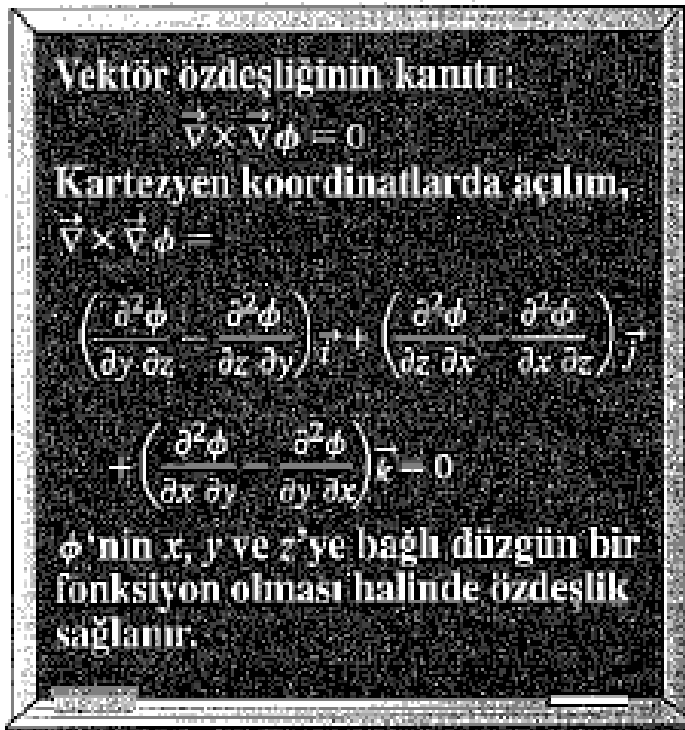
Süreklilik Denklemi

Vektör özdeşliği $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$, Buna göre eğer $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ ise $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$ (10-20)

Hız potansiyel fonksiyonu ϕ

Dönümsüz akış bölgeleri için: $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$

Dönümsüz bir akış bölgesinde hız vektörü, *hız potansiyeli fonksiyonu* adı verilen bir skaler fonksiyonun gradyeni olarak ifade edilebilir.



Dolayısıyla dönümsüz akış bölgelerine **potansiyel akış bölgeleri** adı da verilir.

Denklem 10-20 ile verilen vektör özdeşliği, terimlerin Kartezyen koordinatlarda açılmasıyla kolayca ispat edilir.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

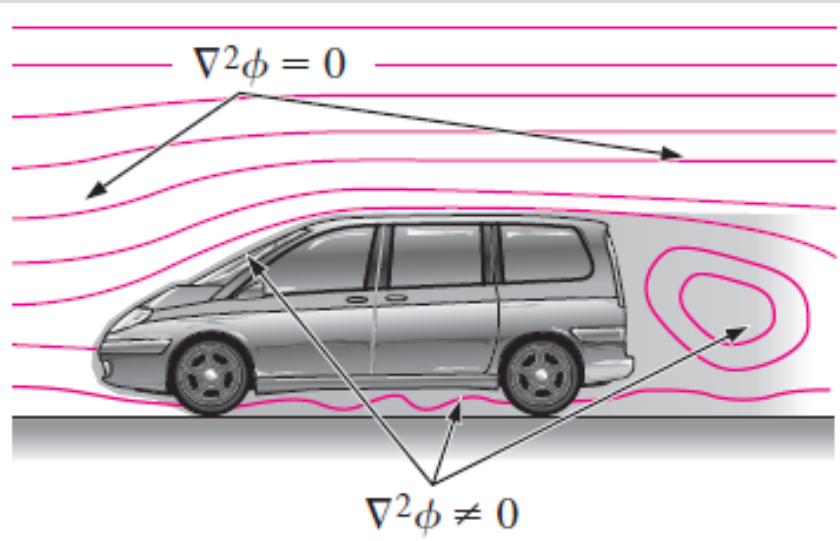
$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Dönümsüz akış bölgeleri için:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$



Hız potansiyeli fonksiyonu ϕ için yazılan Laplace denklemi, hem iki hem de üç-boyut için, her koordinat sisteminde, ancak yalnızca akışın dönümsüz bölgelerinde (genellikle çeperlerden ve art izlerinden uzak bölgelerde) geçerlidir.

Genel 3-B sıkıştırılamaz akış:

- Bilinmeyenler = $u, v, w,$ ve P
- Dört denklem gerekli

Yaklaşım

Dönümsüz akış bölgeleri:

- Bilinmeyenler = ϕ ve P
- İki denklem gerekli

Dönümsüz akış bölgelerinde, hız vektörünün bilinmeyen üç bileşeni tek bir bilinmeyen skaler fonksiyonda (hız potansiyeli fonksiyonu) toplanır.

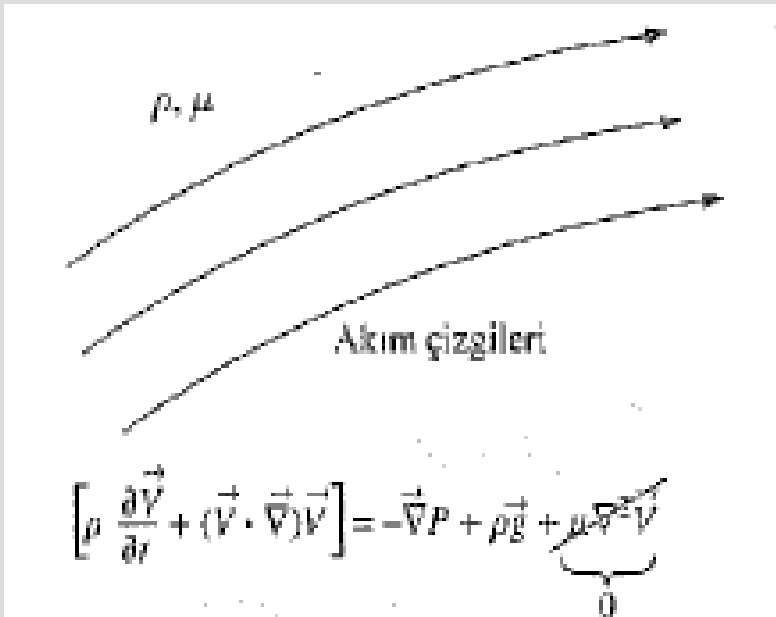
Momentum Denklemi

$$\mu \nabla^2 \vec{V} = \mu \nabla^2 (\vec{\nabla} \phi) = \underbrace{\mu \vec{\nabla} (\nabla^2 \phi)}_0 = 0$$

Navier-Stokes denklemi dönümsüz akış bölgelerinde *Euler denklemine* indirgenir.

Dönümsüz akış bölgeleri için:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$



Dönümsüz bir akış bölgesi, net viskoz kuvvetlerin dönümsüz yaklaşıtırmından dolayı atalet ve/veya basınç kuvvetlerine göre ihmal edilebilir olduğu bir bölgedir. Dolayısıyla akışın tüm dönümsüz bölgeleri aynı zamanda viskoz olmayan bölgelerdir, buna karşın akışın tüm viskoz olmayan bölgeleri dönümsüz değildir. Akışkanın kendisi, her iki durumda da hala viskoz bir akışkandır.

Dönümsüz Akış Bölgelerinde Bernoulli Denkleminin Türetilmesi

$$\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) = 0$$

Eğer bir skaler büyüklüğün (Denklemden parantez içindeki terim) gradyeni her yerde sıfırsa, bu skaler büyüklüğün kendisi bir sabit olmalıdır.

Dönümsüz akış bölgelerinde daimi sıkıştırılamaz Bernoulli denklemi:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{her yerde sabit}$$

Dönümsüz bir akış bölgesinde Bernoulli sabiti her yerde aynıdır. Dönümsüzlük yaklaşımı viskoz olmama yaklaşımından daha kısıtlayıcıdır.

Dönümsüz bir akış bölgesindeki çözümlerin elde edilmesi için akış diyagramı. Hız alanı süreklilik ve dönümsüzlükten elde edilir. Bunun ardından Bernoulli denkleminde basınç hesaplanır.

Calculate ϕ from continuity: $\nabla^2 \phi = 0$



Calculate \vec{V} from irrotationality: $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$



Calculate P from Bernoulli:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

ÖRNEK 10-4 Bir Hortumun İki-Bölge Modeli

Bir hortum içerisindeki yatay bir kesit (Şekil 10-28) iki farklı bölge ile modellenir. İç veya çekirdek bölge ($0 < r < R$) katı cisim dönmesi, yani daha önce tartışıldığı gibi dönümlü ancak viskoz olmayan bir akış bölgesi olarak modellenir. Dış bölge ($r > R$) ise dönümsüz bir akış bölgesi olarak modellenir. Akış $r\theta$ -düzleminde iki-boyutludur ve hız alanının bileşenleri $\vec{V} = (u_r, u_\theta)$,

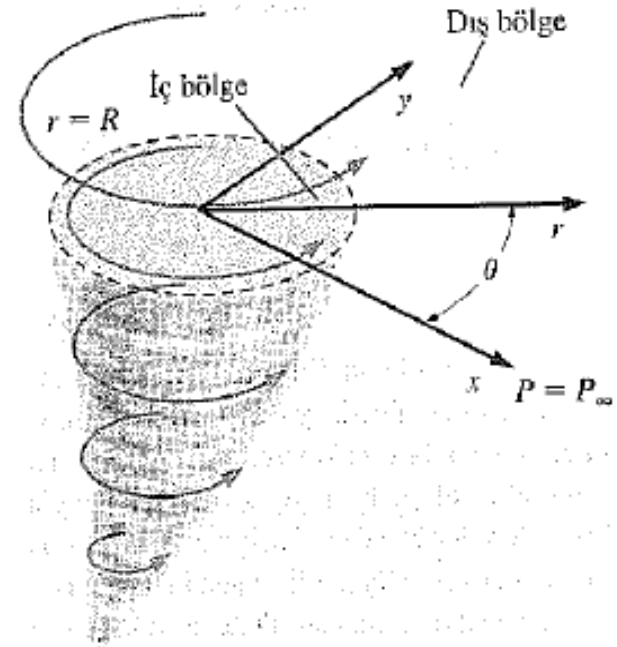
$$\text{Hız bileşenleri: } u_r = 0 \quad u_\theta = \begin{cases} \omega r & 0 < r < R \\ \frac{\omega R^2}{r} & r > R \end{cases} \quad (1)$$

olarak verilmektedir. Burada ω , iç bölgedeki açısal hızın büyüklüğüdür. Çevre basıncı (hortumdan çok uzakta) P_∞ 'a eşittir. $0 < r < \infty$ olmak üzere hortumun bir yatay kesitindeki basınç alanını hesaplayınız. $r = 0$ 'daki basınç nedir? Basınç ve hız alanlarını çizin.

ÇÖZÜM Hız bileşenleri Denklem 1 ile temsil edilen hortumun yatay bir radyal kesiti boyunca plan basınç alanı $P(r)$ 'yi hesaplayacağız. Ayrıca bu kesitte $r = 0$ noktasındaki basınç belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılmazdır. 2 Her ne kadar z yüksekliğinin artmasıyla R artıyor ve ω azalıyor da, belirli bir yatay kesit için P ve ω sabit kabul edilmektedir.

3 Yatay kesitteki akış $r\theta$ -düzleminde iki-boyutludur (z 'ye bağımlılık yoktur ve hızın w -bileşeni bulunmamaktadır). 4 Belirli bir yatay kesit içerisinde yerçekiminin etkileri ihmal edilmektedir (Doğal olarak z -yönünde ek bir hidrostatik basınç alanı mevcuttur, ancak daha önce de tartışıldığı gibi bu durum akış dinamiklerini etkilemez).



ŞEKİL 10-28

Bir hortum içerisindeki yatay bir kesit iki bölge ile modellenebilir: Visköz olmayan ancak dönümlü bir iç akış bölgesi ($r < R$) ve dönümsüz bir dış akış bölgesi ($r > R$).

Analiz İç bölgede Navier-Stokes denkleminin uygun bir yaklaşımını Euler denklemidir ve basınç alanı integral yoluyla bulunur. Örnek 10-3'te katı cisim dönmesi için,

$$\text{İç bölgedeki basınç alanı } (r < R): \quad P = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + P_0 \quad (2)$$

olduğunu göstermiştik. Burada P_0 , $r = 0$ 'daki (bilinmeyen) basınçtır ve yerçekimi terimi ihmal edilmiştir. Dış bölge dönümsüz bir akış bölgesi olduğundan Bernoulli denklemi uygundur ve $r = 0$ 'dan $r \rightarrow \infty$ 'a kadar her noktada Bernoulli sabiti aynıdır.

Bernoulli sabiti, hortumdan çok uzakta, yani $r \rightarrow \infty$ için $u_\theta \rightarrow 0$ ve $P \rightarrow P_\infty$ şeklinde sınır şartı uygulanarak bulunur (Şekil 10-29). Buna göre Denklem 10-27,

$$r \rightarrow \infty \text{ olduğunda: } \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \underbrace{gz}_{\text{kabul 4}} = C \rightarrow C = \frac{P_\infty}{\rho} \quad (3)$$

sonucunu verir. Dış bölgede herhangi bir yerdeki basınç, Denklem 3'ten bulunan sabitin değerinin Bernoulli denkleminde (Denklem 10-27) yerine konulmasıyla elde edilir. Yerçekimi ihmal edilerek,

$$\text{Dış bölgede } (r > R): \quad P = \rho C - \frac{1}{2} \rho V^2 = P_\infty - \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (4)$$

sonucuna varılır. Burada $V^2 = u_\theta^2$ olduğuna dikkat ediniz. Denklem 1'deki u_θ 'nın da yerine yazılmasıyla Denklem 4,

$$\text{Dış bölgedeki basınç alanı } (r > R): \quad P = P_\infty - \frac{\rho \omega^2 R^4}{2 r^2} \quad (5)$$



ŞEKİL 10-29

Bu problemde sınır şartlarını elde etmek için uygun yer uzak alandır; bu durum akışkanlar mekaniğindeki bir çok problem için geçerlidir.

$$r = R \text{ deki basınç: } P_{r=R} = \rho \frac{\omega^2 R^2}{2} + P_0 = P_\infty - \frac{\rho}{2} \frac{\omega^2 R^4}{R^2} \quad (6)$$

elde edilir. Bu ifadeden $r = 0$ 'daki basınç P_0 ,

$$r = 0 \text{ 'daki basınç: } P_0 = P_\infty - \rho \omega^2 R^2 \quad (7)$$

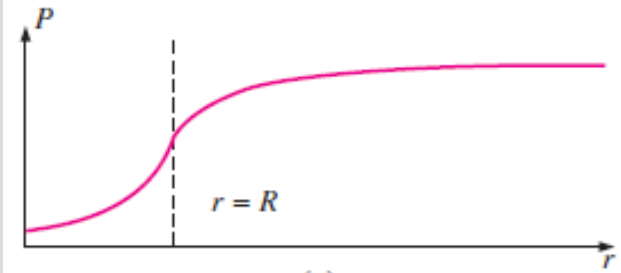
şeklinde bulunur. Denklem 7, hortumun ortasındaki (fırtına gözü) basıncın değerini verir. Bu, akış alanındaki en düşük basınçtır. Denklem 7'nin Denklem 2'de yerine yazılması, bu denklemi (Denklem 2) verilen uzak alan çevre basıncı P_∞ cinsinden yeniden yazma olanağı verir:

$$\text{İç bölgede } (r < R): \quad P = P_\infty - \rho \omega^2 \left(R^2 - \frac{r^2}{2} \right) \quad (8)$$

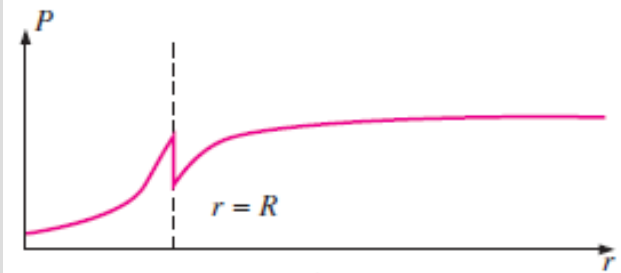
Çizimin herhangi bir yatay kesitte geçerli olabilmesi için, verilen yatay kesitte P 'yi r 'nin fonksiyonu olarak çizmek yerine boyutsuz basınç dağılımını çizelim. Boyutsuz değişkenlere bağlı olarak,

$$\text{İç bölge } (r < R): \quad \frac{u_\theta}{\omega R} = \frac{r}{R}, \quad \frac{P - P_\infty}{\rho \omega^2 R^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \quad (9)$$

$$\text{Dış bölge } (r > R): \quad \frac{u_\theta}{\omega R} = \frac{R}{r}, \quad \frac{P - P_\infty}{\rho \omega^2 R^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2$$



(a)



(b)

ŞEKİL 10-30

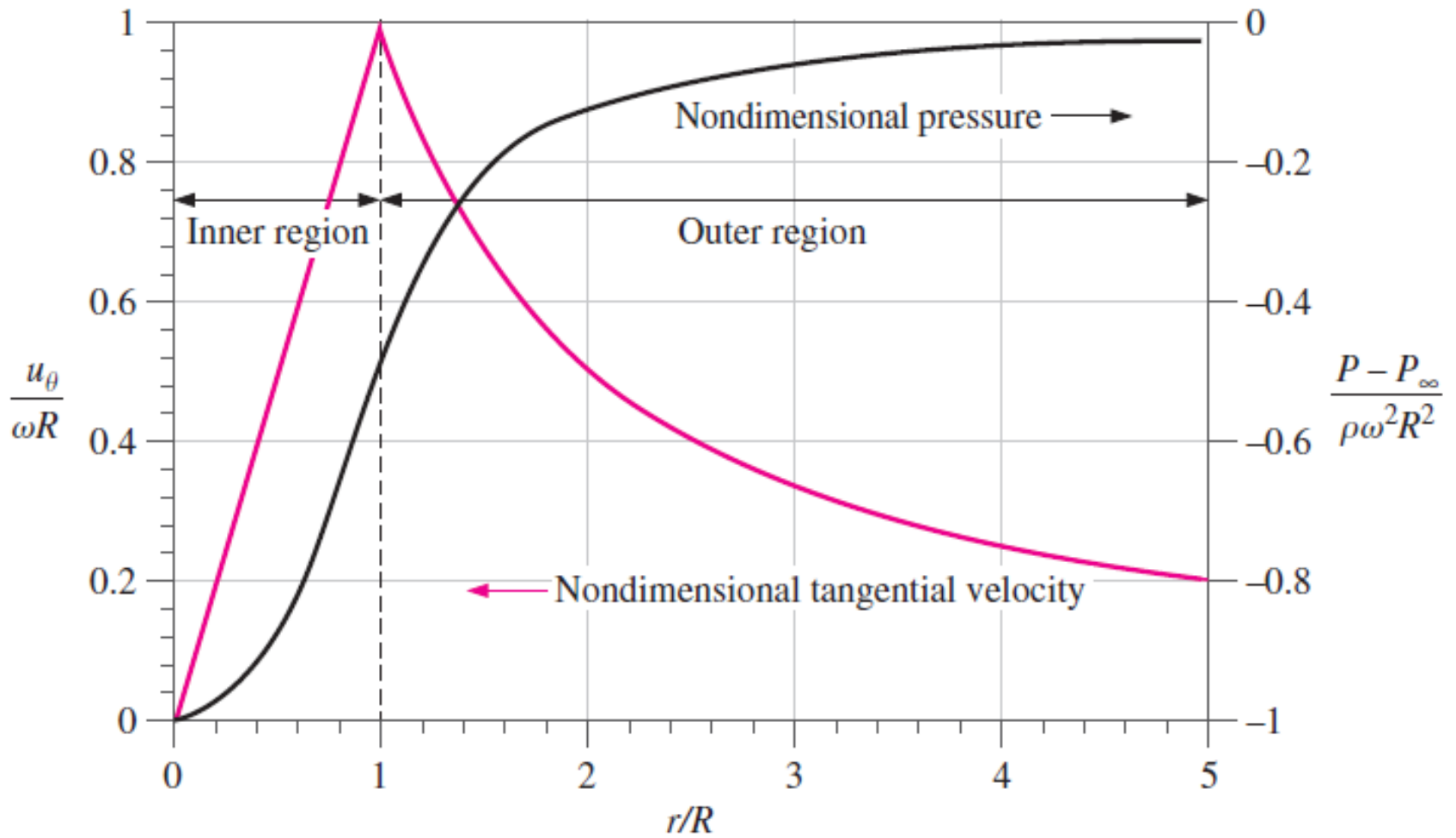
Hortum modelimizin geçerli olabilmesi için, $r = R$ 'de bir basınç eğim süreksizliğine sahip olabilir, ancak burada ani bir değer sıçramasına sahip olamaz; (a) geçerli, ancak (b) geçersizdir.

sonuçları elde edilir. Şekil 10–31’de hem boyutsuz teğetsel hız hem de boyutsuz basınç, boyutsuz radyal konumun fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

İrdeleme Dış bölgede her yerde *aynı* Bernoulli sabitine sahip Bernoulli denkleminin doğrudan bir sonucu olarak bu bölgede hız arttıkça basınç da artar. Başka bir yolla, örneğin Bernoulli denklemini kullanmaksızın doğrudan Euler denklemini integre ederek dış bölgedeki P ’yi hesaplamayı deneyiniz, aynı sonucu elde etmelisiniz. İç bölgede ise hızın artmasına rağmen P , r ile parabolik olarak artar. Bunun nedeni Bernoulli sabitinin (Örnek 10–3’te de işaret edildiği gibi) akım çizgisinden akım çizgisine değişmesidir. $r/R = 1$ ’de teğetsel hızın eğiminde bir süreksizlik olmasına rağmen, iç ve dış bölgeler arasında basıncın oldukça düzgün bir geçişe sahip olduğuna dikkat ediniz. Hortumun merkezinde basınç en düşük seviyededir ve uzak alanda atmosferik basınca yükselir (Şekil 10–32). Sonuç olarak iç bölgedeki akış, bu bölgede viskozite hiçbir rol oynamadığından dolayı *dönümlü* ancak *viskoz değildir*. Dış bölgedeki akış ise *dönümsüzdür* ve *viskoz değildir*. Bununla beraber, viskozitenin dış bölgede hâlâ akışkan parçacıkları üzerinde etkili olduğuna dikkat ediniz. (Dış bölgedeki bir akışkan parçacığına etki eden net viskoz kuvvet sıfır bile olsa viskozite parçacıklarda kaymaya ve çarpılmaya neden olur).

En düşük basınç hortumun merkezinde oluşur ve bu bölgedeki akış katı cisim dönmesi olarak ele alınabilir.





Bir hortumun içerisindeki yatay bir radyal kesit boyunca boyutsuz teğetsel hız bileşeni (pembe eğri) ve boyutsuz basınç dağılımı (siyah eğri). Akışın iç ve dış bölgeleri işaretlenmiştir.

İki-Boyutlu Dönümsüz Akış Bölgeleri

Yalnızca *iki* hareket yönünün önemli olduğu, üçüncü yönde kayda değer değişikliklerin bulunmadığı herhangi bir akış bölgesini de iki-boyutlu kabul edebiliriz. Buna en yaygın iki örnek:

Düzlemsel akış (bir düzlemde, düzleme dik yönde ihmal edilebilir değişimlerin olduğu akış) ve **eksenel simetrik akış** tır (bir eksen etrafında dönel simetrisinin bulunduğu akış).

Ayrıca göz önüne alınan problemin geometrisine bağlı olarak Kartezyen koordinatlarda, silindirik koordinatlarda veya küresel koordinatlarda çalışabiliriz.

3-B dönümsüz akış bölgesinde:

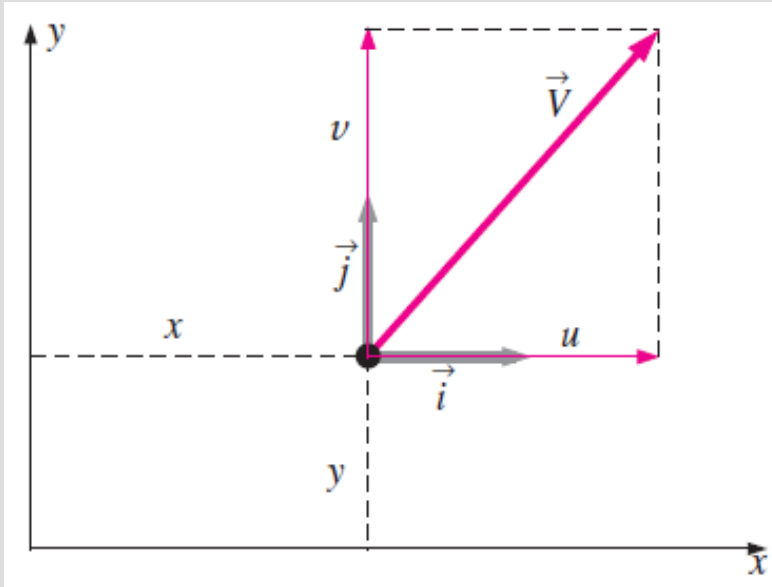
- $\vec{V} = \nabla\phi$
- $\nabla^2\phi = 0$
- ψ 'yi tanımlanamaz.

2-B dönümsüz akış bölgesinde:

- $\vec{V} = \nabla\phi$
- $\nabla^2\phi = 0$
- ψ 'yi de kullanılabilir.

İki-boyutlu akış üç-boyutlu akışın bir alt kümesidir; iki-boyutlu akış bölgelerinde bir akım fonksiyonu tanımlayabiliriz, ancak bunu üç-boyutlu akışlarda yapamayız. Bununla birlikte, hız potansiyeli fonksiyonu herhangi bir dönümsüz akış bölgesinde tanımlanabilir.

Düzlemsel Dönümsüz Akış Bölgeleri



xy-düzleminde, düzlemsel iki-boyutlu akış için Kartezyen koordinatlardaki hız bileşenleri ve birim vektörler. Bu düzleme dik yönde bir değişim yoktur.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Akım fonksiyonu:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

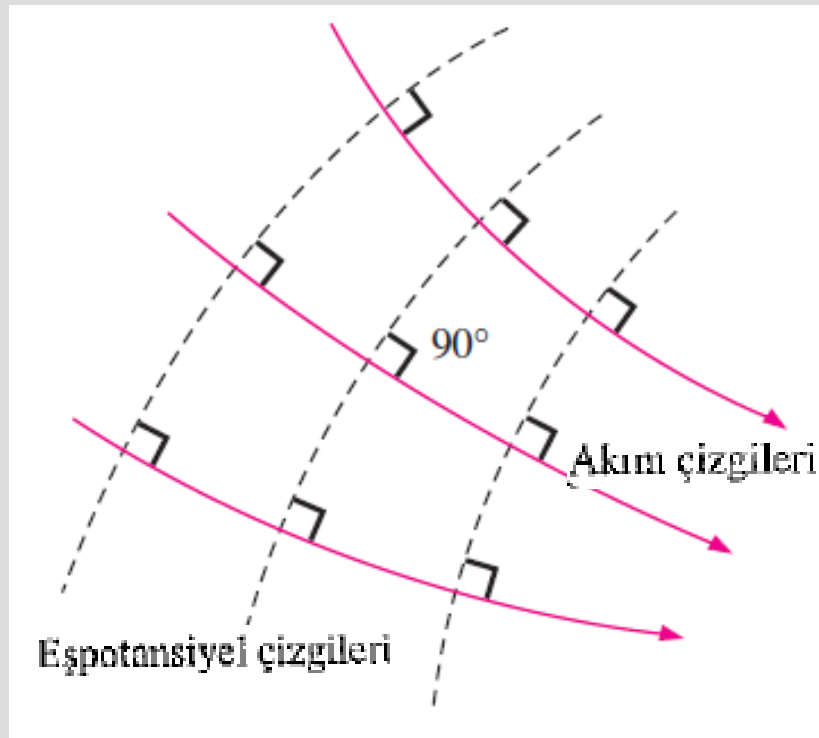
$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

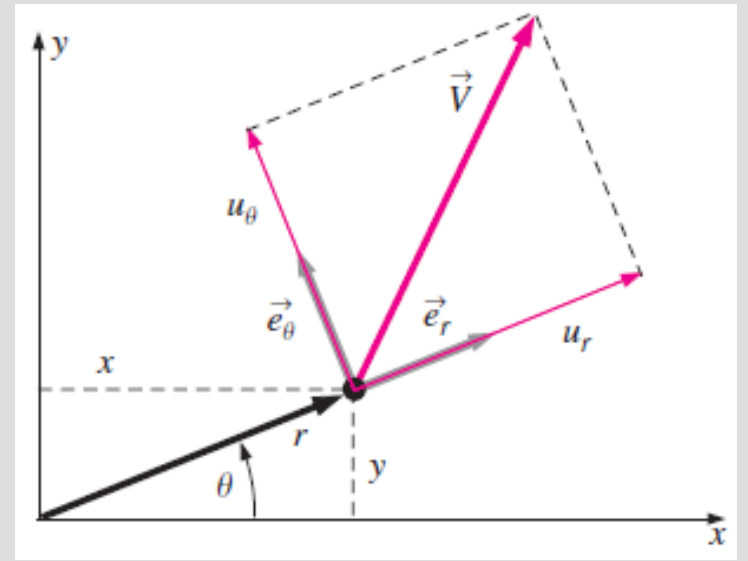
$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

• Akım fonksiyonu süreklilik ile tanımlanır; ψ için Laplace denklemi dönümsüzlükten elde edilir:

• Hız potansiyeli dönümsüzlük ile tanımlanır; ϕ için Laplace denklemi süreklilikten elde edilir:



Düzlemsel dönümsüz akış bölgelerinde sabit ϕ eğrileri (eşpotansiyel çizgileri) ve sabit ψ eğrileri (akım çizgileri) karşılıklı olarak diktir, yani (karşılaştıkları) her yerde birbirlerini 90° açı ile keserler.

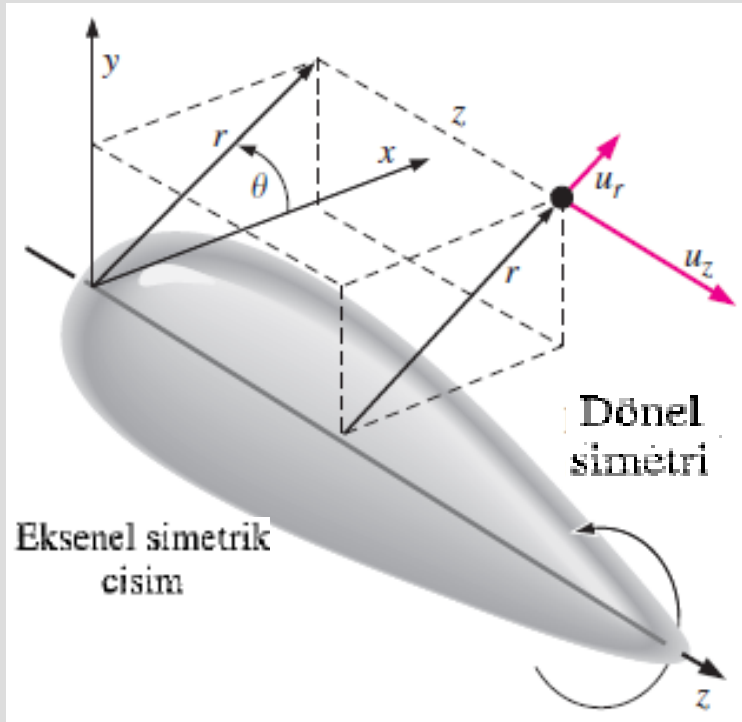


r düzlemindeki düzlemsel akış için silindirik koordinatlarda hız bileşenleri-ve birim vektörler. Bu düzleme dik yönde bir değişim yoktur.

Laplace denklemi, (r, θ) 'da düzlemsel akış:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

Akım fonksiyonu:
$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Eksenel Simetrik Dönümsüz Akış Bölgeleri



Eksenel simetrik bir cisim üzerinde silindirik koordinatlarda z-ekseni etrafında dönel simetrik akış. Ne geometri ne de hız alanı θ 'ya bağlıdır ve $u_\theta = 0$ 'dır.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{Str } r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Düzlemsel dönümsüz akış bölgeleri için Laplace denklemini hem ϕ hem de ψ için geçerlidir; ancak eksenel simetrik dönümsüz akış bölgeleri için Laplace denklemini, ϕ için geçerliken, ψ için geçersizdir.

DİKKAT!

**EKSENEL SİMETRİK
AKIŞTA AKIM FONKSİYONU
İÇİN LAPLACE DENKLEMİ
YOKTUR**

Eksenel simetrik
dönümsüz akıştaki
akım fonksiyonu
denklemi (Denklemler
10-34) Laplace
denklemi değildir.

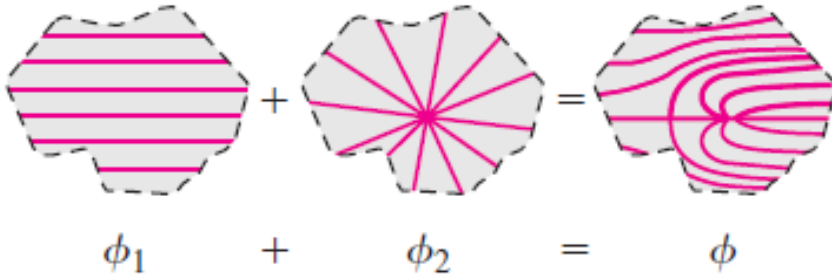
İki Boyutlu Dönümsüz Akış Bölgelerinin Özeti

Çeşitli koordinat sistemlerinde hız potansiyeli fonksiyonu ve akım fonksiyonuna bağlı olarak daimi, sıkıştırılmaz, iki-boyutlu akış bölgeleri için hız bileşenleri.

Tarif ve koordinat sistemi	Hız bileşeni 1	Hız bileşeni 2
Düzlemsel; Kartezyen koordinatlar	$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$	$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$
Düzlemsel; silindirik koordinatlar	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$	$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$
Eksenel simetrik; silindirik koordinatlar	$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$	$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$

Dönümsüz Akış Bölgelerinin Süperpozisyonu

Eğer dönümsüz bir akış bölgesi iki veya daha fazla ayrı dönümsüz akış alanlarının toplamı ile modelleniyorsa (örneğin serbest-akım akışına yerleştirilmiş bir kaynak) birleşik akış alanını tarif etmek için her bir akışın hız potansiyeli fonksiyonları toplanabilir.



İki ya da daha fazla dönümsüz akış çözümünün, (daha karmaşık olan) bir üçüncü çözümü oluşturmak üzere toplanması işlemine süperpozisyon denir.

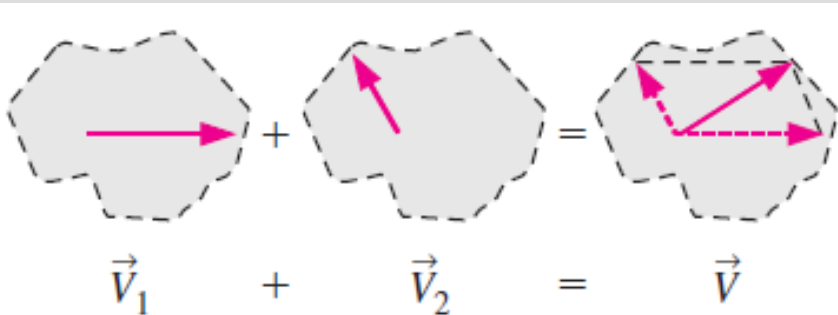
İki dönümsüz akış alanının süperpozisyonu:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2$$

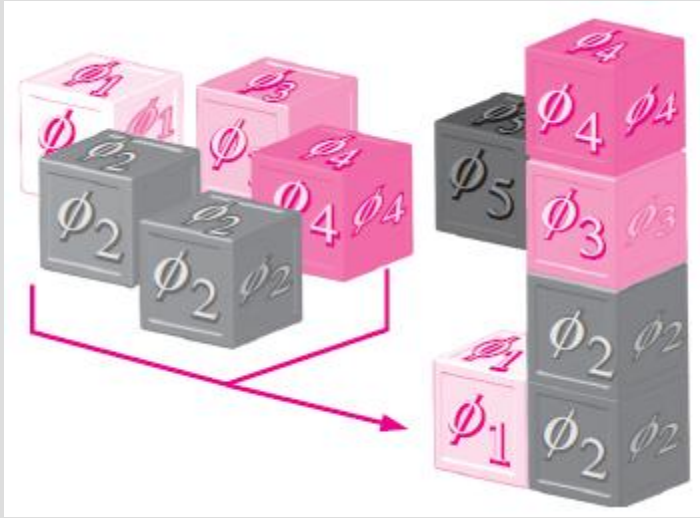
Süperpozisyon ile birleşik hız alanı:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$



Dönümsüz akış çözümlerinin süperpozisyonunda akış alanının herhangi bir noktasındaki iki hız vektörü, bu noktadaki birleşik hızı meydana getirmek üzere toplanır.

Temel Düzlemsel Dönümsüz Akışlar



Süperpozisyon yoluyla, temel "yapıtaşı" dönümsüz akış alanlarını birbirine ekleyerek karmaşık bir dönümsüz akış alanı oluşturabiliriz.

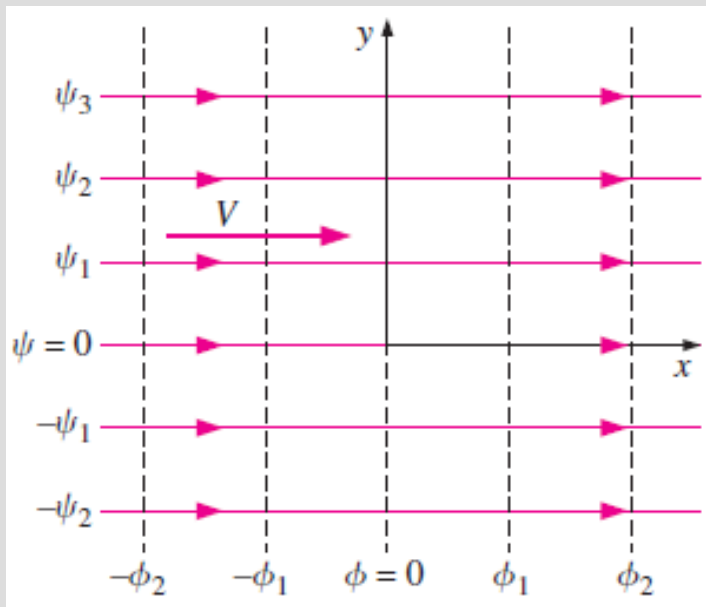
Yapıtaşı 1—Üniform Akım

Üniform akım: $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$

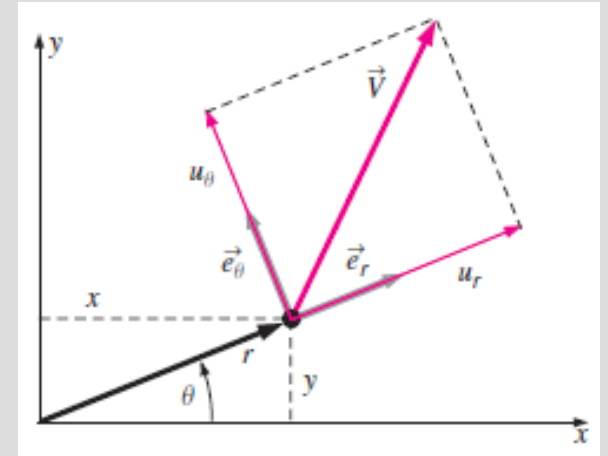
$$\phi = Vx + f(y) \quad \rightarrow \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad f(y) = \text{constant}$$

Bir üniform akım için hız potansiyeli fonksiyonu: $\phi = Vx$

Bir üniform akım için akım fonksiyonu: $\psi = Vy$



Bir üniform akım için x -yönündeki akım çizgileri (sürekli) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli).



r-düzlemindeki düzlemsel akış için silindirik koordinatlarda hız bileşenleri ve birim vektörler. Bu düzleme dik yönde bir değişim yoktur.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dönüşüm:

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$$

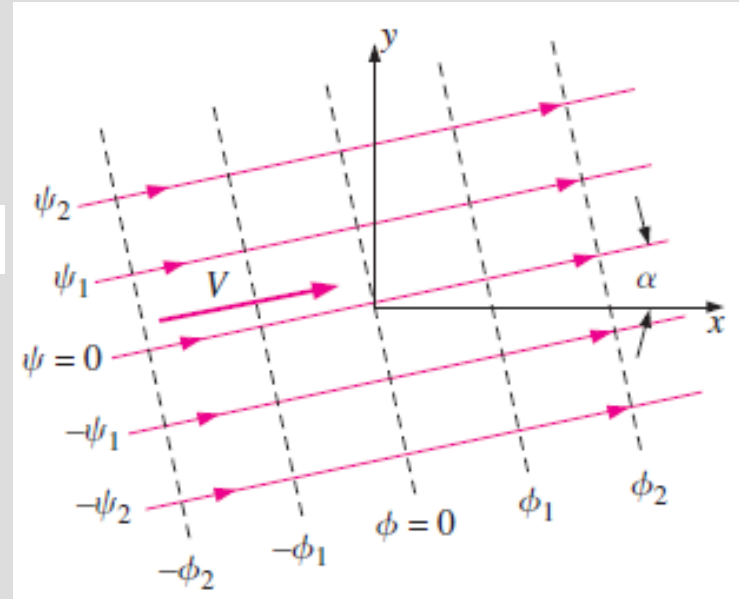
Üniform akım:

$$\phi = Vr \cos \theta \quad \psi = Vr \sin \theta$$

α eğim açılı üniform akım:

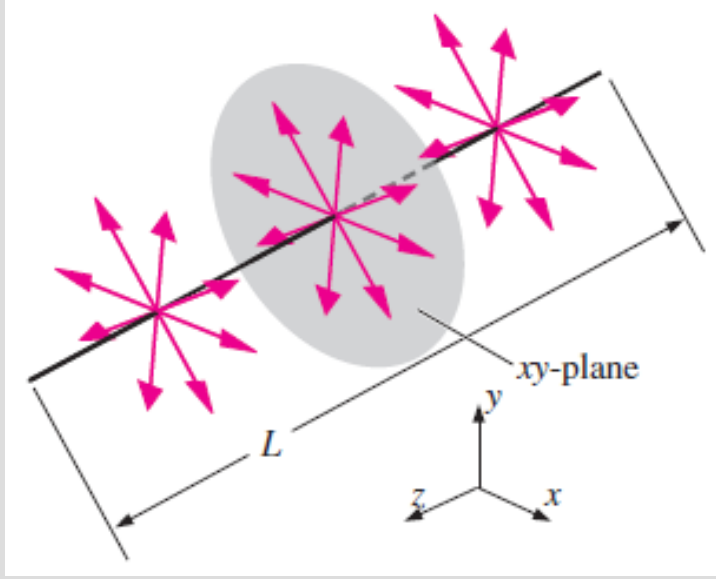
$$\phi = V(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

$$\psi = V(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$$



α eğim açılı bir üniform akım için akım çizgileri (sürekli) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli).

Yapıtaşı 2: Çizgisel Kaynak / Kuyu

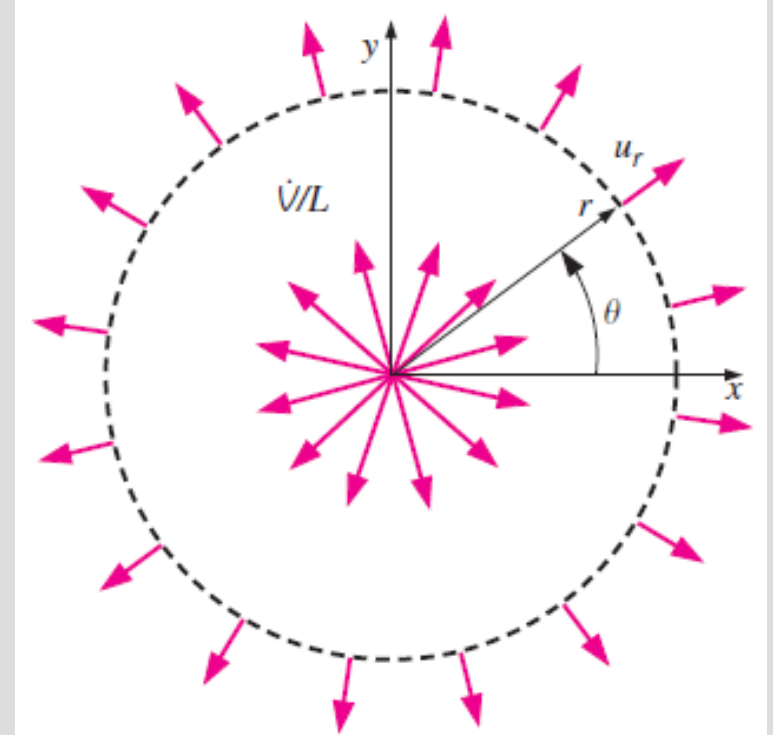


L uzunluğunda sonlu bir çizgi parçasından uniform olarak doğan akışkan. L sonsuza yaklaştıkça, akış çizgisel kaynak durumuna gelir ve xy -düzlemi kaynak eksenine dik yönde alınır.

Çizgisel kaynak: akışkanın dışarı sızdığı çizgi.

Çizgisel kaynak şiddeti: Birim derinlik başına debi.

Çizgisel kuyu: Çizgisel kaynağın karşıtı olup bu durumda akışkan çizgisel kuyu eksenine dik olan düzlemlerde tüm yönlerden çizgi içerisine doğru akar.



xy -düzleminin merkezine yerleştirilmiş \dot{Q}/L şiddetindeki çizgisel kaynak; herhangi bir r yarıçaplı çemberden birim derinlik başına geçen toplam hacimsel debi, r değerinden bağımsız olarak \dot{Q}/L 'ye eşit olmalıdır.

$$\frac{\dot{V}}{L} = 2\pi r u_r \quad u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r}$$

Paydada bulunan r sıfır olduğunda orijinde u_r 'nin sonsuz olduğuna dikkat ediniz. Bu noktaya **tekil nokta** veya **tekillik** adı verilir.

Çizgisel kaynak:
$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

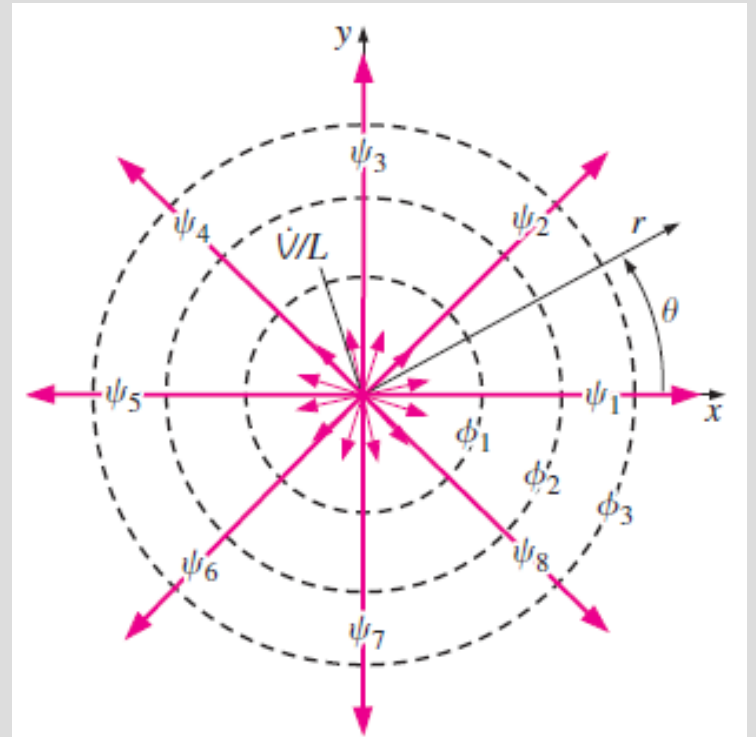
$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = f(\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = f'(\theta) = r u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}$$

$$f(\theta) = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta + \text{constant}$$

Merkezdeki çizgisel kaynak:

$$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln r \quad \text{and} \quad \psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta$$

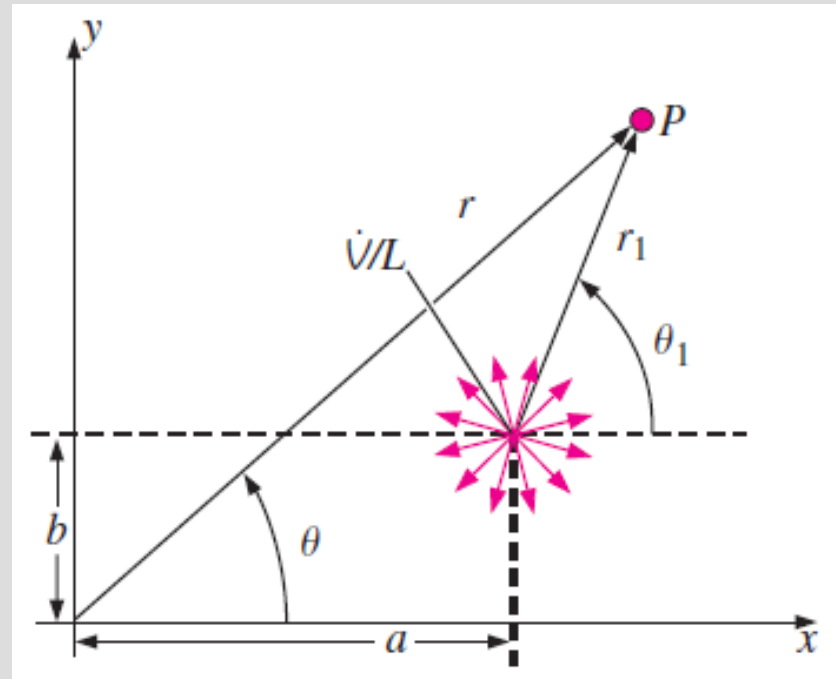
xy -düzleminde merkeze yerleştirilen \dot{V}/L şiddetindeki bir çizgisel kaynak için akım çizgileri (sürekli çizgi) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli çizgi).



(a, b) noktasındaki çizgisel kaynak:

$$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln r_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (10-44)$$

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{y-b}{x-a}$$



xy -düzleminde keyfi bir (a, b) noktasına yerleştirilen \dot{V}/L şiddetindeki çizgisel kaynak.

ÖRNEK 10-5 Eşit Şiddetli Kaynak ile Kuyunun Süperpozisyonu

Şekil 10-48'de gösterildiği gibi, $(-a, 0)$ noktasında \dot{V}/L şiddetinde bir çizgisel kaynak ile $(a, 0)$ noktasında aynı şiddete sahip (ancak ters işaretli) bir çizgisel kuyudan oluşan dönümsüz akış bölgesini göz önüne alınız. Akım fonksiyonu için hem Kartezyen hem de silindirik koordinatlarda bir ifade oluşturunuz.

ÇÖZÜM. Bir kaynak ve bir kuyunun süperpozisyonunu yapacak ve ψ için hem Kartezyen hem de silindirik koordinatlarda birer ifade elde edeceğiz.

Kabuller. Göz önüne alınan akış bölgesi sıkıştırılmaz ve dönümsüzdür.

Analiz. Kaynak için ψ 'yi elde etmek üzere Denklem 10-44'ü kullanalım.

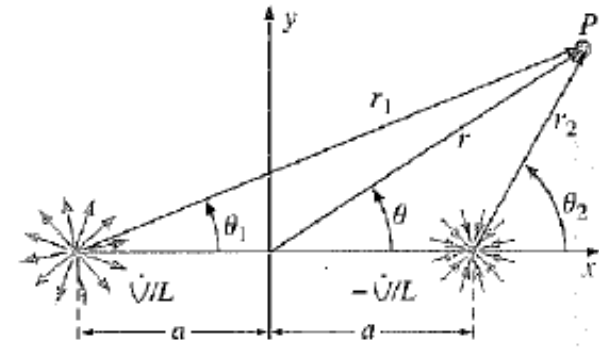
$$(-a, 0)'daki \text{ çizgisel-kaynak: } \psi_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 \quad \text{bu ifadede } \theta_1 = \arctan \frac{y}{x+a} \quad (1)$$

Benzer şekilde kuyu için,

$$(a, 0)'daki \text{ kuyu: } \psi_2 = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \theta_2 \quad \text{bu ifadede } \theta_2 = \arctan \frac{y}{x-a} \quad (2)$$

yazabiliriz. Süperpozisyon işlemi bize birleşik akım fonksiyonunu elde etmek üzere bu iki akım fonksiyonunu, (Denklem 1 ve 2), basit bir biçimde toplama imkanı tanır:

$$\text{Birleşik akım fonksiyonu: } \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (3)$$



ŞEKİL 10-48

$(-a, 0)$ 'da bulunan \dot{V}/L şiddetindeki bir çizgisel kaynak ile $(a, 0)$ 'da bulunan $(-\dot{V}/L$ kaynak şiddetinde) bir çizgisel kuyunun süperpozisyonu.

Denklem 3'ü yeniden düzenler ve her iki tarafın tanjantını alırsak,

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\sqrt{I/L}} = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} \quad (4)$$

elde ederiz. Burada bir trigonometrik özdeşlik kullandık (Şekil 10-49).

Şimdi de Denklem 1 ve 2'den θ_1 ve θ_2 'yi alıp bu ifadede yerine yazar ve akım fonksiyonunu elde etmek için bazı cebirsel işlemler yaparsak,

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\sqrt{I/L}} = \frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x+a} \frac{y}{x-a}} = \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

sonucuna veya her iki yanın ters tanjantını alarak,

$$\text{Nihai sonuç, Kartezyen koordinatlar: } \psi = \frac{-\sqrt{I/L}}{2\pi} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (5)$$

sonucuna varırız. Denklem 10-38'i kullanarak bunu silindirik koordinatlara dönüştürebiliriz:

$$\text{Nihai sonuç, Silindirik koordinatlar: } \psi = \frac{-\sqrt{I/L}}{2\pi} \arctan \frac{2ar \sin\theta}{r^2 - a^2} \quad (6)$$

İrdeleme Eğer kaynak ve kuyunun yerleri değiştirilirse, kaynak şiddeti $\sqrt{I/L}$ önündeki negatif işaretin kalkması dışında sonuç aynı olur.

Useful Trigonometric Identities

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

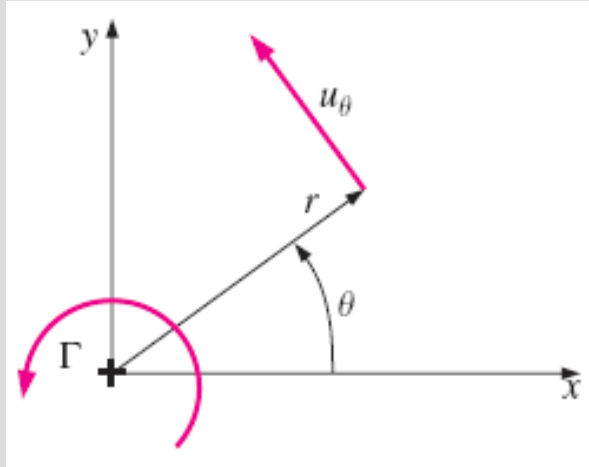
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

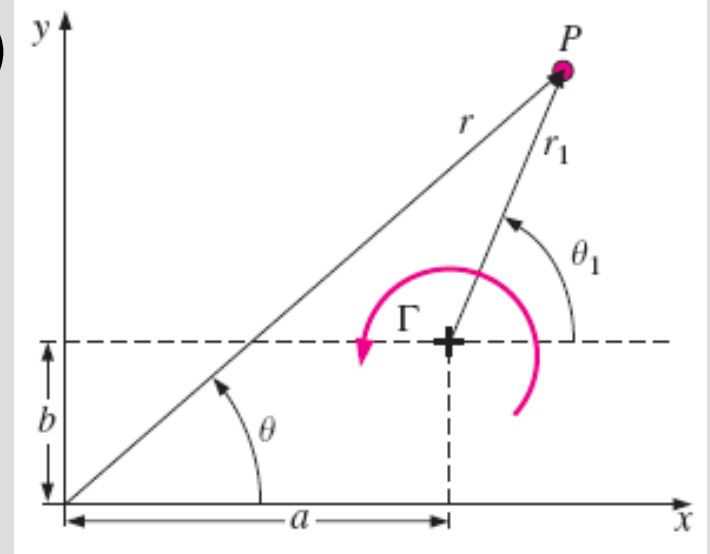
$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \beta \cot \alpha - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

Bazı faydalı trigonometrik özdeşlikler.

Yapıtaşı 3—Çizgisel Çevri (Vorteks)



xy -düzleminin merkezine yerleştirilen Γ şiddetinde çizgisel çevri.



xy -düzlemindeki keyfi bir (a, b) noktasına yerleştirilmiş Γ şiddetinde çizgisel çevri.

Çizgisel çevri:
$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Γ 'ya sirkülasyon veya çevri şiddeti adı verilir. ↓

Merkezdeki çizgisel çevri:
$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

(a, b) noktasındaki çizgisel çevri:
$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y-b}{x-a}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ÖRNEK 10-6 Bir Akışta Üç Bileşenden Oluşan Hız

Dönümsüz bir akış bölgesi; $(x, y) = (0, 1)$ 'de şiddeti $(\dot{V}/L)_1 = 2.00 \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir çizgisel kaynak, $(x, y) = (1, -1)$ 'de şiddeti $(\dot{V}/L)_2 = -1.00 \text{ m}^2/\text{s}$ olan başka bir çizgisel kaynak ve $(x, y) = (1, -1)$ 'de şiddeti $\Gamma = 1.50 \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir çizgisel çevrinin süperpozisyonundan oluşmaktadır. [2 numaralı kaynak $(\dot{V}/L)_2$ negatif olduğundan aslında bir kuyudur.] Tüm konum koordinatları metre olarak verilmiştir. Üç yapıtaşı bloğunun konumları Şekil 10-52'de gösterilmiştir. $(x, y) = (1, 0)$ noktasındaki akışkan hızını hesaplayınız.

ÇÖZÜM İki çizgisel kaynak ile bir çevrinin süperpozisyonu için $(x, y) = (1, 0)$ noktasındaki hız hesaplanacaktır.

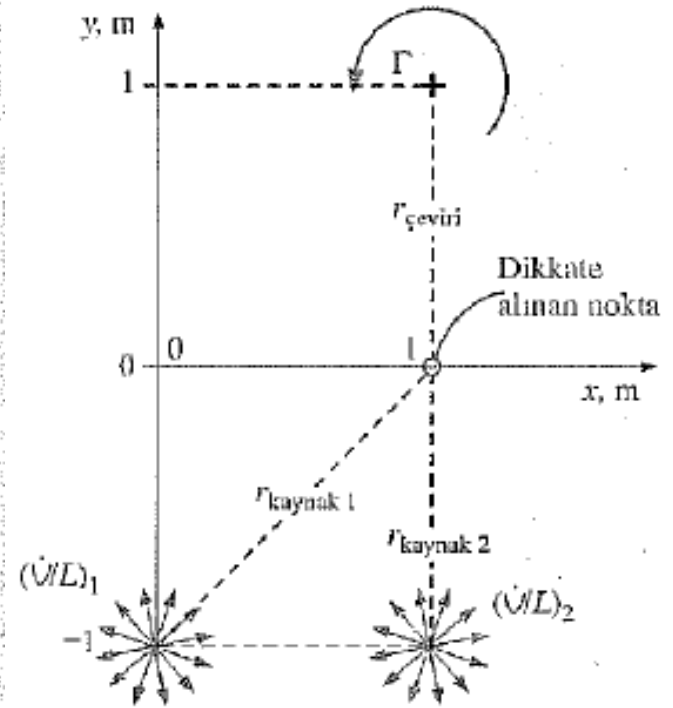
Kabuller 1 Modellenen akış bölgesi daimi, sıkıştırılmaz ve dönümsüzdür. **2** Her bir bileşenin verilen konumundaki hız sonsuzdur (bunlar tekil noktalardır) ve bu tekilliklerin hiç birinin civarındaki akış fiziksel değildir, ancak yapılacak analizde bu bölgeler göz ardı edilmektedir.

Analiz Bu problemi çözmek için birkaç yol vardır. Denklem 10-44 ve 10-47'yi kullanarak üç akım fonksiyonunu toplar, ardından hız bileşenlerini elde etmek için birleşik akım fonksiyonunun türevlerini alabiliriz. Alternatif olarak aynı şeyi hız potansiyeli fonksiyonu için yapabiliriz. Daha kolay bir yaklaşım ise hızın kendisinin süperpozisyon edilebildiğini düşünmektir. Bu amaçla, verilen bir noktadaki birleşik hızı oluşturmak için üç ayrı tekilliğin her birinin neden olduğu hız vektörlerini toplayalım. Yapılan işlem Şekil 10-53'te gösterilmiştir. Çevri $(1, 0)$ noktasının 1 m yukarısına yerleştirildiğinden çevrinin neden olduğu hız sağa doğru olup,

$$V_{\text{çevri}} = \frac{\Gamma}{2\pi r_{\text{çevri}}} = \frac{1.50 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi(1.00 \text{ m})} = 0.239 \text{ m/s} \quad (1)$$

büyükluğüne sahiptir. Benzer şekilde ilk kaynak, Şekil 10-53'te gösterildiği gibi $(1, 0)$ noktasında x -ekseni ile 45° açı yapan bir hız neden olur ve bu hızın büyüklüğü,

$$V_{\text{kaynak 1}} = \frac{(\dot{V}/L)_1}{2\pi r_{\text{kaynak 1}}} = \frac{2.00 \text{ m}^2/\text{s}}{2\pi(\sqrt{2} \text{ m})} = 0.225 \text{ m/s} \quad (2)$$



ŞEKİL 10-52

xy-düzleminde iki çizgisel kaynak ile bir çizgisel çevrinin süperpozisyonu (Örnek 10-6).

olur. Son olarak ikinci kaynak (kuyu) aşağı doğru dik ve

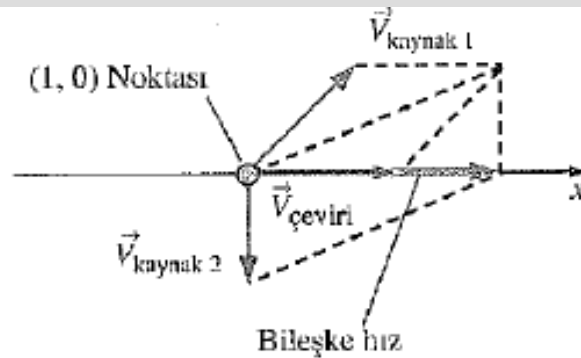
$$V_{\text{kaynak 2}} = \frac{|(\dot{\psi}/L)_2|}{2\pi r_{\text{kaynak 2}}} = \frac{|-1.00 \text{ m}^2/\text{s}|}{2\pi(1.00 \text{ m})} = 0.159 \text{ m/s} \quad (3)$$

büyükliğünde bir hız neden olur. Bu hızlar, Şekil 10-54'te gösterildiği gibi paralelkenarı tamamlamak suretiyle vektörel olarak toplanabilir. Denklem 10-35'i kullanarak bileşke hız,

$$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}_{\text{çevri}}}_{0.239 \text{ m/s}} + \underbrace{\vec{V}_{\text{kaynak 1}}}_{\left(\frac{0.225}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{0.225}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) \text{ m/s}} + \underbrace{\vec{V}_{\text{kaynak 2}}}_{-0.159 \vec{j} \text{ m/s}} = (0.398\vec{i} + 0\vec{j}) \text{ m/s} \quad (4)$$

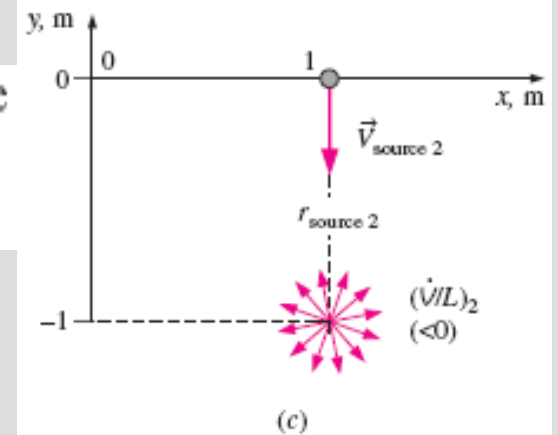
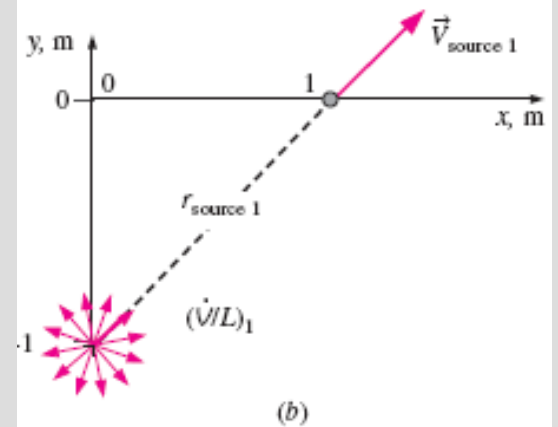
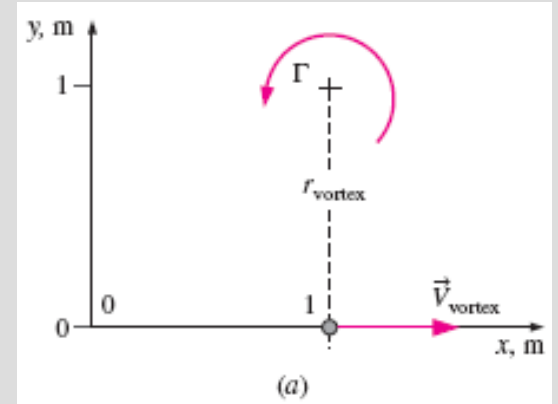
olarak bulunur. Buna göre (1, 0) noktasında süperpozisyon edilen hız 0.398 m/s ve sağa doğrudur.

İrdeleme Bu örnek, tıpkı akım fonksiyonu veya hız potansiyeli fonksiyonu gibi hızın da süperpozisyon edilebileceğini göstermektedir. ϕ ve ψ ye ait olan diferansiyel denklemlerin *doğrusal* olması, buna bağlı olarak türevlerinin de doğrusal olmasından ötürü hız süperpozisyonu dönümsüz akış bölgelerinde geçerlidir.



ŞEKİL 10-54

Örnek 10-6'da oluşan üç hızın vektörel toplamı.



(a) çevri, (b) kaynak 1 ve (c) kaynak 2 nedeniyle oluşan hız (kaynak 2'nin *negatif* olduğuna dikkat ediniz) (Örnek 10-6).

Yapıtaşı 4 - İkili (Doublet)

Birleşik akım fonksiyonu:

$$\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2}$$

$a \rightarrow 0$ için akım fonksiyonu:

$$\psi \rightarrow \frac{-a(\dot{V}/L)r \sin \theta}{\pi(r^2 - a^2)}$$

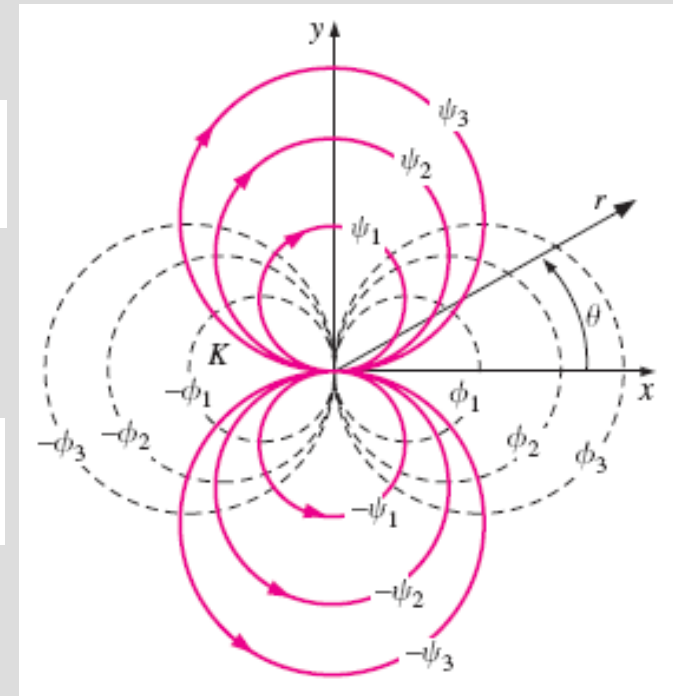
x -ekseni boyunca ikili:

$$\psi = \frac{-a(\dot{V}/L)}{\pi} \frac{\sin \theta}{r} = -K \frac{\sin \theta}{r}$$

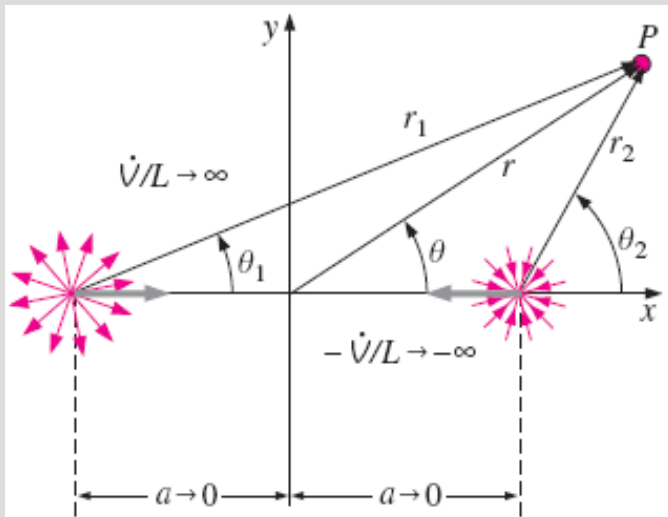
ikili şiddeti $K = a(\dot{V}/L)/\pi$

x -ekseni boyunca ikili: ϕ :

$$\phi = K \frac{\cos \theta}{r}$$



xy -düzleminde ve x -ekseniyle hizalanmış K şiddetine sahip merkezdeki bir ikili için akım çizgileri (sürekli çizgiler) ve eşpotansiyel çizgileri (kesikli çizgiler).



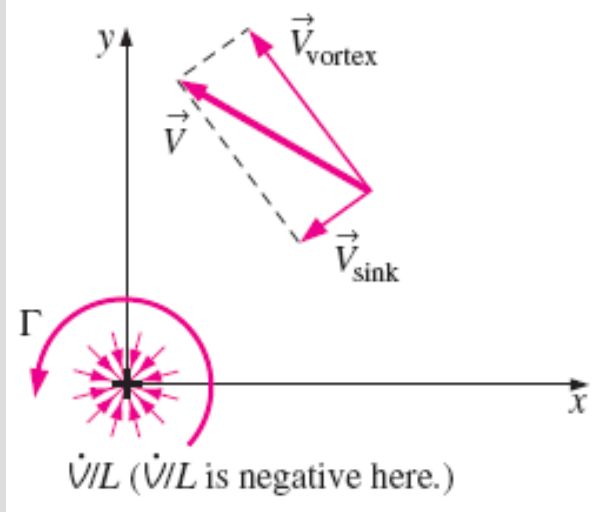
Bir ikili, $(-a, 0)$ 'daki bir çizgisel kaynak ile $(a, 0)$ 'daki bir çizgisel kuyunun süperpozisyonundan oluşturulur; $a \dot{V}/L$ çarpımı sabit kalacak şekilde a sifıra yaklaştıkça \dot{V}/L sonsuza yaklaşır.

Süperpozisyon ile Oluşturulan Dönümsüz Akışlar

Dönümsüz akışlar için bir dizi yapıtaşına sahip olduğumuza göre, artık süperpozisyon tekniği ile daha ilginç dönümsüz akış alanlarını oluşturmaya hazırız demektir

Burada vereceğimiz örnekleri xy -düzlemindeki düzlemsel akışlar ile sınırlıyoruz.

Bir Çizgisel Kuyu ile Bir Çizgisel Çevrinin Süperpozisyonu



Superposition:

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Akım çizgileri:

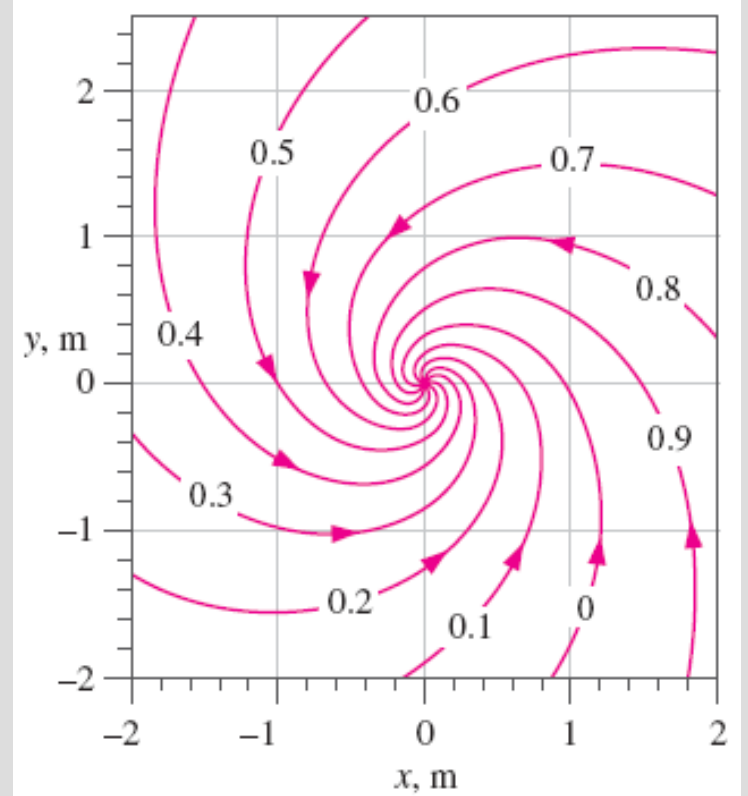
$$r = \exp\left(\frac{(\dot{V}/L)\theta - 2\pi\psi}{\Gamma}\right)$$

Hız bileşenleri:

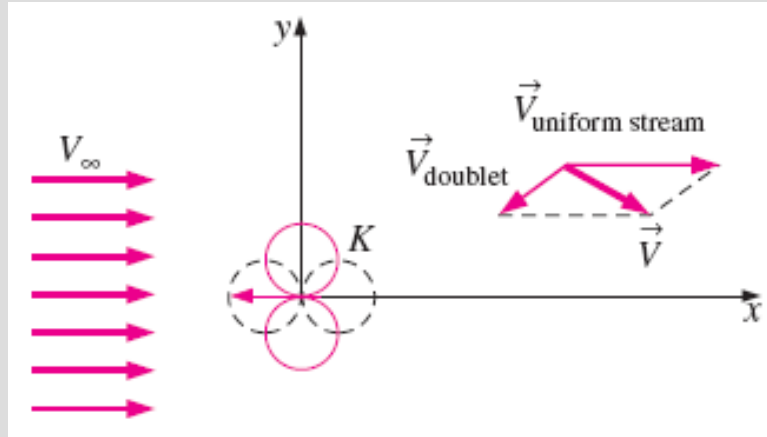
$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Merkeze yerleştirilmiş \dot{V}/L şiddetinde bir çizgisel kaynak ile Γ şiddetinde bir çizgisel çevrinin süperpozisyonu. Vektörel hız toplamı xy -düzleminde herhangi bir noktada gösterilmiştir.

Merkezdeki bir çizgisel kuyu ile bir çizgisel çevrintinin süperpozisyonu ile oluşturulan akım çizgileri, ψ için verilen değerler m^2/s birimindedir.



Bir Üniorm Akım İle Bir İkilinin Süperpozisyonu- Bir Silindir Üzerinden Akış



Bir üniorm akım ile bir ikilinin süperpozisyonu; vektörel hız toplamı xy-düzleminde herhangi bir keyfi noktada gösterilmiştir.

Süperpozisyon: $\psi = V_{\infty} r \sin \theta - K \frac{\sin \theta}{r}$

İkili şiddeti:

$$K = V_{\infty} a^2$$

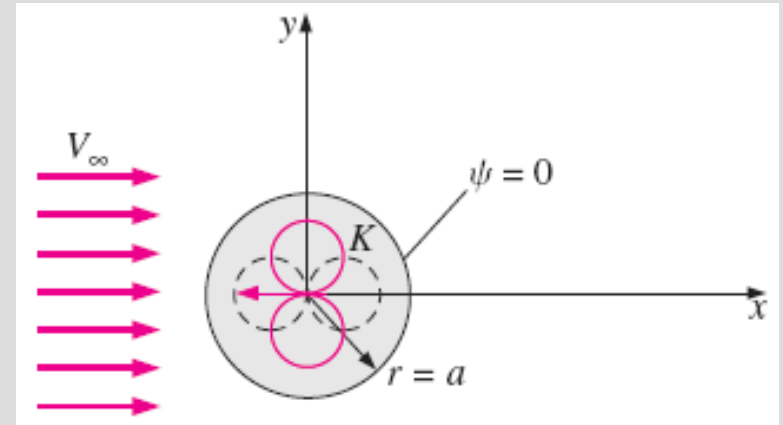
Akım fonksiyonunun alternatif formu:

$$\psi = V_{\infty} \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{V_{\infty} a} \quad r^* = \frac{r}{a} \quad \theta \quad \psi^* = \sin \theta \left(r^* - \frac{1}{r^*} \right)$$

Boyutsuz akım çizgileri:

$$r^* = \frac{\psi^* \pm \sqrt{(\psi^*)^2 + 4 \sin^2 \theta}}{2 \sin \theta}$$

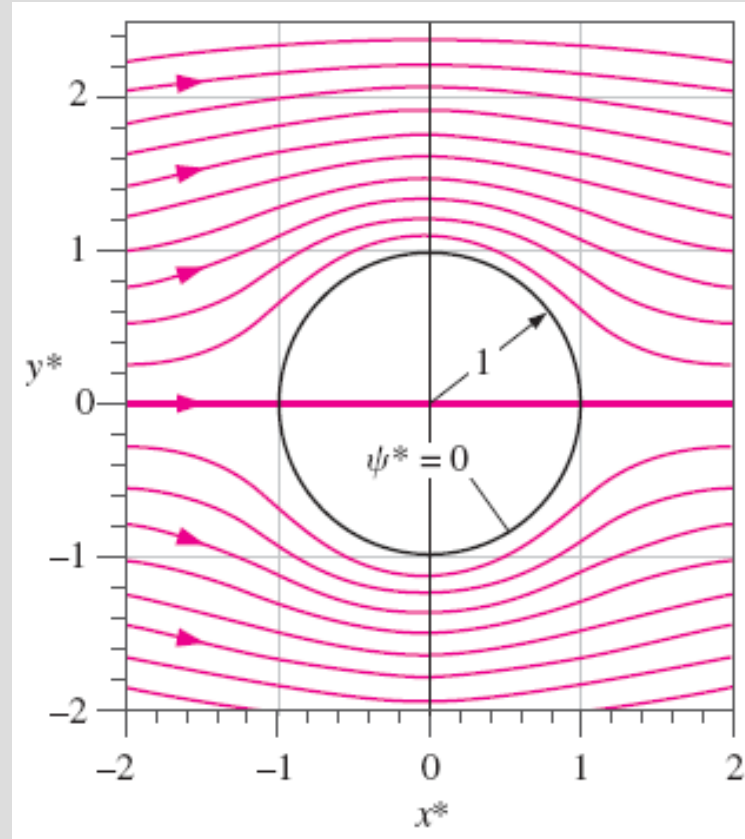


Bir üniorm akım ile bir ikilinin süperpozisyonu daire şeklinde bir akım çizgisi meydana getirir. 52

Bu akış bir silindir üzerinden olan potansiyel akışı temsil eder.

Bu akış alanında biri silindirin burnunda (önünde), diğeri de arkasında olmak üzere iki adet durma noktası vardır.

Bir üniform akım ve merkezdeki bir ikilinin süperpozisyonu ile oluşturulan boyutsuz akım çizgileri; $\psi^* = \psi/(V_\infty a)$, $\Delta\psi^* = 0.2$, $x^* = x/a$ ve $y^* = y/a$ olup a silindir yarıçapıdır.



$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Silindir yüzeyi üzerinde:

$$u_r = 0 \quad u_\theta = -2V_\infty \sin \theta$$

ÖRNEK 10-7 Bir Silindir Üzerindeki Basınç Dağılımı

Dönümsüz akış yaklaşımını kullanarak V_∞ hızında bir serbest akım içerisinde yerleştirilen a yarıçaplı bir silindirin yüzeyi üzerindeki boyutsuz statik basınç dağılımını hesaplayınız ve çiziniz (Şekil 10-62). Elde ettiğiniz sonuçları tartışınız. Silindirden uzakta basınç P_∞ 'dir.

ÇÖZÜM Bir serbest akıma bırakılan bir silindirin yüzeyi boyunca olan boyutsuz statik basınç dağılımını hesaplayıp çizeceğiz.

Kabuller 1 Modellenen akış bölgesi daimi, sıkıştırılmaz ve dönümsüzdür. **2** Akış xy -düzleminde iki boyutludur.

Analiz Her şeyden önce statik basınç, akış ile hareket eden bir basınç probuyla ölçülen basınçtır. Deneysel olarak biz bu basıncı bir yüzeyde, yüzeye dik yönde açılmış ince bir delik olan **statik basınç deliği** kullanarak ölçeriz (Şekil 10-63). Bu deliğin diğer ucunda bir basınç ölçme cihazı bulunur. Bir silindir yüzeyi boyunca olan statik basınç dağılımına ait deneysel veriler literatürde mevcuttur ve sonuçlarımızı bu deneysel verilerin bazılarıyla karşılaştıracacağız.

Bölüm 7'den, uygun boyutsuz basıncın **basınç katsayısı** olduğunu hatırlayınız.

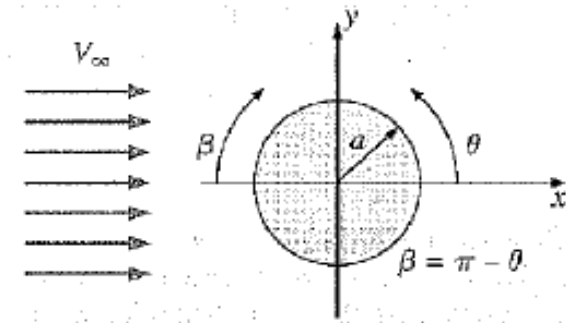
Basınç katsayısı:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} \quad (1)$$

Göz önüne alınan bölgede akış dönümsüz olduğundan akış alanındaki herhangi bir yerin basıncını hesaplamak için Bernoulli denklemini (Denklemler 10-27) kullanabiliriz. Yerçekimi etkilerini göz ardı ederek,

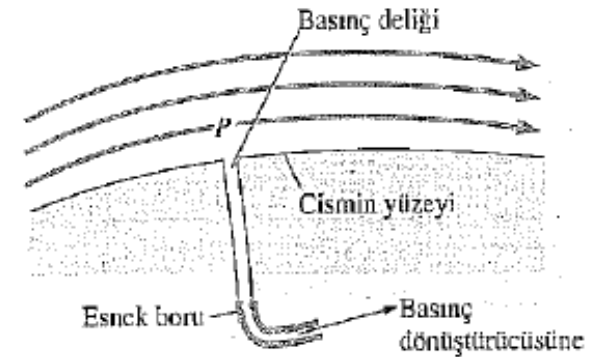
Bernoulli denklemi:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{sabit} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (2)$$



ŞEKİL 10-62

xy -düzleminde V_∞ üniform hızdaki bir serbest akıma bırakılan a yarıçaplı dairesel silindir üzerinden düzlemsel akış. Kural olarak β silindirin önünden itibaren tanımlanmıştır.



ŞEKİL 10-63

Bir yüzey üzerindeki statik basınç, manometreye veya bir elektronik basınç dönüştürücüsüne bağlı bir statik basınç deliği kullanılarak ölçülür.

yazılabilir. Denklem 2'yi yeniden düzenleyip Denklem 1'de yerine yazarsak,

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \quad (3)$$

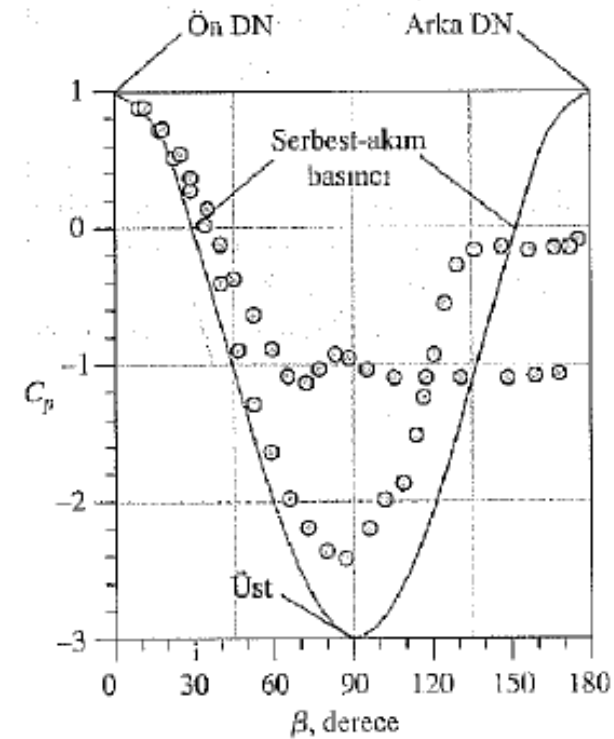
sonucuna varınız. Silindir yüzeyi boyunca $V^2 = u_\theta^2$ olduğundan daha önce bulduğumuz silindir üzerindeki teğetsel hız ifadesini (Denklem 10-59) yerine koymak suretiyle Denklem 3,

$$\text{Yüzey basınç katsayısı: } C_p = 1 - \frac{(-2V_\infty \sin \theta)^2}{V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

haline gelir. Cismin ön yüzünden itibaren tanımlanan β açısına bağlı olarak (Şekil 10-62) ifade etmek için $\beta = \pi - \theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$\beta \text{ cinsinden } C_p: \quad C_p = 1 - 4 \sin^2 \beta \quad (4)$$

sonucu elde edilir. Şekil 10-64'te silindirin üst yarısı üzerindeki basınç katsayısı (sürekli mavi eğri) β 'nin fonksiyonu olarak çizilmiştir. (Yukarıdan aşağı simetri olduğundan silindirin alt yarısındaki basınç dağılımını çizmek gereksizdir.) Şekilden ilk fark edilen şey, basınç dağılımının önden arkaya simetrik oluşudur. Zaten daha önceden, akım çizgilerinin de önden arkaya simetrik olduğunu bildiğimizden bu sonuç sürpriz değildir (Şekil 10-61).



ŞEKİL 10-64

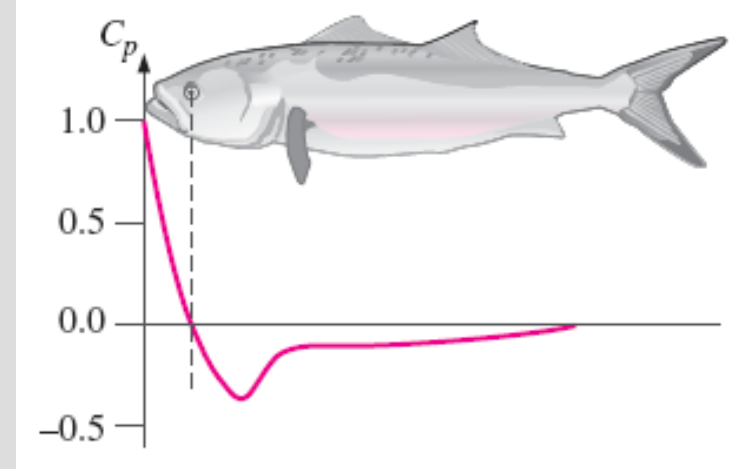
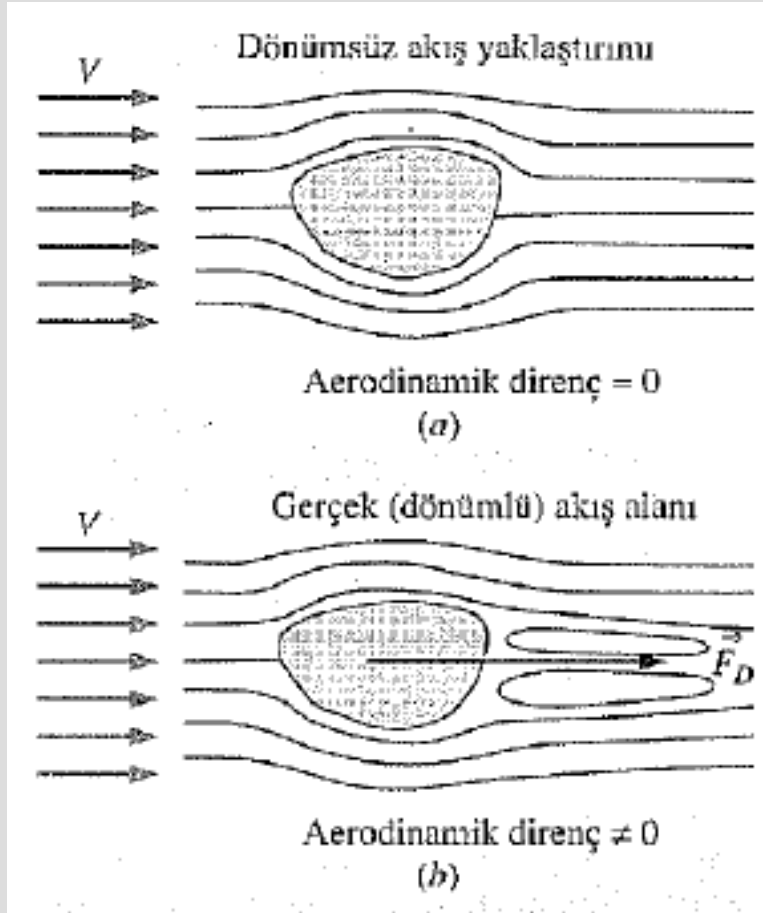
Dairesel bir silindir yüzeyi boyunca β açısının fonksiyonu olarak basınç katsayısı; sürekli mavi eğri dönümsüz akış yaklaşımıdır. Mavi daireler $Re = 2 \times 10^5$ değerindeki deneysel verileri—laminer sınır tabaka ayrılmasını, gri daireler ise $Re = 7 \times 10^5$ değerindeki tipik deneysel verileri—türbülans sınır tabaka ayrılmasını göstermektedir.

Veriler Kundu, 1990'dan alınmıştır.

Ön ve arka durma noktaları (sırasıyla $\beta = 0^\circ$ ve $\beta = 90^\circ$) Şekil 10-64'te işaretlenmiştir. Buralarda basınç katsayısı 1dir ve bu iki nokta, akış alanındaki en yüksek basınca sahiptir. Fiziksel değişkenler cinsinden durma noktalarındaki statik basınç $P_\infty + \rho V_\infty^2 / 2$ değerine eşittir. Diğer bir ifadeyle gelen akışın tam dinamik basınç değeri (ayrıca **vuruş basıncı** olarak da adlandırılır), akışkan durma noktasında sıfır hıza yavaşlarken (negatif ivme) cismin burnunda statik basınç olarak hissedilir. Silindirin en üstünde ($\beta = 90^\circ$) yüzey boyunca olan hız, serbest akım hızının iki katıdır ($V = 2 V_\infty$) ve basınç katsayısı en düşük değerine iner ($C_p = -3$). $C_p = 0$ olan iki noktada ($\beta = 30^\circ$ ve 150°) Şekil 10-64'te gösterilmiştir. Bu konumlardaki statik basınçlar serbest akım basıncına eşit olmaktadır ($P = P_\infty$).

İrileleme Şekil 10-64'te bir silindirin yüzeyi üzerinden laminar ve türbülanslı akışlara ait tipik deneysel veriler sırasıyla, mavi ve gri dairelerle gösterilmiştir. Silindir önü civarında dönümsüz akış yaklaşımının mükemmel olduğu açıktır. Bununla birlikte, β 'nin 60° 'den büyük değerleri ve özellikle silindirin arka kısmındaki (çizimin sağ yanında) dönümsüz akış sonuçları deneysel verilerle hiç uyum sağlamamaktadır. Gerçekten de bunun gibi küt cisim şekilleri üzerinden akışlar için cismin ön yarısında dönümsüz akış yaklaşımı oldukça iyi iş görmekte, fakat cismin arka yarısında yetersiz kalmaktadır. Dönümsüz akış yaklaşımını laminar akış verilerine kıyasla, türbülanslı akış verileriyle daha iyi bir uyum göstermektedir. Kısım 10-6'da daha ayrıntılı tartışıldığı gibi bu durum, türbülanslı sınır tabaka halinde, akış ayrılmasının aşağıdakının daha ilerisinde oluşmasından ileri gelmektedir.

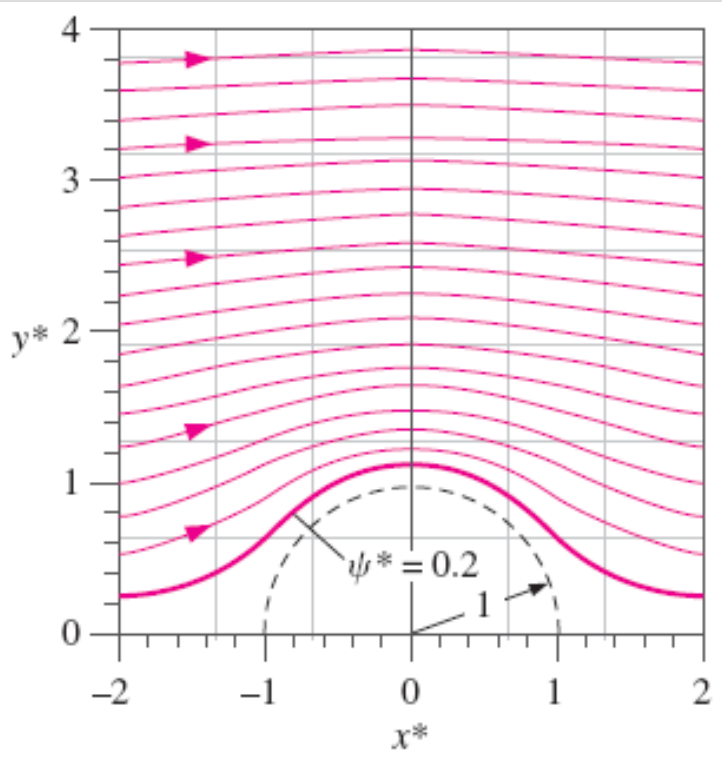
D'Alembert paradoksu: Dönümsüz akış yaklaşımını yapıldığında, üniform bir akım içerisinde bırakılan ve kaldırılmayan gelişigüzel şekilli bir cisim üzerindeki aerodinamik direnç kuvveti sıfırdır.



Bir balığın vücudu, yüzerken görüşü bozulmasın diye gözleri sıfır basınç noktası civarında olacak şekilde tasarlanmıştır. Gösterilen veriler bir [lüfere \(blue fish\)](#) aittir

(a) D'Alembert paradoksuna göre, dönümsüz akış yaklaşımını yapılması halinde *herhangi bir* şekle sahip, kaldırılmayan cisim üzerindeki aerodinamik direnç sıfırdır. (b) gerçek akışlarda ise üniform bir akıma bırakılan cisimler üzerinde sıfırdan farklı bir direnç vardır.

Dönümsüz akış yaklaşırtımı yapıldığında herhangi bir akım çizgisi katı bir çeper olarak düşünülebilir.



Şekil 10-61'de verilen ancak $\psi^* = 0.2$ çeper olarak modellendiği boyutsuzlaştırılmış akım çizgileri. Bu akış, simetrik bir tepe üzerinden olan hava akışını temsil etmektedir.

ÖRNEK 10-8 Elektrikli Süpürge'nin Emiş Ağzına Doğru Akış

Tipik bir evsel elektrik süpürge'nin zemin aparatı lülesinin içerisine doğru olan hava akışını dikkate alınız (Şekil 10-68a). Lüle giriş açıklığının eni $w = 2.0$ mm ve boyu $L = 35.0$ cm'dir. Ağız, şekilde gösterildiği gibi zeminden $b = 2.0$ cm yukarıda bir mesafede tutulmaktadır. Süpürge hortumundan geçen toplam debi $\dot{V} = 0.110$ m³/s'dir. Emiş aparatının merkez düzlemindeki akış alanını belirleyiniz (Şekil 10-68a'da xy -düzlemi).

Bunun için birkaç akım çizgisi çiziniz ve x -ekseni boyunca olan hız ve basınç dağılımlarını hesaplayınız. Zemin boyunca maksimum hız nedir ve nerede oluşur? Zemin boyunca süpürge nerede en etkin şekilde çalışır?

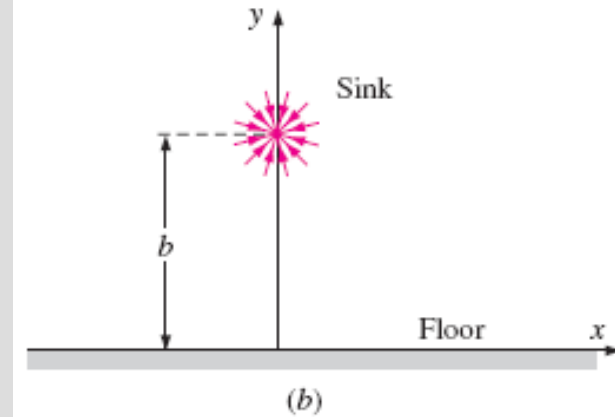
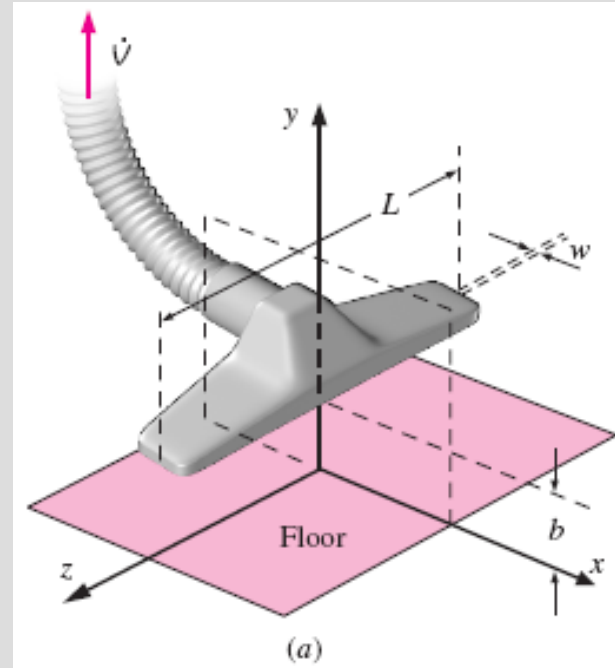
ÇÖZÜM Bir elektrikli süpürge'nin zemin aparatının merkez düzlemindeki akış alanını, zemin boyunca (x -ekseni) hız ve basıncı, zemin boyunca oluşan maksimum hız değerini ve konumunu, zemin boyunca süpürge'nin en etkin nerede çalıştığını belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılmazdır. **2** Akış xy -düzleminde iki-boyutludur (düzlemsel). **3** Akış alanının çoğu dönümsüzdür. **4** Oda sonsuz büyüklüktedir ve akış etkileyecek hava akımları bulunmamaktadır.

Analiz Süpürge'nin zemin aparatındaki açıklığını, Şekil 10-68b'de gösterildiği gibi x -ekseninden b mesafesi kadar yukarı yerleştirilen bir çizgisel kuyu olarak ele alalım (negatif şiddetli bir çizgisel kaynak). Bu yaklaşımları yapmakla, sonlu açıklık enini (w) göz ardı etmiş ve açıklık içerisine olan akışı, xy -düzleminde $(0, b)$ 'de bir nokta olan çizgisel kuyu içerisine akış olarak modellemiş oluruz. Ayrıca hortumdan veya aparat gövdesinden kaynaklanabilecek etkileri de ihmal ediyoruz. Çizgisel kaynağın şiddeti, toplam debinin açıklık uzunluğu olan L 'ye bölünmesiyle,

$$\text{Çizgisel kaynak şiddeti: } \frac{\dot{V}}{L} = \frac{-0.110 \text{ m}^3/\text{s}}{0.35 \text{ m}} = -0.314 \text{ m}^2/\text{s} \quad (1)$$

olarak elde edilir. Bu bir çizgisel kaynak değil bir çizgisel kuyu olduğundan negatif işaret kullandık.



Zemin aparatlı süpürge hortumu; (a) xz -düzlemindeki üç-boyutlu görünüş ve (b) bir çizgisel kuyu ile modellenmiş emişin xy -düzlemindeki kesit görünüşü.

Açıkça görülmektedir ki bu çizgisel kuyu (Şekil 10-68b) tek başına akışı modellemeye yeterli değildir. Çünkü hava kuyu içerisinde *zemin boyunca* yukarıdan da olmak üzere tüm yönlerden akmaktadır. Bu sorundan kaçınmak amacıyla, zemin etkisini modellemek için başka bir temel dönümsüz akışı (yapıtışı) ekleyelim. Bunu yapmanın akıllıca bir yolu **görüntüler metodunu** kullanmaktır. Bu teknik ile zemin altında $(0, -b)$ noktasına ikinci bir özdeş kuyu yerleştiriyoruz. Bu ikinci kuyuya **görüntü kuyu** adını veriyoruz. Bu durumda x -ekseni simetri doğrusu olduğundan, x -ekseninin kendisi akışın bir akım çizgisi haline gelir ve böylece zemin olarak düşünülebilir. Analiz edilecek akış alanı Şekil 10-69'da çizilmiştir. Şiddeti ψ/L olan iki kaynak gösterilmiştir. Tabanda olan görüntü kaynağıdır. Her iki kaynağın da gerçekte kuyu olabilmeleri için bu problemde ψ/L 'nin negatif olduğu hatırdan çıkarılmamalıdır (Denklemler 1).

Bu akış alanının dönümsüz yaklaşımını için akım fonksiyonunu oluşturmak üzere süperpozisyon tekniğini kullanalım. Buradaki cebirsel işlemler Örnek 10-5'tekine benzerdir, o örnekte x -ekseninde bir kaynak bir de kuyu vardı, burada ise y -ekseni üzerinde iki kaynağımız var. Akış kaynağına ait ψ 'yi elde etmek için Denklem 10-44'ü kullanarak,

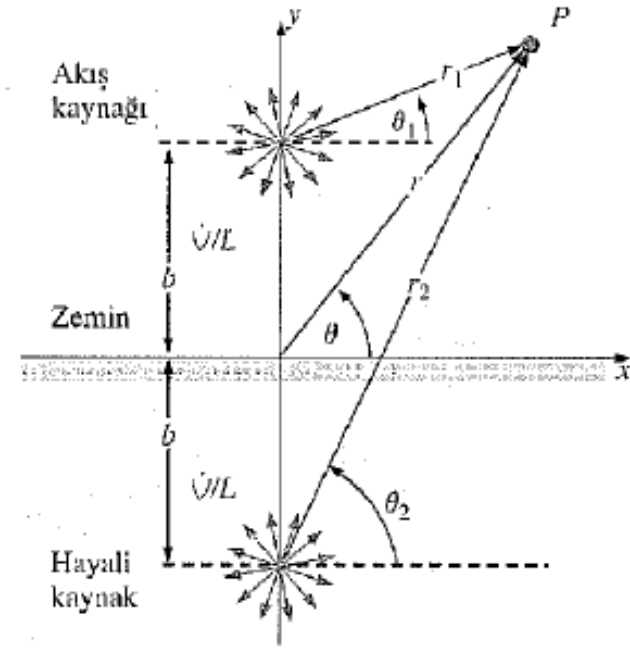
$$(0, b)'de \text{ çizgisel kaynak: } \psi_1 = \frac{\psi/L}{2\pi} \theta_1, \text{ burada } \theta_1 = \arctan \frac{y-b}{x} \quad (2)$$

elde ederiz. Benzer şekilde görüntü kaynağı için,

$$(0, -b)'de \text{ çizgisel kaynak: } \psi_2 = \frac{\psi/L}{2\pi} \theta_2, \text{ burada } \theta_2 = \arctan \frac{y+b}{x} \quad (3)$$

sonucuna varırız. Süperpozisyon bize bu iki akım fonksiyonunu (Denklemler 2 ve 4), birleşik akım fonksiyonunu elde etmek için toplama imkanı verir:

$$\text{Birleşik akım fonksiyonu: } \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\psi/L}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2) \quad (4)$$



ŞEKİL 10-69

$(0, b)$ noktasındaki ψ/L şiddetinde bir çizgisel kaynak ile $(0, -b)$ noktasında aynı şiddette bir çizgisel kaynağın süperpozisyonu. Altaki kaynak, x -eksenini bir akım çizgisi yapacak şekilde üstteki kaynağın ayna görüntüsüdür.

Denklem 4'ü tekrar düzenleyip her iki tarafın tanjantını alırsak,

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} \quad (5)$$

elde ederiz. Burada yine bir trigonometrik özdeşlik kullandık (Şekil 10-49).

Denklem 2 ve 3'ten θ_1 ve θ_2 alınarak bu ifadeye yerine yazılır ve sonuç ifadeyi elde etmek üzere bazı cebirsel işlemler yapılırsa, Kartezyen koordinatlarda,

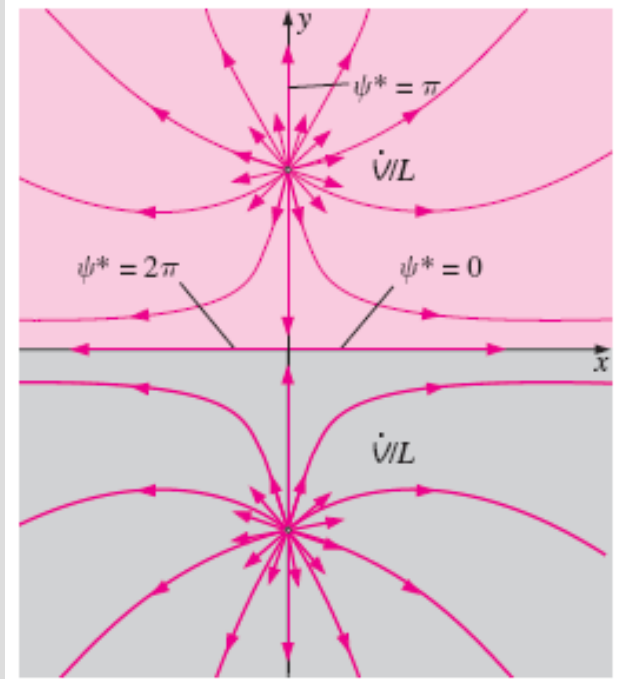
$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 + b^2} \quad (6)$$

sonucuna varılır. Denklem 10-38'i kullanarak bu denklemi silindirik koordinatlara dönüştürüp boyutsuzlaştıralım. Bir takım cebirsel işlemlerden sonra,

Boyutsuz akım fonksiyonu:
$$\psi^* = \arctan \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + 1/r^{*2}} \quad (7)$$

elde edilir. Burada $\psi^* = 2\pi\psi/(\dot{V}/L)$, $r^* = r/b$ olup Şekil 10-49'da verilen trigonometrik özdeşlikler kullanılmıştır.

x-eksenine göre simetriden dolayı üst kaynak tarafından üretilen havanın tümü, x-ekseninin yukarısında kalmalıdır. Benzer şekilde alt kaynak tarafından üretilen görüntü havanın da tümü x-ekseninin altında kalmalıdır. Eğer üstten gelen (kuzeyden) havayı mavi, alttan gelen (güneyden) havayı da gri ile renklendirmiş olsaydık (Şekil 10-70), mavi havanın tümü x-ekseninin yukarısında kalırken tüm gri hava da x-ekseninin altında kalırdı. Buna göre x-ekseni bir **bölen akım çizgisi** olur ve griden maviyi ayırır. Ayrıca Bölüm 9'dan, düzlemsel akışta bir akım çizgisinden, bitişiğindeki akım çizgisine kadar ψ değerinde oluşan farkın, bu iki akım çizgisi arasından birim genişlik başına geçen hacimsel debiye eşit olduğunu hatırlayınız. Pozitif x-ekseni boyunca ψ 'yi sıfır alıyoruz. Bölüm 9'da verilen *sol yan tarafını* uygulayarak negatif x-ekseni üzerindeki ψ 'nin üstteki çizgisel kaynak tarafından üretilen birim genişlik başına toplam hacimsel debiye, yani \dot{V}/L 'ye eşit olduğunu biliyoruz. Şöyle ki,



ŞEKİL 10-70

x-ekseni, üstteki kaynak (mavi) tarafından üretilen havayı alttaki kaynak (gri) tarafından üretilen havadan ayıran bir bölen akım çizgisidir

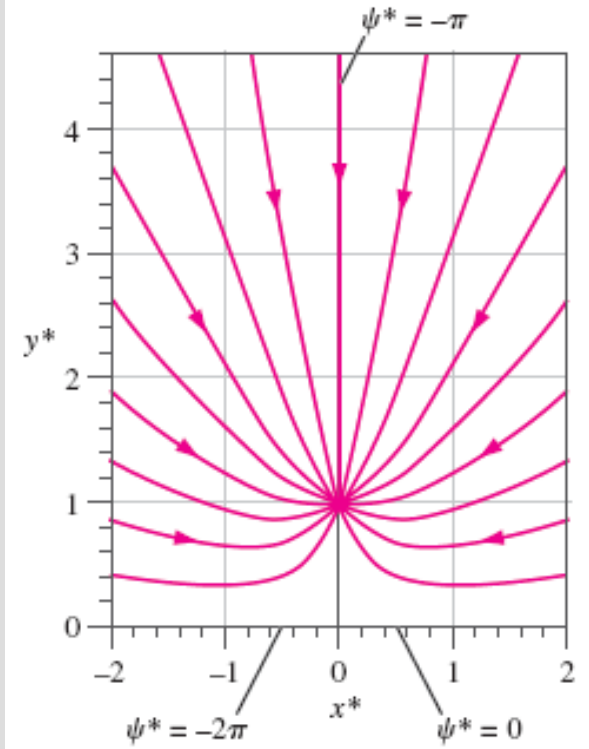
$$\psi_{-x\text{-ekseni}} - \underbrace{\psi_{+x\text{-ekseni}}}_0 = \sqrt{L} \rightarrow \psi^*_{-x\text{-ekseni}} = 2\pi \quad (8)$$

olur. Bu akım çizgileri Şekil 10-70'te işaretlenmiştir. Buna ilave olarak boyutsuz akım çizgisi $\psi^* = \pi$ de gösterilmiştir. Bu akım çizgisi y -ekseniyle çakışmaktadır zira bu eksene göre de simetri vardır. Alttaki kaynağın neden olduğu hız tam olarak üstteki kaynak tarafından oluşturulan hızı götürdüğü için merkez (0, 0) bir durma noktasıdır.

Burada modellenen elektrikli süpürge durumu için kaynak şiddetleri *negatif* (bunlar aslında *kuyudur*). Buna göre akışın yönü tersine döner ve ψ^* değerleri Şekil 10-70'de gösterilenlerin tersi yönde olur. Tekrar sol yan kuralını kullanarak $-2\pi < \psi^* < 0$ için boyutsuz akım fonksiyonunu çizelim (Şekil 10-71). Bu amaçla, değişik ψ^* değerleri için Denklem 7'den r^* 'i θ 'nın fonksiyonu olarak

$$\text{Boyutsuz akım çizgileri: } r^* = \pm \sqrt{\frac{\tan \psi^*}{\sin 2\theta - \cos 2\theta \tan \psi^*}} \quad (9)$$

şeklinde ifade edilebiliriz. Şeklin alt yarısı simetrik ve üst yarısının sadece bir ayna görüntüsü olduğundan sadece üst yarı çizilmiştir. Negatif \sqrt{L} durumunda hava, akım çizgileri üzerindeki oklarla gösterildiği gibi tüm yönlerden elektrikli süpürgesi içerisine doğru emilir.



ŞEKİL 10-71

Kaynak şiddetlerinin *negatif* (bunlar *kuyudur*) olduğu durum için Şekil 10-69'daki iki kaynağa ait boyutsuz akım çizgileri, ψ^* değeri üniform olarak -2π 'den (negatif x -ekseni) 0'a (pozitif x -ekseni) artırılmıştır ve akışın yalnızca üst yarısı gösterilmiştir. Akış (0, 1) noktasında kaynağa doğru yönelmiştir.

Zemin üzerindeki (x -ekseni) hız dağılımını hesaplamak amacıyla ya Denklem 6'nın türevini alır, düzlemsel akış için olan akım fonksiyonu tanımını (Denklem 10-29) uygular ya da bir vektörel toplama işlemi yapabiliriz. Bunlardan ikincisi daha basittir ve x -ekseni boyunca keyfi bir nokta için Şekil 10-72'de gösterilmiştir. Üstteki kaynağın (veya kuyunun) sebep olduğu hızın büyüklüğü $(\dot{V}/L)/(2\pi r_1)$ 'dir ve yönü, şekilde görüldüğü gibi r_1 'in yönüdür. Simetriden ötürü görüntü kaynağından kaynaklanan hız da aynı büyüklüktedir, ancak yönü r_2 ile aynıdır. İki yatay bileşen toplanacağı, buna karşın düşey bileşenler birbirlerini götürüleceği için bu iki hız vektörünün toplamı x -ekseni üzerine düşer. Bir miktar trigonometrik işlemden sonra,

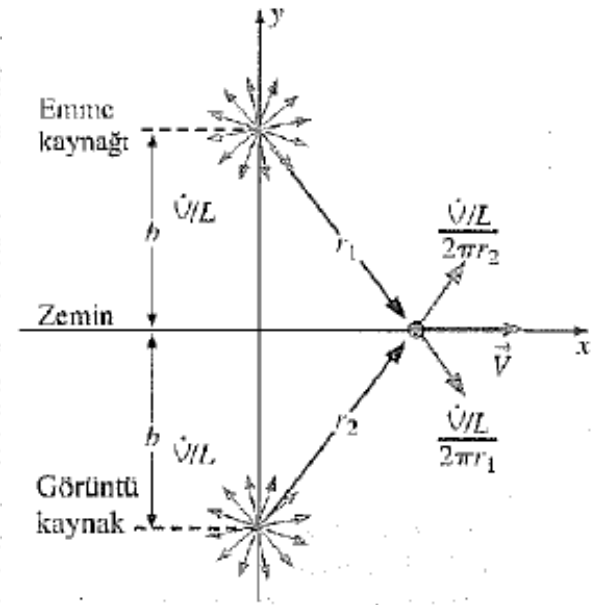
$$x\text{-ekseni boyunca aksenal hız: } u = V = \frac{(\dot{V}/L)x}{-\pi(x^2 + b^2)} \quad (10)$$

sonucuna varılır. Burada V Şekil 10-72'de çizildiği gibi zemin boyunca olan bileşke hız vektörünün büyüklüğüdür. Dönümsüz akış yaklaşımını yapmamızdan ötürü basınç alanını belirlemek için Bernoulli denklemi kullanılabilir. Yerçekimi etkisi ihmal edilerek,

$$\text{Bernoulli denklemi: } \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{sabit} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (11)$$

elde edilir. Basınç katsayısını bulmak için paydada kullanabileceğimiz bir referans hıza ihtiyacımız vardır. Böyle bir şey olmadığına göre bilinen parametrelerden bir tane türetilim; söz gelimi $V_{\text{ref}} = -(\dot{V}/L)/b$ olsun. Burada V_{ref} hızını pozitif yapmak için negatif işaret kullandık (elektrikli süpürge modelimiz için \dot{V}/L negatiftir). Buna göre C_p 'yi,

$$\text{Basınç katsayısı: } C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_{\text{ref}}^2} = \frac{V^2}{V_{\text{ref}}^2} = \frac{b^2 V^2}{(\dot{V}/L)^2} \quad (12)$$



ŞEKİL 10-72

İki kaynak tarafından meydana getirilen hızların vektörel toplamı; simetriden ötürü bileşke hız x -ekseni üzerinde herhangi bir konumda yataydır.

olarak tanımlarız. Bu ifadede Denklem 11'i de kullanmış olduk. Denklem 10'dan V alınıp bu denklemde yazılırsa,

$$C_P = - \frac{b^2 x^2}{\pi^2 (x^2 + b^2)^2} \quad (13)$$

sonucuna varılır. Şimdi de aksenal hızı ve mesafeyi boyutsuz değişkenlerle ifade edersek,

$$\text{Boyutsuz değişkenler: } u^* = \frac{u}{V_{\text{ref}}} = - \frac{ub}{\dot{V}/L} \quad x^* = \frac{x}{b} \quad (14)$$

elde ederiz. C_P zaten boyutsuzdur. Böylece boyutsuz olarak Denklem 10 ve 13,

$$\text{Zemin boyunca: } u^* = - \frac{1}{\pi} \frac{x^*}{1 + x^{*2}} \quad C_P = - \left(\frac{1}{\pi} \frac{x^*}{1 + x^{*2}} \right)^2 = -u^{*2} \quad (15)$$

haline gelir. u^* ve C_P , x^* 'nin fonksiyonu olarak Şekil 10-73'te çizilmiştir.

Şekil 10-73'ü incelediğimizde u^* 'ın $x^* = -\infty$ 'da 0 değerinden $x^* = -1$ 'de 0.159 değerine doğru yavaşça arttığını görüyoruz. Hava süpürge içerisine emildiği için beklendiği üzere negatif x^* değerleri için hız pozitiftir. Hava hızı arttıkça basınç düşer; $x^* = -\infty$ 'da C_P sıfırdır ve $x^* = -1$ 'de minimum değeri olan 0.0253 civarına iner. $x^* = -1$ ile $x^* = 0$ arasında ise süpürge zemin aparatı lülesinin tam altındaki dürma noktasında basınç sıfıra çıkarken bu arada hız da sıfıra iner. Lülenin sağında (pozitif x^* değerleri) hız simetrik olmamakla birlikte basınç simetriktr.

Zemin boyunca maksimum hız (minimum basınç) $x^* = \pm 1$ 'de meydana gelir. Bu mesafe lüenin zeminden olan düşey yüksekliği ile aynıdır (Şekil 10-74). Boyutlu terimler cinsinden zemin boyunca maksimum hız $x = \pm b$ 'de oluşur ve bu hız,

Zemin boyunca maksimum hız:

$$\left| u \right|_{\text{maks}} = - \left| u^* \right|_{\text{maks}} \frac{U/L}{b} = -0.159 \left(\frac{-0.314 \text{ m}^2/\text{s}}{0.020 \text{ m}} \right) = 2.50 \text{ m/s} \quad (16)$$

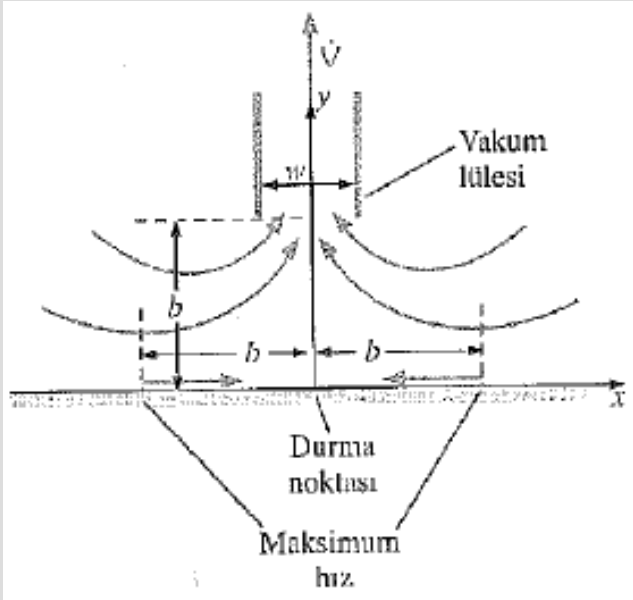
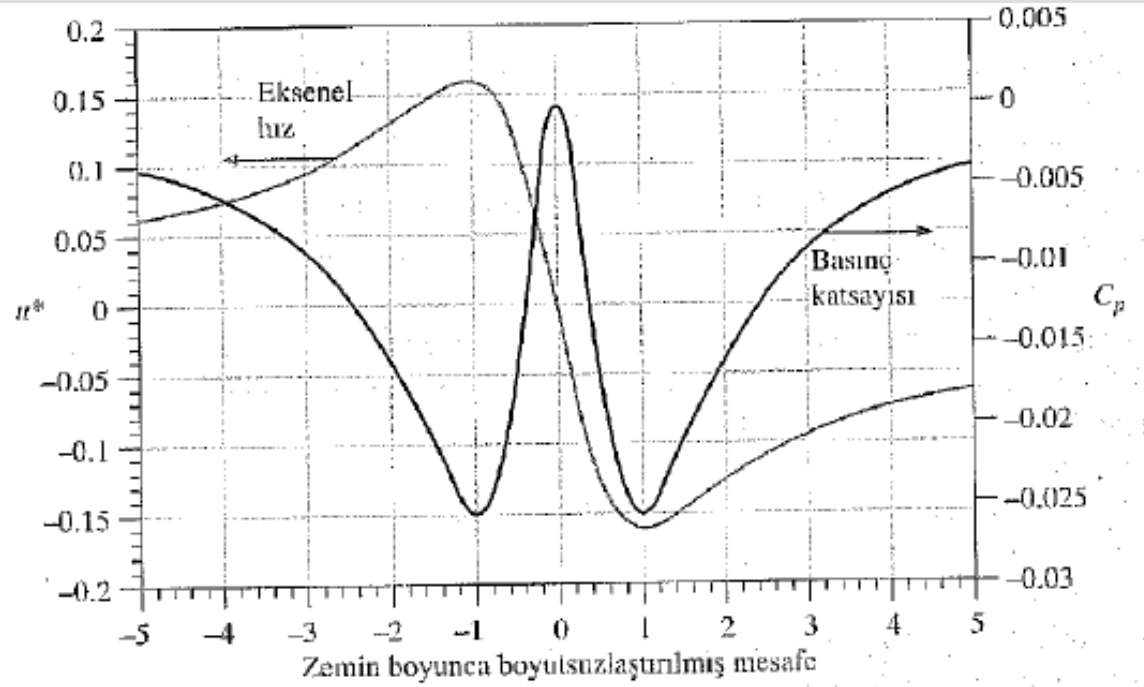
olarak bulunur.

Bir elektrik süpürgesinden, zemin boyunca hızın en yüksek, basıncın ise en düşük olması durumunda en etkin şekilde tozu emmesini bekleriz. Oysa düşüncemizin aksine en iyi performans, emme ağzının tam altında değil Şekil 10-74'te gösterildiği gibi $x = \pm b$ 'de oluşmaktadır.

İrdeleme Çizgisel bir kuyunun hiçbir uzunluk ölçeği bulunmadığından, analizimizde vakum lülesinin eni olan w 'yi hiç kullanmadığımıza dikkat ediniz. Bir elektrikli süpürge en iyi $x \cong \pm b$ 'de çalıştığını, sert bir zemin üzerinde (şeker veya tuz gibi) bir miktar ince tanecikli malzeme ve bir elektrik süpürgesi kullanarak basit bir deneyle görebilirsiniz. Akışın dönümlü olduğu zemine çok yakın yerler dışında elektrik süpürge içerisine doğru olan akışın her yerinde dönümsüz akış yaklaşımının oldukça gerçekçi olduğu bu örnekten anlaşılmaktadır.

ŞEKİL 10-73

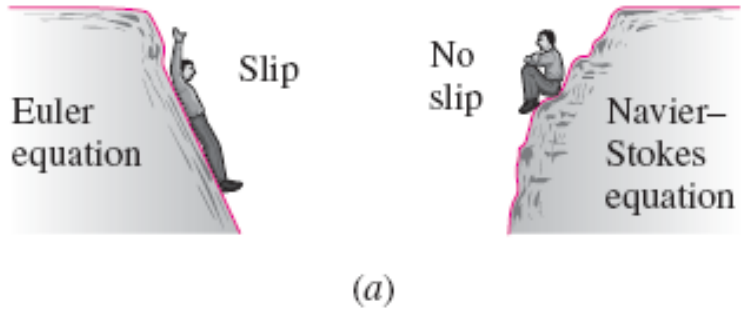
Dönümsüz bir akış bölgesi olarak modellenen bir elektrikli süpürgeğin altında zemin boyunca oluşan boyutsuz aksenal hız (mavi eğri) ve basınç katsayısı (siyah eğri).



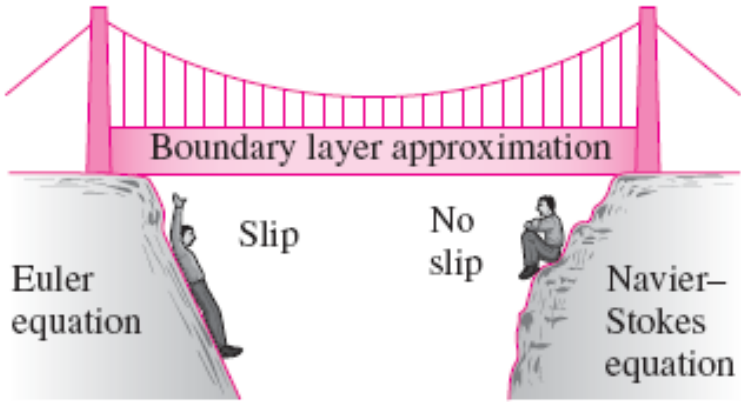
Dönümsüz akış yaklaşımına göre zemin boyunca maksimum hız, bir elektrik süpürgeşi lülesinin altında $x = \pm b$ noktalarında oluşur. Lülenin tam altında bir durma noktası meydana gelir.

10-6 ■ SINIR TABAKA YAKLAŞTIRIMI

Sınır tabaka yaklaşımını Euler denklemiyle Navier-Stokes denklemleri arasındaki ve katı çeperlerdeki kayma koşulu ile kaymama koşulu arasındaki boşluğa köprü olur (Şekil 10-75b).



(a)



(b)

(a) (Çeperlerde kayırıcıya izin veren) Euler denklemleri ile kaymama koşulunu destekleyen Navier-Stokes denklemleri arasında dev bir boşluk vardır; (b) sınır tabaka yaklaşımını bu boşluğa köprü olur.

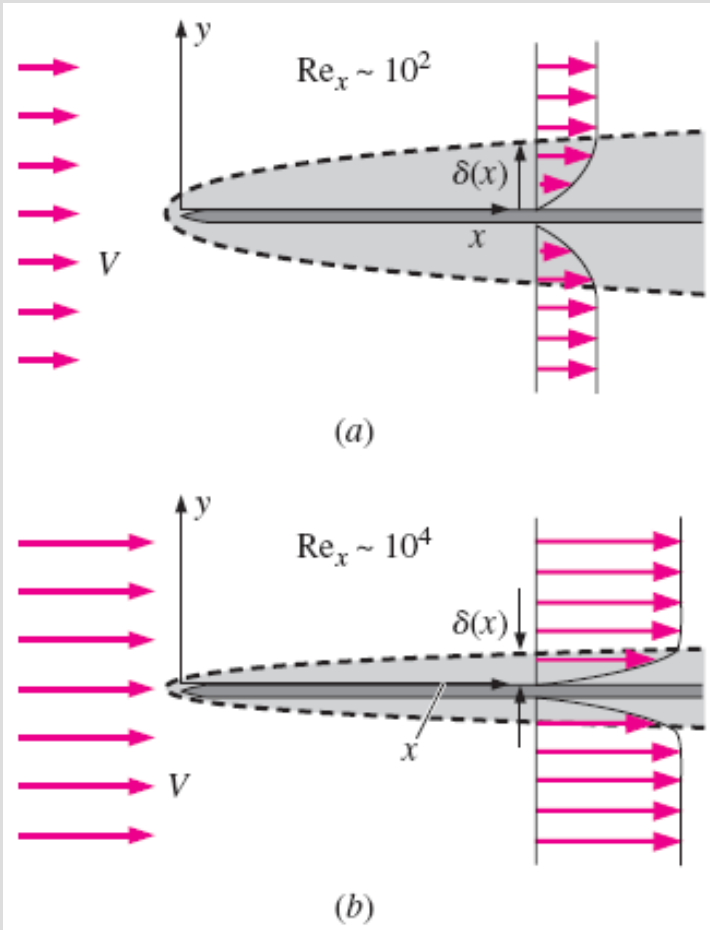


Prandtl'in sınır tabaka kavramı, akışı bir dış akış bölgesi ve bir sınır tabaka bölgesine ayırır (çizim ölçeksizdir).

Sınır tabaka yaklaşımını

Akışı iki bölgeye ayırır:

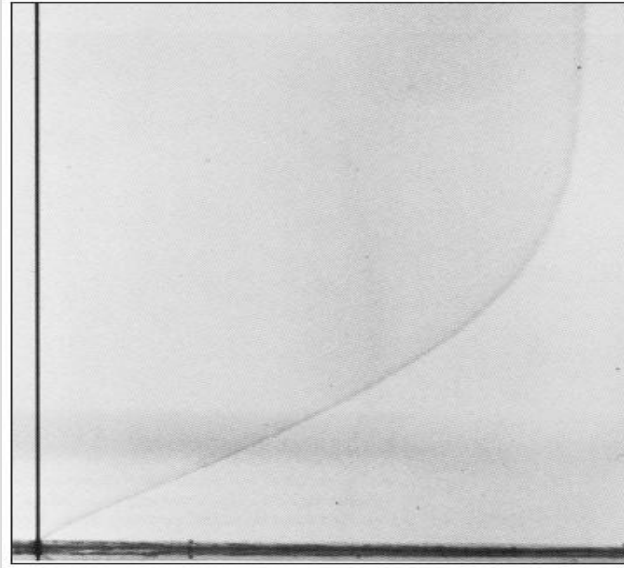
Viskoz olmayan ve/veya dönümsüz olan **dış akış** bölgesi ve bir katı çeper civarında viskoz kuvvetlerin ve dönümlülüğün göz ardı edilemeyeceği çok ince bir akış bölgesi olan ve **sınır tabaka** olarak adlandırılan iç akış bölgesi.



Düz bir plaka boyunca Reynolds sayısı:

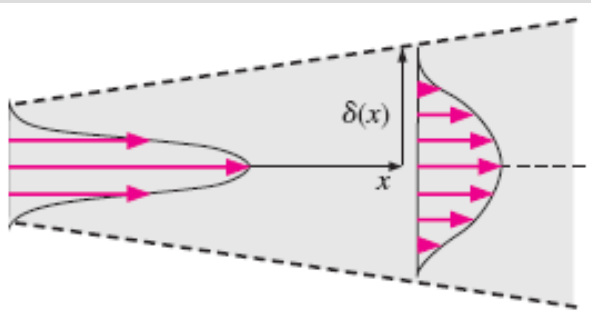
$$Re_x = \frac{\rho Vx}{\mu} = \frac{Vx}{\nu}$$

Verilen bir x-konumunda, Reynolds sayısı ne kadar yüksekse sınır tabaka da o oranda incedir.

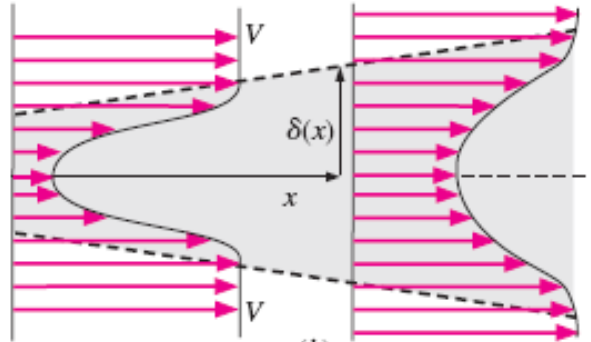


Üniform akımın *düz* bir plakaya *doğru* paralel akışı (çizimler ölçekli değildir): (a) $Re_x \sim 10^2$, (b) $Re_x \sim 10^4$. Reynolds sayısı ne kadar büyükse, plaka boyunca verilen bir x-konumundaki sınır tabaka o oranda incedir.

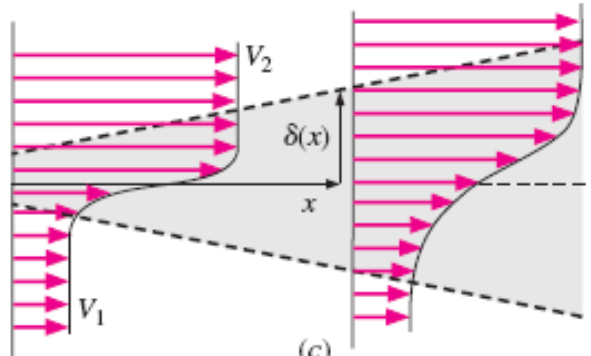
Laminer düz plaka sınır tabaka profilinin akış görselleştirilmesi. Fotoğraf, 1953 yılında F, X. Wortmann tarafından Tellür metodu ile görselleştirme yapılarak çekilmiştir. Akış soldan sağa doğrudur ve düz plakanın giriş kenarı, görünen bölgenin solunun uzağında kalmaktadır.



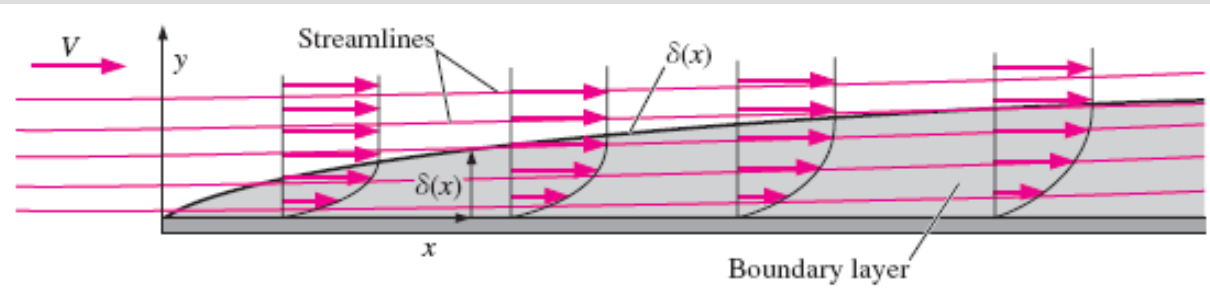
(a)



(b)



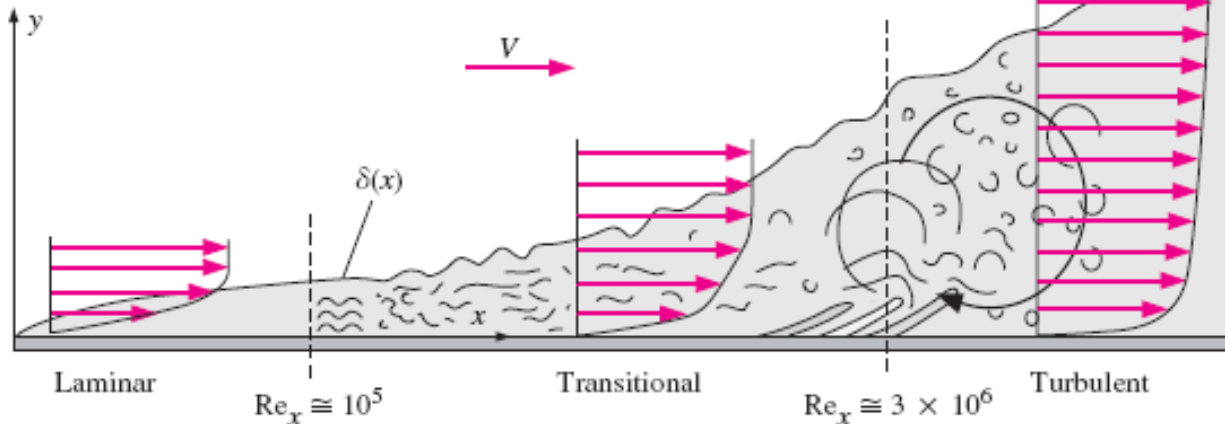
(c)



Bir düz plaka sınır tabakası için akım çizgileri ve x 'in fonksiyonu olarak δ 'yı temsil eden eğrinin karşılaştırılması. Akım çizgileri $\delta(x)$ 'i kestiğinden, $\delta(x)$ 'in kendisi akışa ait bir akım çizgisi olamaz.

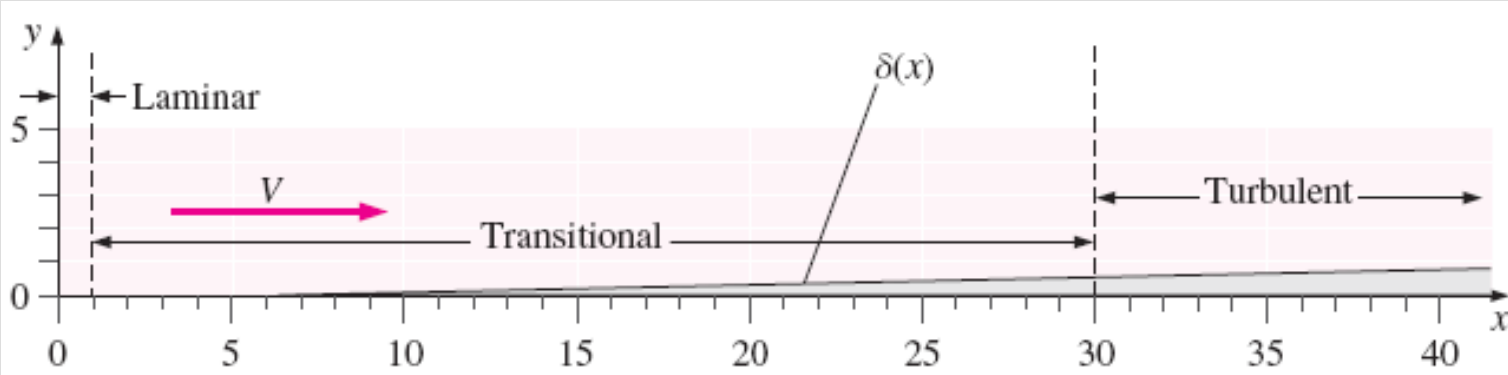
$$Re_{x, \text{critical}} \cong 1 \times 10^5$$

$$Re_{x, \text{transition}} \cong 3 \times 10^6$$



Sınır tabaka yaklaştırımının uygun olabileceği ilave üç akış bölgesi: (a) jetler, (b) art izleri ve (c) karışım tabakaları.

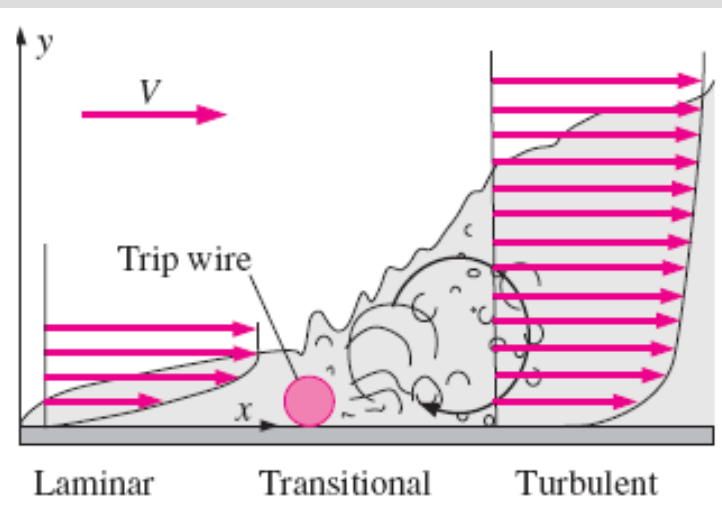
Bir düz plaka üzerindeki laminar sınır tabakanın tamamen türbülanslı sınır tabakaya geçişi (çizim ölçeksizdir).



Gerçek mühendislik akışlarında türbülansa geçiş genellikle daha ani ve sakin serbest-akımlı pürüzsüz düz plaka için verilen değerlerden çok daha önce meydana gelir (daha düşük Re_x değerinde).

Yüzey boyunca pürüzlülük, serbest-akım bozuklukları, akustik gürültü, akış kararsızlıkları, titreşimler ve çeper eğriliği gibi faktörler erken geçiş konumunu etkiler.

Düz bir plaka üzerindeki *sınır* tabaka kalınlığının ölçekli çizimi. Laminer, geçiş ve türbülanslı bölgeler, pürüzsüz yüzey ve sakin serbest-akım şartları için gösterilmiştir.



$$Re_{x, cr} = 5 \times 10^5$$

Bir sınır tabaka içerisinde türbülansa geçişi erkenden başlatmak için çoğunlukla bir engel teli kullanılır (çizim ölçekli değildir).

ÖRNEK 10-9 Sınır Tabaka Laminer mi Yoksa Türbülanslı mı?

Alüminyum bir kano göl yüzeyinde 2.24 m/s hızla yatay olarak hareket etmektedir (Şekil 10-84). Gölün sıcaklığı 10°C'dir. Kanonun altı düz olup 4.87 m boyundadır. Kanonun alt yüzeyindeki sınır tabaka laminer mi yoksa türbülanslı mıdır?

ÇÖZÜMÜ Bir kanonun alt yüzeyi üzerindeki sınır tabakanın laminer mi yoksa türbülanslı mı olduğunu belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılmazdır. 2 Kano altındaki sırtlar, çarpmalar ve diğer düzgünlükler göz ardı edilmektedir. Kano tabanı, akışın yönü ile tam olarak hizalanmış pürüzsüz düz bir plaka kabul edilmektedir. 3 Kanodaki referans koordinat sistemine göre, kano altında bulunan sınır tabakanın altındaki su $V = 2.24$ m/s üniform hızıyla hareket etmektedir.

Özellikler $T = 10^\circ\text{C}$ 'deki suyun kinematik viskozitesi $\nu = 1.307 \times 10^{-6}$ m²/s.

Analiz İlk olarak Denklem 10-60'ı kullanarak kanonun arka ucundaki Reynolds sayısını hesaplayalım:

$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(2.24 \text{ m/s})(4.87 \text{ m})}{1.307 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 8.35 \times 10^6 \quad (1)$$

Bu Re_x değeri, $Re_{x_{kr}}$ 'ten çok büyük, hatta $Re_{x_{geçiş}}$ 'ten de büyük olduğundan kano arkasına kadar sınır tabaka kesinlikle türbülanslıdır.

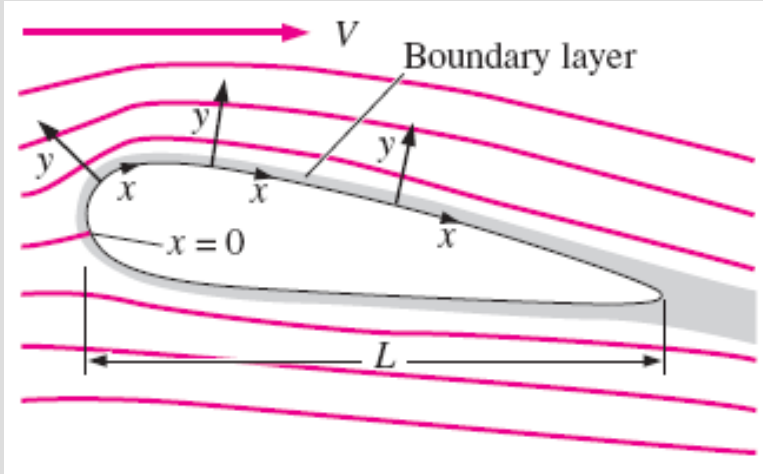
İnceleme Kano tabanı mükemmel derecede pürüzsüz ve düz olmadığından, ayrıca gölde, dalgalanmalardan, küreklere, yüzen balıklardan vb. kaynaklanabilecek bazı çalkantılar olabileceğinden, türbülansa geçişin Şekil 10-81'de gösterilen ideal durumdakinden çok daha önce ve çok daha hızlı olması beklenir. Bu nedenle sınır tabakanın türbülanslı olduğunu daha da emin bir şekilde söyleyebiliriz.



ŞEKİL 10-84

Bir kanonun düz olan alt yüzeyi boyunca büyüyen sınır tabaka. Daha açık görülmesi için sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir.

Sınır Tabaka Denklemleri



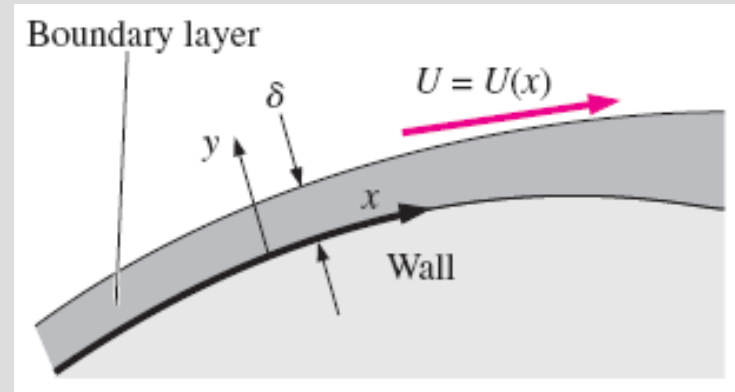
$$(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = -[Eu] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{Re} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

$$u \sim U \quad P - P_\infty \sim \rho U^2 \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L} \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim U/L} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim v/\delta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{U}{L} \sim \frac{v}{\delta}$$

Bir cisim üzerindeki akış için sınır tabaka koordinat sistemi; x, yüzeyi izler ve tipik olarak cismin ön durma noktasında **sıfır** alınır, y ise yerel olarak yüzeye her yerde **diktir**.

U, sınır tabakanın tam üstündeki bir konumda, çepere paralel hız bileşeninin büyüklüğüdür.



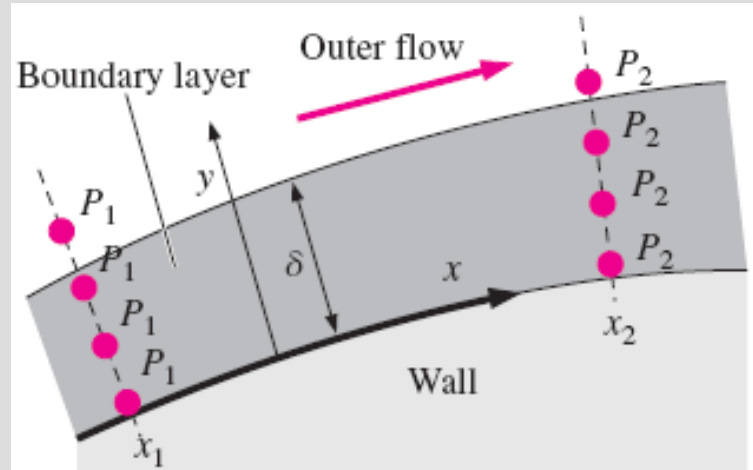
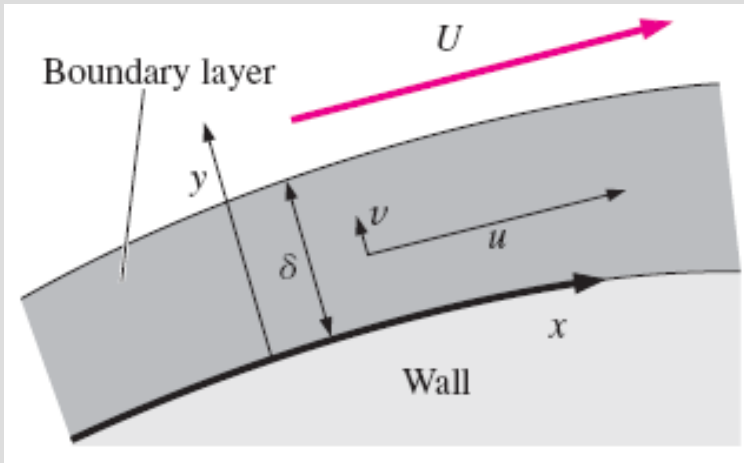
Bir cismin yüzeyi boyunca uzunluk ölçekleri x ve δ ile hız ölçęi U 'yu gösteren sınır tabakanın büyütölmüş görünüşü.

$$v \sim \frac{U\delta}{L} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{\delta} \quad u^* = \frac{u}{U} \quad v^* = \frac{v}{U\delta} \quad P^* = \frac{P - P_\infty}{\rho U^2}$$

$$\underbrace{u^* U}_{\frac{\partial v^* U \delta}{\partial x^* L^2}} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}} + \underbrace{v^* \frac{U\delta}{L}}_{\frac{\partial v^* U \delta}{\partial y^* L \delta}} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^* \rho U^2}{\partial y^* \delta}} + \underbrace{v^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{v^* \frac{\partial^2 v^* U \delta}{\partial x^{*2} L^3}} + \underbrace{v^* \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{v^* \frac{\partial^2 v^* U \delta}{\partial y^{*2} L \delta^2}}$$

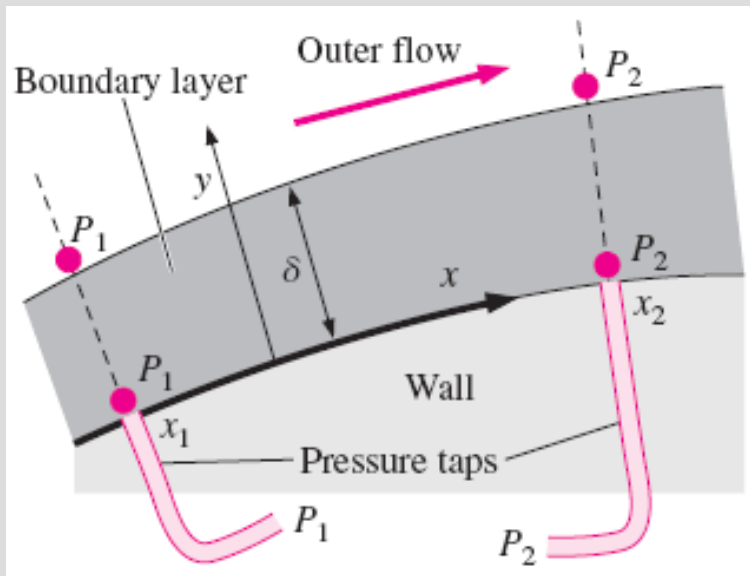
$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{v}{UL}\right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{v}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \quad \frac{\partial P^*}{\partial y^*} \cong 0$$

Bir sınır tabaka içerisinde sınır tabakaya dik yönde (y-yönü) basınç hemen hemen sabittir.



Bir cismin yüzeyi boyunca v hız bileşeninin u 'dan çok küçük olduğunu gösteren, çok fazla büyütülmüş sınır tabakanın görünüşü.

Basınç, sınır tabaka boyunca (x - yönü) değişebilir, ancak sınır tabakaya dik yönde (y - yönü) basınçtaki değişim ihmal edilebilir.

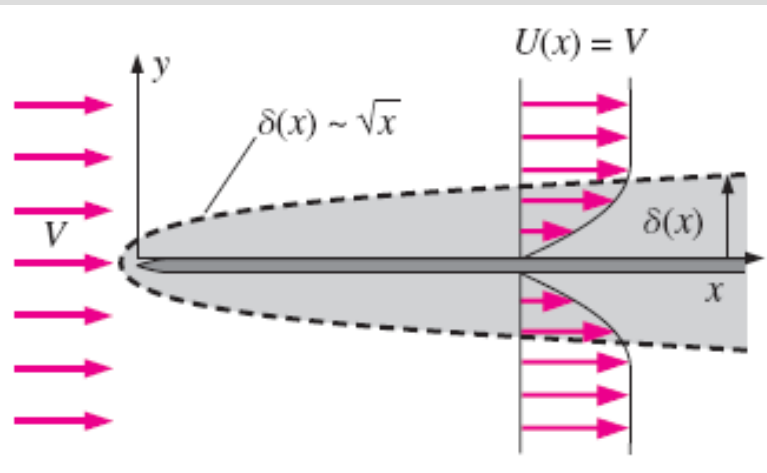


Bir sınır tabakanın dışında yer alan dönümsüz akış bölgesindeki basınç çeper yüzeyindeki basınç delikleri ile ölçülebilir. Şekilde bu tür iki basınç deliği çizilmiştir.

$$\underbrace{u}_{u^*U} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial u^*U}{\partial x^*} \frac{1}{L}} + \underbrace{v}_{v^* \frac{U\delta}{L}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\partial u^*U}{\partial y^*} \frac{1}{\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*\rho U^2}{\partial x^*} \frac{1}{L}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\nu \frac{\partial^2 u^*U}{\partial x^{*2}} \frac{1}{L^2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\nu \frac{\partial^2 u^*U}{\partial y^{*2}} \frac{1}{\delta^2}}$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\left(\frac{\nu}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim 1 \quad \text{Re}_L = UL/\nu, \quad \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$



Düz bir plaka üzerindeki laminar sınır tabaka denklemleri için yapılan büyüklük mertebesi analizi δ 'nın \sqrt{x} benzeri şekilde büyüdüğünü ortaya koymaktadır (çizim ölçekli değildir).

x-momentum sınır tabaka denklemini:

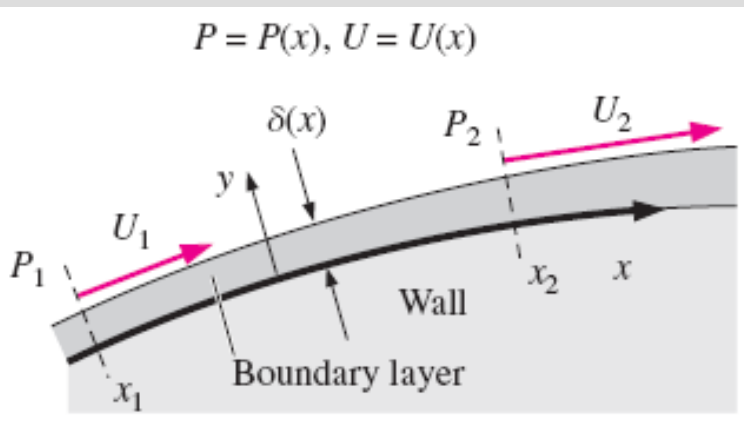
$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = \text{constant}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(10-70)



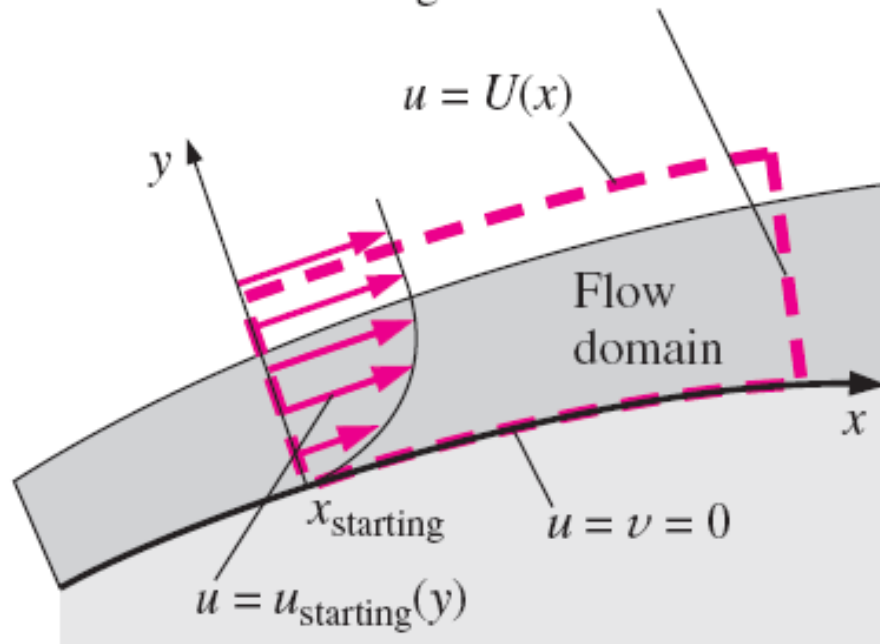
Çepere paralel dış akış hızı $U(x)$ 'tir ve dış akış basıncı olan $P(x)$ 'ten elde edilir. Bu hız, sınır tabaka momentum denkleminin x -bileşeninde görülür (Denklemler 10-70).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Sınır tabaka denklemleri:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

No boundary conditions on
downstream edge of flow domain



Sınır tabaka denklem sistemi paraboliktir ve bu yüzden sınır şartlarının yalnızca akış bölgesinin üç tarafında belirtilmesi gerekir.

Sınır Tabaka Çözüm Yolu

Adım 1 Sınır tabaka yokmuş gibi dış akışı çözün (sınır tabakanın dışındaki akış bölgesini yaklaşık olarak viskoz olmayan ve/veya dönümsüz kabul edin). Gerekirse $U(x)$ 'i elde etmek için koordinat dönüşümü yapın.

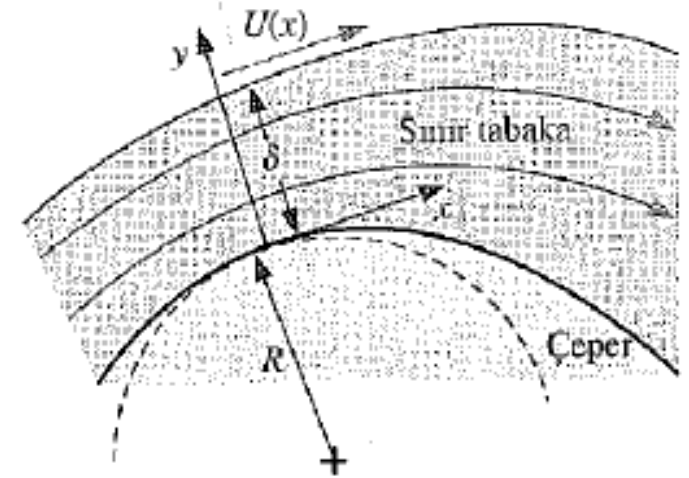
Adım 2 İnce bir sınır tabaka kabul edin. Böylece adım 1'deki dış akış çözümünü etkilemesin.

Adım 3 Uygun sınır şartlarını kullanarak sınır tabaka denklemlerini (Denklem 10-71) çözün. Bu sınır şartları: Çeperdeki kaymama koşulu, $y = 0$ 'da $u = v = 0$; sınır tabaka kenarındaki bilinen dış akış şartı, $y \rightarrow \infty$ için $u \rightarrow U(x)$; ve bilinen bir başlangıç profili, $x = x_{\text{başlangıç}}$ için $u = u_{\text{başlangıç}}(y)$ olarak verilir.

Adım 4 Akış alanında ilgilenilen büyüklükleri hesaplayın. Örneğin sınır tabaka denklemleri çözüldüğünde (adım 3); $\delta(x)$, çeper boyunca kayma gerilmesi, toplam yüzey sürtünme direnci vb. hesaplanabilir.

Adım 5 Sınır tabaka yaklaşımının uygun olduğunu doğrulayın. Başka bir deyişle, sınır tabakanın *ince* olduğunu gösterin—aksi halde yaklaşım doğrulanmamış olur.

xy-düzleminde iki boyutlu sınır tabakanın daimi, sıkıştırılmaz durum için çözüm yolunun özeti



Çeperin yerel eğrilik yarıçapı (R), δ ile aynı büyüklük mertebesinde olacak şekilde yeterince küçükse, merkezci ivme etkileri göz ardı edilemez ve $\partial P / \partial y \neq 0$ olur. Böyle bölgelerde ince sınır tabaka yaklaşımını uygun değildir.

ÖRNEK 10-10 Düz Bir Plaka Üzerindeki Laminer Sınır Tabaka

V üniform hızına sahip bir serbest akım, Şekil 10-95'te çizildiği gibi sonsuz incelikte yarı-sonsuz bir düz plakaya paralel olarak akmaktadır. Koordinat sistemi, plaka başlangıcı orijinde olacak şekilde tanımlanmıştır. Akış x -eksenine göre simetrik olduğundan sadece akışın üst yarısı dikkate alınmaktadır. Buna göre plaka boyunca sınır tabaka hız profilini hesaplayınız ve sonucu irdelleyiniz.

ÇÖZÜM Düz plaka boyunca büyüyen sınır tabakanın hız profilini (x ve y 'nin fonksiyonu olarak u 'yu yani $u = f(x, y)$ 'i) hesaplayacağız.

Kabuller: 1 Akış daimi ve sıkıştırılmaz olup xy -düzleminde iki-boyutludur. 2 Reynolds sayısı, sınır tabaka yaklaşımları uygun olacak şekilde yeterince yüksektir. 3 İlgilenilen aralık boyunca sınır tabaka laminer olarak kalmaktadır.

Analiz Şekil 10-93'te özetlenen adım-adım çözüm yolunu izleyelim.

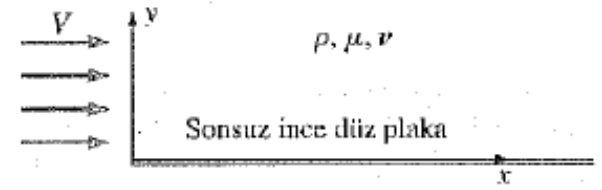
Adım 1 Sınır tabaka çok ince kabul edildiğinden dış akış, sınır tabakanın tamamen göz ardı edilmesiyle elde edilir. Dönümsüz bir akıştaki akım çizgisinin bir çeper olarak düşünülebileceğini anımsayınız. Verilen durumda x -ekseni, Kısım 10-5'teki yapıtaş akışlarımızdan biri olan serbest akım akışının bir akım çizgisi olarak ele alınabilir. Bu akım çizgisi aynı zamanda sonsuz ince bir plaka olarak da düşünülebilir (Şekil 10-96).

Böylece,

$$\text{Dış akış: } U(x) = V = \text{sabit} \quad (1)$$

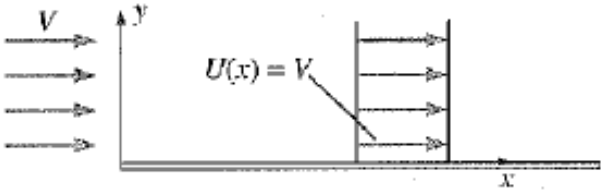
olarak ifade edilebilir. Uygunluk açısından bundan sonraki işlemlerde $U(x)$ yerine sadece U kullanacağız, zira $U(x)$ sabittir.

Adım 2 Çeper boyunca çok ince bir sınır tabaka olduğunu varsayıyoruz (Şekil 10-97). Buradaki önemli nokta, sınır tabaka o kadar ince kabul edilmektedir ki, bunun adım 1'de hesaplanan dış akış üzerindeki etkisi ihmal edilebilir.



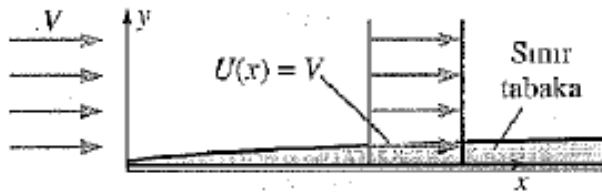
ŞEKİL 10-95

Örnek 10-10'un çizimi; x -ekseni boyunca yarı-sonsuz düz bir plakaya doğru paralel üniform akış.



ŞEKİL 10-96

x -ekseninin akışa ait bir akım çizgisi olması ve $U(x) = V = \text{sabit}$ olması nedeniyle Örnek 10-10'daki dış akış önemsizdir.



ŞEKİL 10-97

Sınır tabaka, dış akışı etkilemeyecek kadar incedir. Dana açık görülmesi için sınır tabaka kalınlığı burada abartılı çizilmiştir.

Adım 3 Şimdi ise sınır tabaka denklemlerini çözmemiz gerekir. Denklem 1'den $dU/dx = 0$ olduğu görülmektedir; diğer bir ifadeyle x -momentum denkleminde hiçbir basınç gradyeni kalmamaktadır. Düz bir plaka üzerindeki sınır tabakaya çoğunlukla **sıfır basınç gradyenli sınır tabaka** denmesinin sebebi budur. Böylece sınır tabakaya ait süreklilik ve x -momentum denklemleri (Denklem 10-71),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

haline gelir. Dört adet sınır şartı gereklidir. Bunlar,

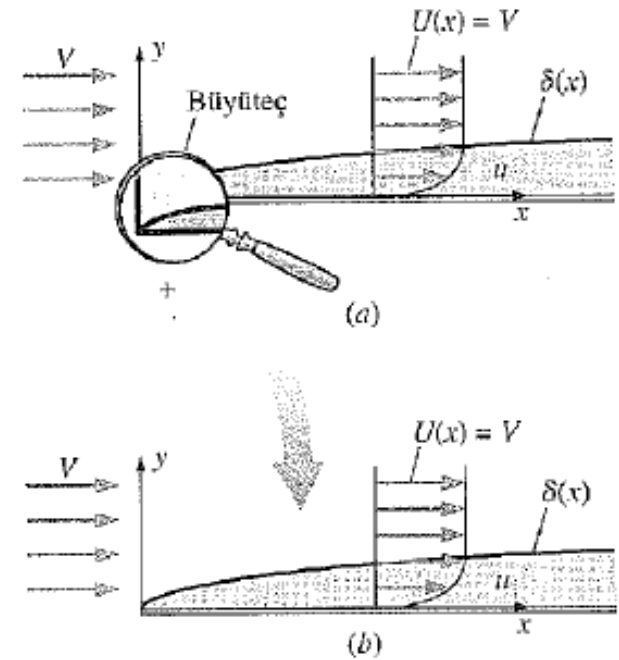
$$\begin{aligned} y = 0 \text{ 'da } u &= 0 & y \rightarrow \infty \text{ 'da } u &= U \\ y = 0 \text{ 'da } v &= 0 & x = 0 \text{ 'da tüm } y \text{ 'ler için } u &= U \end{aligned} \quad (3)$$

Denklem 3'teki sınır şartlarının sonucusu başlangıç profilidir. Plakanın başlangıç konumunda ($x = 0$), plakanın akışı henüz etkilememiş olduğunu varsayıyoruz.

Bu denklemler ve sınır şartları yeterince basit görünse de ne yazık ki şimdiye değin *bir analitik çözüm bulunamamıştır*. Bununla beraber, Denklem 2 ilk olarak 1908 yılında P. R. Heinrich Blasius (1883–1970) tarafından *sayısal olarak* çözülmüştür. Bir kenar notu olarak Blasius'un Prandtl'in bir doktora öğrencisi olduğunu belirtelim. O zamanlar doğal olarak bilgisayarlar yoktu ve tüm hesaplamalar *el ile* yapılıyordu. Günümüzde ise bu denklemleri bir bilgisayarla birkaç saniyede çözebiliriz. Çözümün anahtarı benzerlik kabulüdür. Basit bir ifadeyle, problemin geometrisinde *hiçbir karakteristik uzunluk ölçeği* bulunmadığından benzerlik kabulü yapılabilir. Fiziksel olarak plaka x -yönünde sonsuz uzun olduğundan, ne kadar yaklaştırdığımıza veya uzaklaştırdığımıza bağlı olmaksızın daima aynı akış desenini görürüz (Şekil 10-98).

Blasius, x ve y bağımsız değişkenlerini tek bir boyutsuz bağımsız değişkende toplayan bir **benzerlik değişkeni** olan η 'yi ortaya atmış,

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (4)$$



ŞEKİL 10-98

Benzerlik kabulünün faydalı bir sonucu, ne kadar yaklaştırdığımıza ya da uzaklaştırdığımıza bakılmaksızın akışın aynı (*benzer*) görülmesidir; (a) bir kimsenin görebileceği kadar mesafeden görünüş, (b) bir karıncanın görebileceği kadar yakın görünüş.

ve hızın x -bileşenini boyutsuz formda çözmüştür:

$$f' = \frac{u}{U} = \text{fonksiyon}(\eta) \quad (5)$$

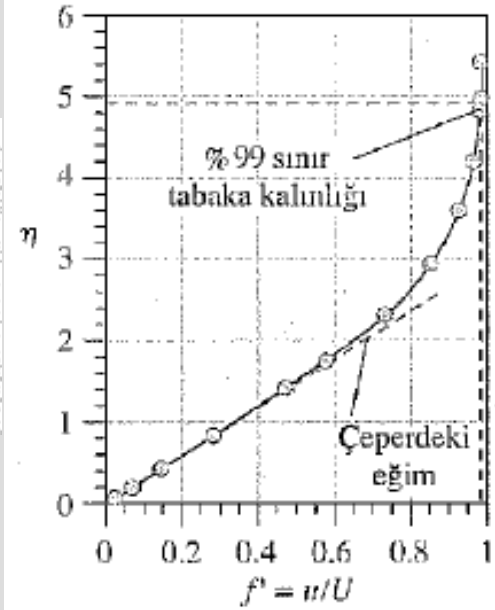
Denklem 4 ve 5'i Denklem 3 ile verilen sınır şartlarına tabi olan Denklem 2'de yerine yazdığımızda, benzerlik değişkeni olan η 'nin fonksiyonu olarak boyutsuz hız $f'(\eta) = u/U$ için bir adi diferansiyel denklemin elde etmiş oluruz. Tablo 10-3 ve Şekil 10-99'daki sonuçlar,

yaygın olarak bilinen Runge-Kutta sayısal yöntemi ile elde edilmiştir. Bu yöntemin ayrıntıları kitabın konusu dışındadır (bkz. Heinsohn and Cimbalá, 2003). Ayrıca çeperden uzakta küçük bir y -hız bileşeni v vardır, ancak $v \ll u$ olduğundan burada buna değinilmemiştir. Benzerlik çözümünün güzel yanı, bu tek hız profili şeklinin Şekil 10-99'daki gibi benzerlik değişkenleri cinsinden çizildiğinde herhangi bir x -konumu için geçerli olmasıdır. Şekil 10-99'da hesaplanan profil şeklinin, deneysel olarak elde edilen veriler (Şekil 10-99'daki daireler) ve Şekil 10-78'de görselleştirilmiş profil şekli ile uyumu olağanüstüdür. Blasius'un çözümü gerçekten hayret verici bir başarıdır.

Adım 4 Şimdi de bu sınır tabakayla ilgili birkaç büyüklük hesaplayalım. İlk olarak Tablo 10-3'te gösterilenden daha yüksek bir çözünürlükte yapılan bir sayısal çözümden $\eta = 4.91$ için $u/U = 0.990$ olduğunu buluruz. Yüzde 99'luk bu sınır tabaka kalınlığı Şekil 10-99'da çizilmiştir. Denklem 4'ü ve δ 'nin tanımını kullanmak suretiyle $y = \delta$ için,

$$\eta = 4.91 = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \delta \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re_x}} \quad (6)$$

sonucuna varılır. Bu sonuç, basit bir büyüklük mertebesi analizinden elde edilen Denklem 10-67 ile niteliksel olarak uyum içerisindedir. Denklem 6'daki sabit 4.91, çoğu yazar tarafından 5.0'a yuvarlatılır; ancak biz Blasius profilinden bulunan diğer büyüklüklerle uyum sağlamak için sonucu üç anlamlı basamağa göre vermeyi tercih ediyoruz.



ŞEKİL 10-99

Benzerlik değişkenleri cinsinden yarı-sonsuz düz bir plaka üzerinde gelişen sınır tabakaya ait Blasius profili. Deneysel veriler (daireler)

$Re_x = 3.64 \times 10^5$ içindir.

Panton (1996) 'dan alınmıştır.

Solution of the Blasius laminar flat plate boundary layer in similarity variables*

η	f''	f'	f	η	f''	f'	f
0.0	0.33206	0.00000	0.00000	2.4	0.22809	0.72898	0.92229
0.1	0.33205	0.03321	0.00166	2.6	0.20645	0.77245	1.07250
0.2	0.33198	0.06641	0.00664	2.8	0.18401	0.81151	1.23098
0.3	0.33181	0.09960	0.01494	3.0	0.16136	0.84604	1.39681
0.4	0.33147	0.13276	0.02656	3.5	0.10777	0.91304	1.83770
0.5	0.33091	0.16589	0.04149	4.0	0.06423	0.95552	2.30574
0.6	0.33008	0.19894	0.05973	4.5	0.03398	0.97951	2.79013
0.8	0.32739	0.26471	0.10611	5.0	0.01591	0.99154	3.28327
1.0	0.32301	0.32978	0.16557	5.5	0.00658	0.99688	3.78057
1.2	0.31659	0.39378	0.23795	6.0	0.00240	0.99897	4.27962
1.4	0.30787	0.45626	0.32298	6.5	0.00077	0.99970	4.77932
1.6	0.29666	0.51676	0.42032	7.0	0.00022	0.99992	5.27923
1.8	0.28293	0.57476	0.52952	8.0	0.00001	1.00000	6.27921
2.0	0.26675	0.62977	0.65002	9.0	0.00000	1.00000	7.27921
2.2	0.24835	0.68131	0.78119	10.0	0.00000	1.00000	8.27921

* η is the similarity variable defined in Eq. 4 above, and function $f(\eta)$ is solved using the Runge–Kutta numerical technique. Note that f'' is proportional to the shear stress τ , f' is proportional to the x -component of velocity in the boundary layer ($f' = u/U$), and f itself is proportional to the stream function. f' is plotted as a function of η in Fig. 10–99.

Önemli bir diğer büyüklük de çeperdeki kayma gerilmesi τ_w 'dir:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (7)$$

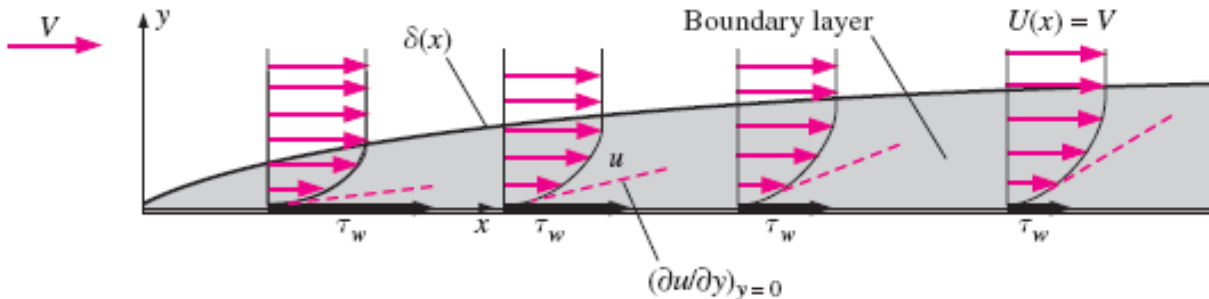
Boyutsuz hız profilinin çeperdeki ($y = 0$ ve $\eta = 0$) eğimi Şekil 10-99'da çizilmiştir. Benzerlik sonuçlarından (Tablo 10-3) çeperdeki boyutsuz eğim;

$$\left. \frac{d(u/U)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = f''(0) = 0.332 \quad (8)$$

olarak elde edilir. Denklem 8, Denklem 7'de yerine yazılıp bazı cebirsel işlemler (benzerlik değişkenlerini fiziksel değişkenlere çevirme) yapılırsa,

Fiziksel değişkenler cinsinden kayma gerilmesi:
$$\tau_w = 0.332 \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (9)$$

sonucuna varılır. Buna göre kayma gerilmesi x ile, Şekil 10-100'de çizildiği gibi $x^{-1/2}$ fonksiyonu benzer şekilde azalmaktadır. Denklem 9'a göre $x = 0$ 'da τ_w sonsuzdur, ancak bu fiziksel olarak mümkün değildir. Sınır tabaka yaklaşımları plakanın giriş kenarı ($x = 0$) için uygun değildir, zira burada sınır tabaka kalınlığı x 'e kıyasla küçük değildir. Ayrıca herhangi bir gerçek düz plaka sonlu bir kalınlığa sahiptir ve plakanın önünde süratle $U(x) = V$ 'ye ivmelenen dış akışta bir durma noktası vardır. $x = 0$ 'a çok yakın bölge, akışın geri kalanındaki doğruluğu kaybetmeksizin göz ardı edilebilir.



ŞEKİL 10-100

Laminer düz plaka sınır tabakası için çeper kayma gerilmesi, çeperdeki eğim $\partial u / \partial y$ aşağıdakım yönünde azaldığı için $x^{-1/2}$ 'e benzer şekilde azalır. Plakanın ön kısmı yüzey sürtünme direncine arka kısmından daha fazla katkıda bulunur.

Denklem 9, bir yüzey sürtünme katsayısı (**yerel sürtünme katsayısı** olarak da adlandırılır) tanımlamak suretiyle boyutsuzlaştırılabilir:

$$\text{Yerel sürtünme katsayısı, laminar düz plaka: } C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (10)$$

$C_{f,x}$ için verilen Denklem 10'un, farklı bir sabitle δ/x için verilen Denklem 6 ile aynı formda olduğuna, her ikisinin de Reynolds sayısının karekökünün tersi ile azaldığına dikkat ediniz. Bölüm 11'de, L boyunda düz bir plaka üzerindeki direnci bulmak için Denklem 10'u integre edeceğiz.

Adım 5 Sınır tabakanın ince olduğunu doğrulamamız gerekir: Pratik bir örnek olarak, sıcak bir günde şehirde 32 km/h hızla arabanızı sürerken, arabanızın ön kaputu üzerindeki akışı ele alalım. Havanın kinematik viskozitesi $\nu = 1.67 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 'dir. Kaputu, 1 m boyunda $V = 32 \text{ km/h}$ hızla hareket eden bir düz plaka olarak ele alalım. Önce kaput sonundaki Reynolds sayısını yaklaşık olarak Denklem 10-60'tan hesaplayalım:

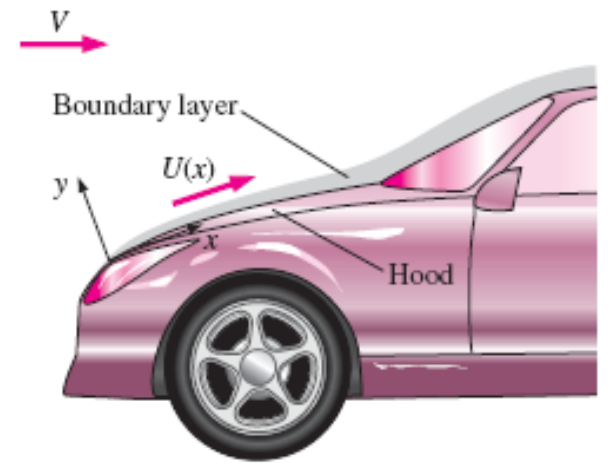
$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(32 \text{ km/h})(1 \text{ m})}{1.67 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} \left(\frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \right) \left(\frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} \right) = 5.32 \times 10^5$$

Bu Re_x değeri, kritik Reynolds sayısı olan $Re_{x,kr} = 5 \times 10^5$ 'e çok yakın olduğundan, laminar akış kabulü uygun olabilir veya olmayabilir. Yine de akışın laminar kaldığını varsayarak, sınır tabaka kalınlığını hesaplamak için Denklem 6'yi kullanalım.

$$\delta = \frac{4.91x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{4.91(1 \text{ m})}{\sqrt{5.32 \times 10^5}} \left(\frac{1000 \text{ mm}}{\text{m}} \right) = 6.73 \text{ mm} \quad (11)$$

Kaput sonuna gelinceye kadar sınır tabakanın ulaştığı kalınlık sadece 7 mm civarında olup yaptığımız çok ince sınır tabaka varsayımını doğrulamaktadır.

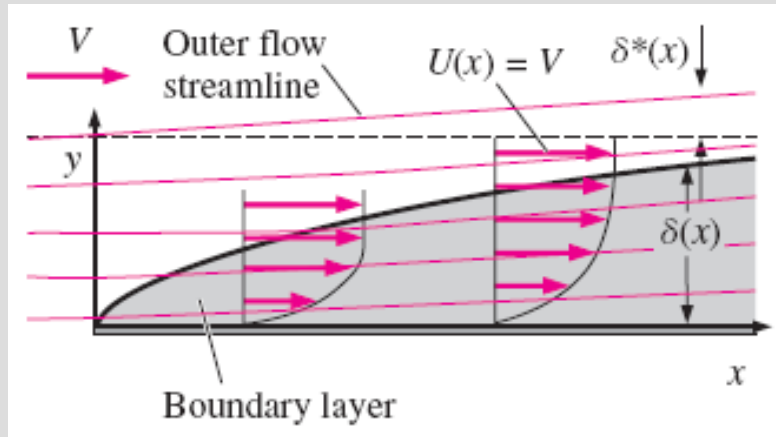
İrdeleme Blasius'un sınır tabaka çözümü yalnızca akış ile tam hizalanmış (akışa mükemmel şekilde paralel) düz plaka üzerindeki akış için geçerlidir. Bununla birlikte araba kaputunda olduğu gibi, tam düz olmayan veya akışa tam olarak paralel olmayan katı çeperler boyunca gelişen sınır tabaka için çabuk bir yaklaşımla sıklıkla kullanılır. Adım 5'te gösterildiği gibi pratik mühendislik problemlerinde türbülansa geçiş değerinden daha büyük Reynolds sayılarına ulaşmak zor değildir. Dolayısıyla sınır tabaka türbülanslı hale geldiğinde, burada verilen laminar sınır tabaka çözümünü uygulama konusunda dikkatli olmalısınız.



ŞEKİL 10-101

Bir arabanın kaputu üzerinde gelişen sınır tabaka. Daha açık göstermek için sınır tabaka abartılı olarak çizilmiştir.

Yerdeğiştirme Kalınlığı (displacement thickness)

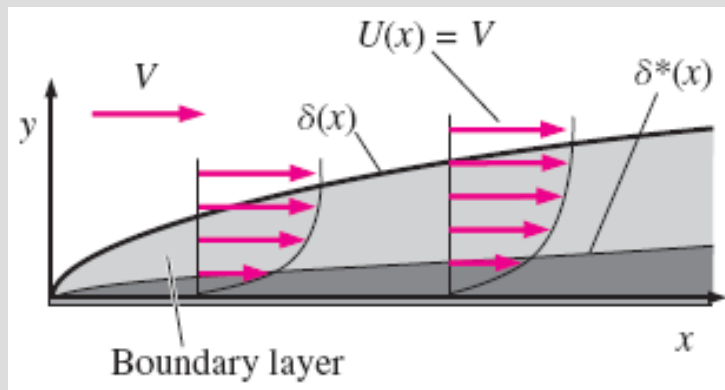


Sınır tabaka dışındaki bir akım çizgisi ile tanımlanan yerdeğiştirme kalınlığı. Sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir.

Yerdeğiştirme kalınlığı, sınır tabakanın tam dışındaki bir akım çizgisinin sınır tabaka etkisiyle çeperden uzaklaşma mesafesidir.

Yerdeğiştirme kalınlığı:

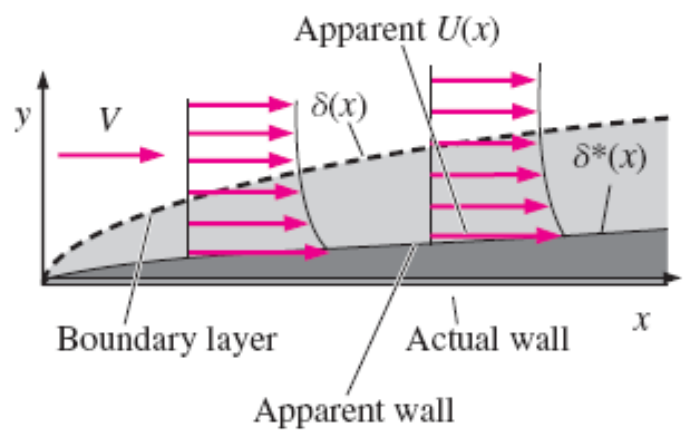
$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$



Bir laminer düz plaka sınır tabakası için yerdeğiştirme kalınlığı, kabaca %99 'luk sınır tabaka kalınlığının üçte biridir.

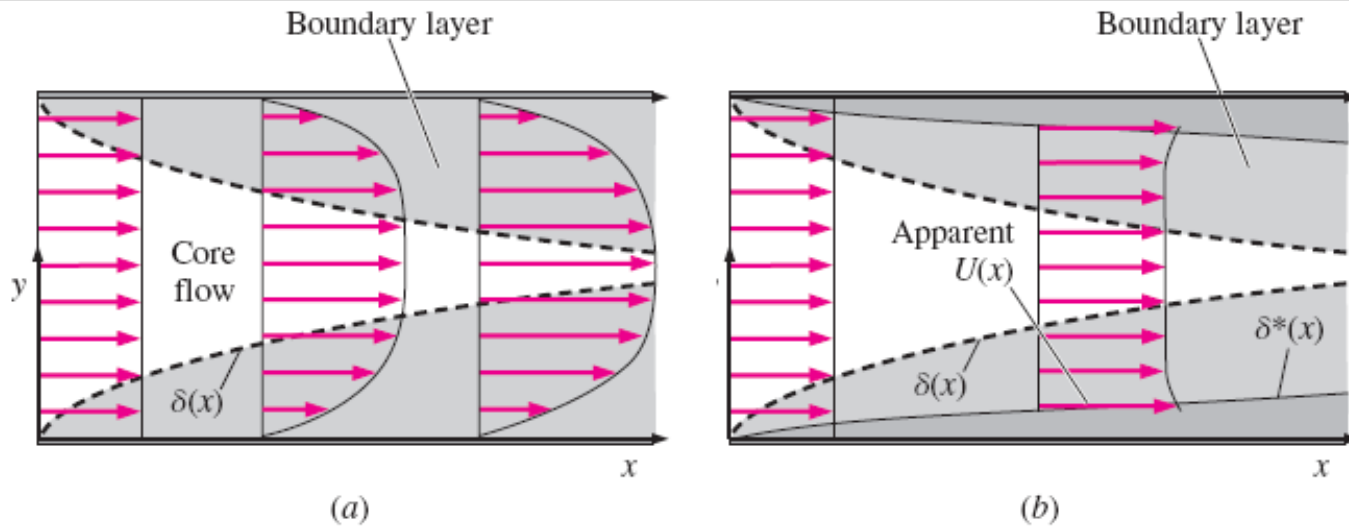
L Yerdeğiştirme kalınlığı, laminar düz plaka: "

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$



Sınır tabaka dış akışı etkileyerek çeperin, yerdeğiştirme kalınlığı şeklinde görünmesine yol açar. Görünür $U(x)$ başlangıçtaki yaklaşıtımdan farklıdır.

Yerdeğiştirme kalınlığı, büyüyen sınır tabaka etkisiyle, dış akışın çeper kalınlığında gördüğü hayali artıştır.



Sınır tabaka büyümesinin iki-boyutlu bir kanala giren akış üzerindeki etkisi: Üst ve alt sınır tabakalar arasındaki dönümsüz akış, gösterildiği gibi (a) gerçek hız profilleri ve (b) sınır tabaka yerdeğiştirme kalınlığından ötürü görünür çekirdek akışındaki değişim nedeniyle ivmelenir (daha açık görülmesi için sınır tabaka oldukça abartılı çizilmiştir).

ÖRNEK 10-11 Bir Rüzgar Tünelinin Tasarımında Yerdeğiştirme Kalınlığı

Küçük bir düşük-hızlı rüzgar tüneli, sıcak telleri (anemometre telleri) kalibre etmek üzere tasarlanmaktadır (Şekil 10-106). Hava sıcaklığı 19°C 'dir. Rüzgar tünelinin test bölümü 30 cm çapında ve 30 cm boyundadır. Test bölümünden geçen akışın mümkün olduğu kadar üniform olması gerekmektedir. Rüzgar tünelinin hız aralığı 1 m/s'den 8 m/s'ye değişmektedir ve yapılacak tasarım, test bölümündeki $V = 4.0$ m/s'lik bir hava hızı için optimize edilecektir. (a) Test bölümünün girişinde hemen hemen üniform olan 4.0 m/s hızındaki akış hali için tünel eksenindeki hava hızı test bölümü sonuna kadar ne oranda hızlanır? (b) Daha üniform bir test bölümü akışı sağlayacak bir tasarım öneriniz.

ÇÖZÜM Bir rüzgar tünelinin yuvarlak test bölümünden geçen havanın hızlanması hesaplanacak ve test bölümü için yeni bir tasarım önerisi yapılacaktır.

Kabuller 1 Akış daimi ve sıkıştırılmazdır. 2 Çeperler pürüzsüz olup bozucu etkiler ve titreşimler asgari düzeyde tutulmaktadır. 3 Sınır tabaka laminardır.

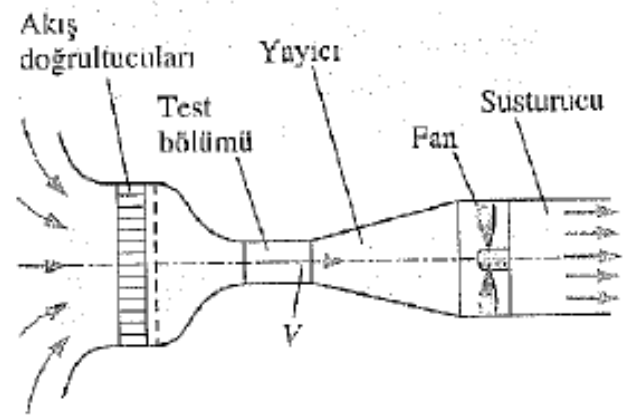
Özellikler 19°C 'deki havanın kinematik viskozitesi $\nu = 1.507 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Analiz (a) Rüzgar tünelinin test bölümü sonundaki Reynolds sayısı yaklaşık olarak,

$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(4.0 \text{ m/s})(0.30 \text{ m})}{1.507 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 7.96 \times 10^4$$

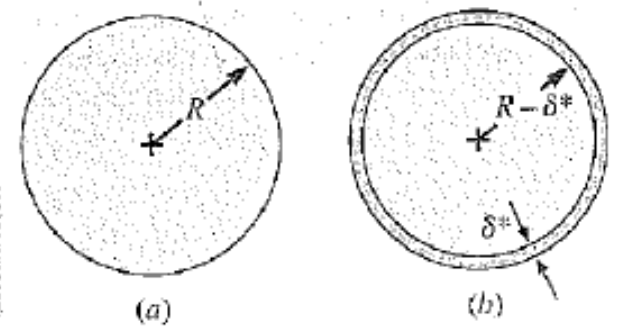
elde edilir. Bu Re_x sayısının, $Re_{x,kr} = 5 \times 10^5$ olan mühendislik kritik Reynolds sayısından, hatta $Re_{x,kr} = 1 \times 10^5$ 'ten de küçük olmasından, ayrıca çeperlerin pürüzsüz ve akışın temiz olmasından dolayı, sınır tabakanın test bölümünün başından sonuna kadar laminar olarak kaldığını kabul edebiliriz. Rüzgar tünelinin test bölümü boyunca sınır tabaka büyüdükçe, test bölümünün merkez kısmında yer alan dönümsüz akış bölgesindeki hava, Şekil 10-105'teki gibi kütle korunumunu sağlamak için hızlanır. Test bölümünün sonundaki yerdeğiştirme kalınlığını hesaplamak için Denklem 10-73'ü kullanalım:

$$\delta^* = \frac{1.72x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1.72(0.30 \text{ m})}{\sqrt{7.96 \times 10^4}} = 1.83 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.83 \text{ mm} \quad (1)$$



ŞEKİL 10-106

Örnek 10-11'deki rüzgar tüneli için şematik çizim.



ŞEKİL 10-107

Örnek 10-11'deki rüzgar tünelinin test bölümüne ait en-kesit görüntüleri: (a) test bölümünün başlangıcı (veya girişi) ve (b) test bölümünün sonu (veya çıkışı).

Test bölümünün en-kesit görünüşleri Şekil 10-107'de çizilmiştir. Bunlardan biri test bölümünün başında diğeri ise sonundadır. Test bölümünün sonundaki etkin yarıçap, Denklem 1'den bulunan δ^* kadar azalır. Test bölümü sonundaki hava hızını hesaplamak üzere kütle korunumu uygulanırsa,

$$V_{\text{çıkış}} A_{\text{çıkış}} = V_{\text{giriş}} A_{\text{giriş}} \rightarrow V_{\text{çıkış}} = V_{\text{giriş}} \frac{\pi R^2}{\pi (R - \delta^*)^2} \quad (2)$$

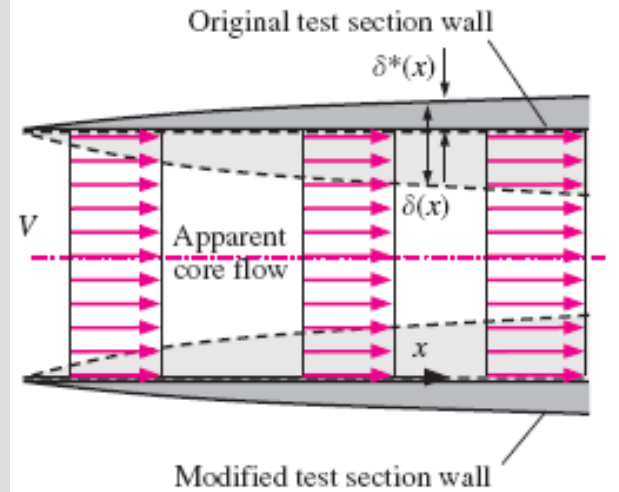
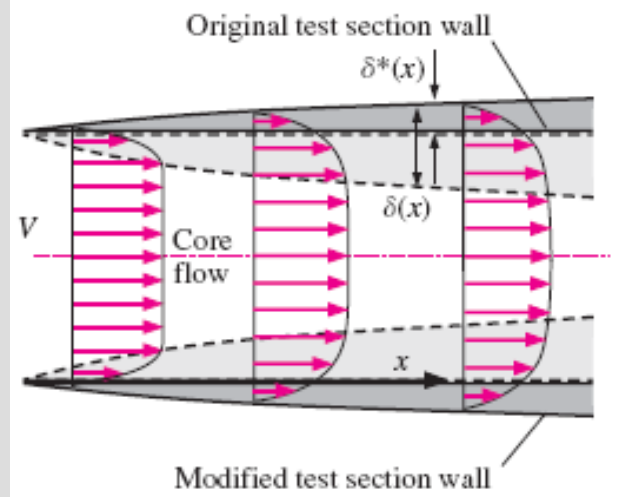
elde edilir ve buradan,

$$V_{\text{çıkış}} = (4.0 \text{ m/s}) \frac{(0.15 \text{ m})^2}{(0.15 \text{ m} - 1.83 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 4.10 \text{ m/s} \quad (3)$$

sonucuna varılır. Buna göre havanın hızı, yerdeğiştirme kalınlığının etkisiyle test bölümünde yaklaşık olarak yüzde 2.5 oranında artmaktadır.

(b) Daha iyi bir tasarım için nasıl bir öneride bulunabiliriz? Birinci olasılık, test bölümünü düz çeperli silindir yapmak yerine hafifçe iraksayan (genişleyen) bir kanal olarak tasarlamaktır (Şekil 10-108). Eğer yarıçap, test bölümü boyunca $\delta^*(x)$ artacak şekilde tasarlansaydı, yerdeğiştirme kalınlığının etkisi ortadan kalkar ve böylece test bölümü boyunca hava hızı hemen hemen sabit kalırdı. Şekil 10-108'de gösterildiği gibi, hala çeperde bir sınır tabaka vardır. Ancak Şekil 10-105'teki durumun tersine bu kez sınır tabaka dışındaki çekirdek akışın hızı sabit kalmaktadır. Iraksak çeper önerisi 4 m/s'lik tasarım çalışma şartında iyi iş görür ve diğer akış hızlarında da bir miktar yardımcı olur. Diğer bir seçenek ise, çeper üzerindeki havanın bir kısmını çekmek için test bölümü çeperleri boyunca emiş uygulamaktır. Bu tasarımın avantajı, rüzgar tüneli hızı değiştirildiğinde herhangi bir çalışma şartında test bölümündeki hava hızını sabit tutmak için emişin dikkatli bir biçimde ayarlanabilmesidir. Bu öneri daha karmaşık ve muhtemelen daha pahalı bir seçenektir.

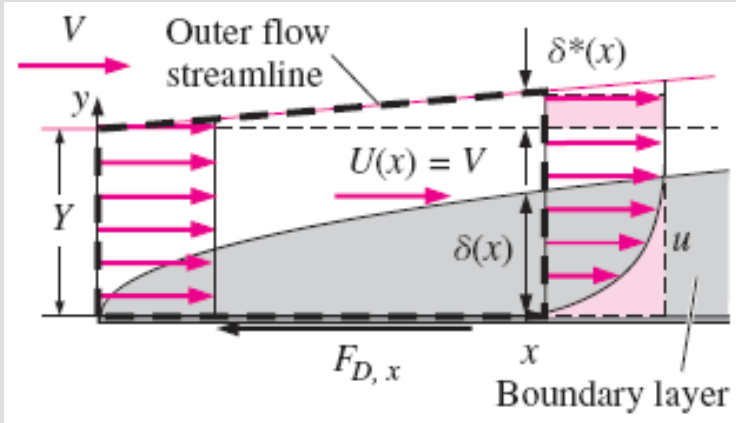
İrdeleme Rüzgar tünellerinde tünelin test bölümündeki hava hızının üniform oluşunu dikkatlice kontrol altında tutmak için ya iraksak çeper seçeneği ya da çeper emişi seçeneği kullanılır. Burada verilen yerdeğiştirme kalınlığı tekniğinin aynısı, sınır tabakanın türbülanslı olduğu daha büyük rüzgar tünellerine de uygulanır ancak bu durumda $\delta^*(x)$ için farklı bir denklem gerekir.



ŞEKİL 10-108

Iraksak bir test bölümü, sınır tabaka yerdeğiştirme etkisinden kaynaklanan akış hızlanmasını ortadan kaldırır: (a) Gerçek akış ve (b) görünür dönümsüz çekirdek akışı.

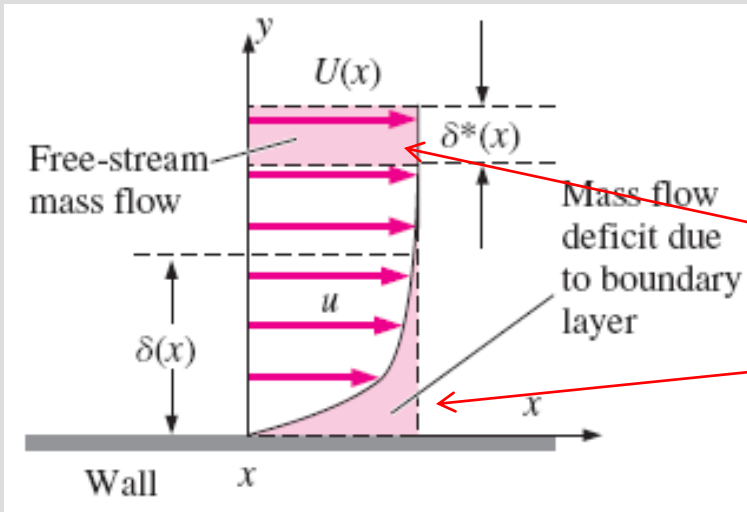
Momentum Kalınlığı



Kalın kesikli çizgiyle tanımlanmış, yukarıdan sınır tabaka dışındaki bir akım çizgisiyle alttan ise düz plaka ile sınırlanmış kontrol hacmi $F_{D,x}$ kontrol hacmine etkileyen viskoz plaka kuvvetidir.

$$0 = \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = w\rho \underbrace{\int_0^{Y+\delta^*} u dy}_{\text{at location } x} - w\rho \underbrace{\int_0^Y U dy}_{\text{at } x=0}$$

$$\int_0^Y (U - u) dy = U\delta^*$$



Sınır tabaka profili altında, kütleli debi eksilmesini temsil eden alan ile δ^* kalınlığında serbest-akım akışkan parçası tarafından oluşturulan alanın karşılaştırılması. Kütleli korunumunu sağlamak için bu iki alanın aynı olması gerekir.

Conservation of x-momentum for the control volume:

$$\sum F_x = -F_{D,x} = \int_{CS} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \rho w \underbrace{\int_0^{Y+\delta^*} u^2 dy}_{\text{at location } x} - \rho w \underbrace{\int_0^Y U^2 dy}_{\text{at } x=0}$$

$$F_{D,x} = \rho w \int_0^Y u(U - u) dy$$

$$\frac{F_{D,x}}{w} = \rho \int_0^Y u(U - u) dy \equiv \rho U^2 \theta$$

Momentum kalınlığı, büyüyen sınır tabakanın varlığından ötürü birim genişlik başına oluşan momentum kaybının ρU^2 'ye oranı olarak tanımlanır.

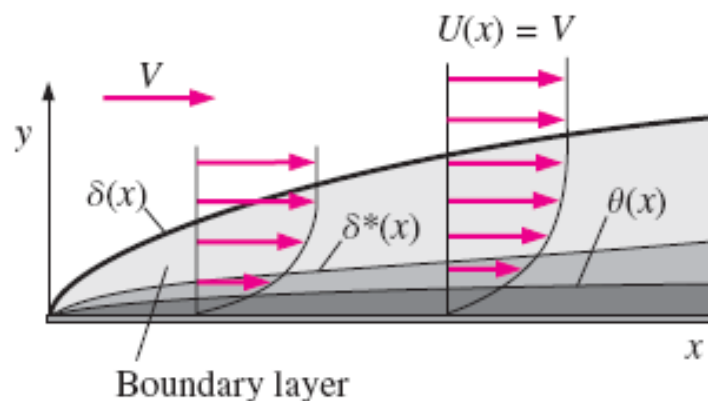
$$\theta = \int_0^Y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Momentum thickness:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

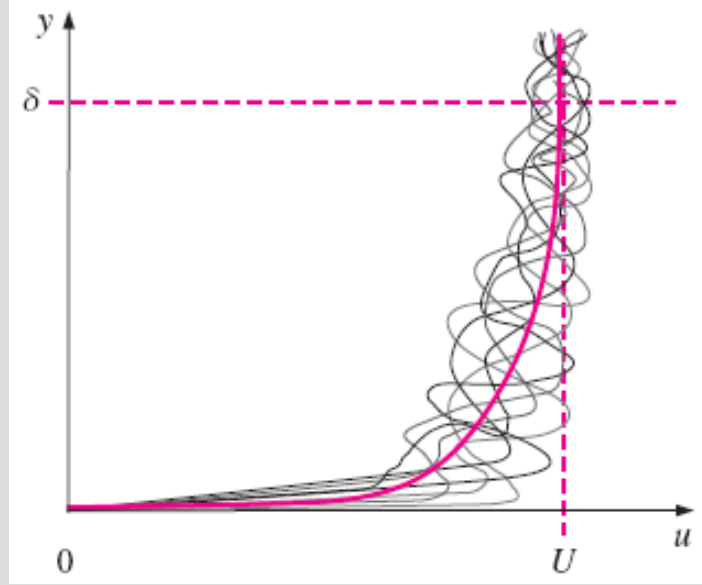
Momentum thickness, laminar flat plate:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$



Bir laminar düz plaka sınır tabakası için yer değiştirme kalınlığı δ^* 'nin yüzde 35.0'ı, momentum kalınlığı ise θ 'nin yüzde 13.5'idir.

Türbülanslı Düz Plaka Sınır Tabakası



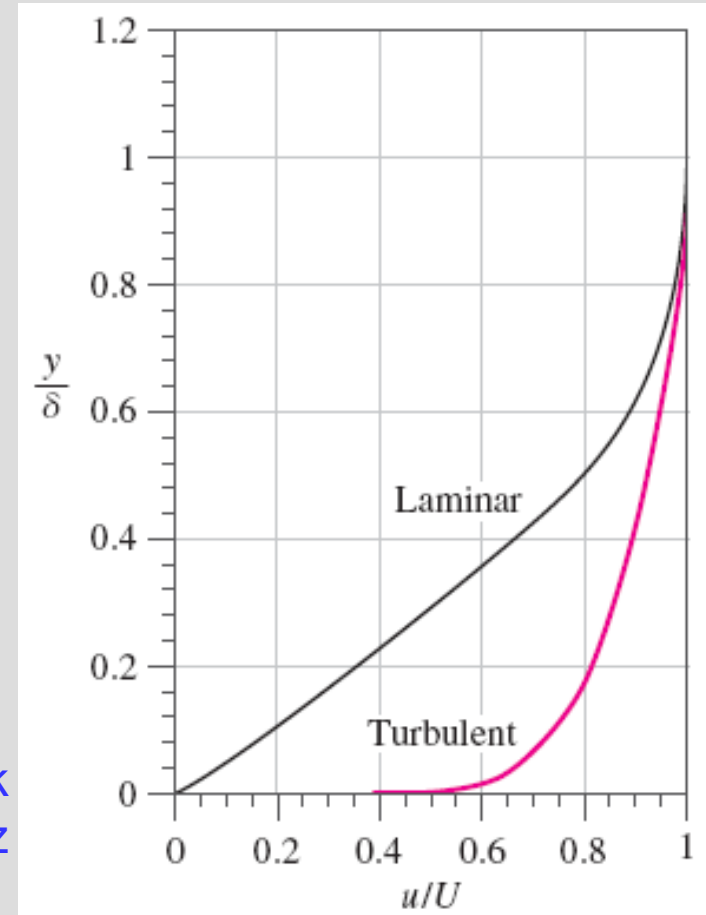
Bir türbülanslı sınır tabakanın daimi olmayışının gösterilişi; ince ve dalgalı siyah çizgiler anlık profillerdir. Kalın pembe çizgi ise uzun zaman-ortalamalı profildir.

burada tartışılan tüm türbülans ifadeleri zaman-ortalamalı değerleri temsil etmektedir.

Bir türbülanslı düz plaka sınır tabakasının zaman-ortalamalı hız profili için yaygın olan bir ampirik yaklaşım 1/7'nci kuvvet yasasıdır:

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{for } y \leq \delta, \quad \rightarrow \quad \frac{u}{U} \cong 1 \quad \text{for } y > \delta$$

Sınır tabaka kalınlığı kullanılarak boyutsuzlaştırılan laminar ve türbülanslı düz plaka sınır tabaka profillerinin karşılaştırılması.



Bir üniform akıma paralel olarak yerleştirilmiş pürüzsüz düz plaka üzerindeki laminer ve türbülanslı sınır tabakalara ait ifadelerin özeti*

Özellik	(a)		(b)
	Laminer	Türbülanslı ^(†)	Türbülanslı ^(‡)
Sınır tabaka kalınlığı	$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(Re_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.38}{(Re_x)^{1/5}}$
Yerdeğiştirme kalınlığı	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(Re_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.048}{(Re_x)^{1/5}}$
Momentum kalınlığı	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(Re_x)^{1/7}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.037}{(Re_x)^{1/5}}$
Yerel yüzey sürtünme katsayısı	$C_{f,x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(Re_x)^{1/7}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.059}{(Re_x)^{1/5}}$

* Laminer değerler tamdır ve üç anlamlı basamağa göre listelenmiştir. Ancak türbülanslı akış alanlarında olan büyük belirsizlik nedeniyle, türbülanslı değerler yalnızca iki anlamlı basamağa göre verilmiştir.

† 1/7'nci kuvvet yasasından elde edilmiştir.

‡ Pürüzsüz borulardaki türbülanslı akışa ait deneysel verilerle birleştirilen 1/7'nci kuvvet yasasından elde edilmiştir.

değişkenler cinsinden çizilmiştir.

Şimdi de Tablo 10-4'teki (a) sütununda verilen denklemi kullanarak aynı x -konumundaki türbülanslı sınır tabaka kalınlığını hesaplayalım:

$$\delta_{\text{türbülanslı}} = \frac{0.16x}{(Re_x)^{1/7}} = \frac{0.16(1520 \text{ mm})}{(1.00 \times 10^6)^{1/7}} = 33.8 \text{ mm} \quad (2)$$

[$\delta_{\text{türbülanslı}}$ 'nın Tablo 10-4'ün (b) sütununa göre hesaplanan değeri bir miktar daha yüksek olup 36.4 mm'dir.] Denklem 1 ve 2 karşılaştırıldığında, 1.0×10^6 'lık bir Reynolds sayısında türbülanslı sınır tabakanın laminar sınır tabakadan 4.5 kat daha kalın olduğu görülür. Denklem 10-82 ile verilen türbülanslı sınır tabaka profili, laminar profille karşılaştırılmak üzere fiziksel değişkenlere dönüştürülerek Şekil 10-115'te çizilmiştir. Şekil 10-115'teki iki çarpıcı özellik şu şekilde ifade edilebilir: (1) Türbülanslı sınır tabaka laminardan çok daha kalındır ve (2) çeper yakınında u 'nun y 'ye göre eğimi türbülanslı durumda çok daha diktir. (Doğal olarak $1/7$ 'nci kuvvet yasasının çeperin çok yakınında gerçek türbülanslı sınır tabaka profilini yeteri şekilde temsil etmediği unutulmamalıdır.)

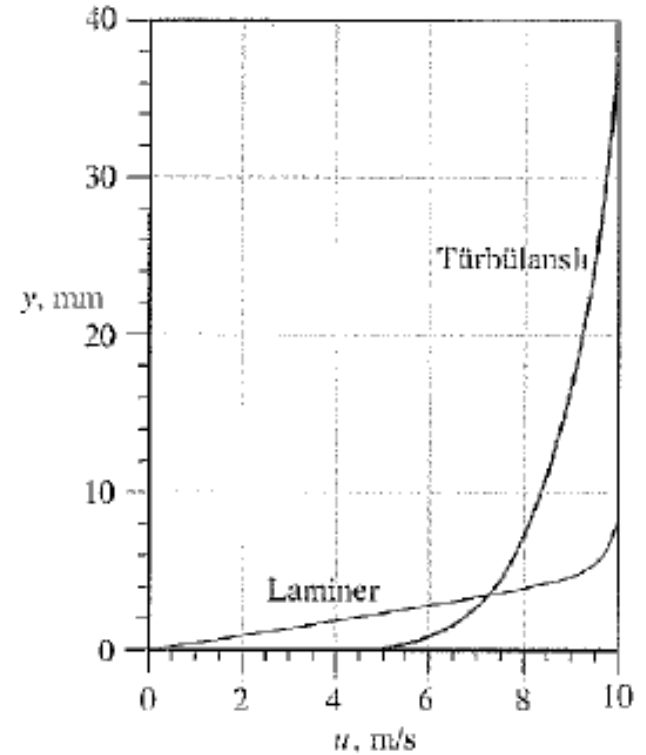
(b) Göz önüne alınan iki durum için yerel yüzey sürtünme katsayılarını karşılaştırmak üzere Tablo 10-4'te verilen ifadeleri kullanalım. Bunun sonucunda laminar sınır tabaka için,

$$C_{f,x,\text{laminar}} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} = \frac{0.664}{\sqrt{1.00 \times 10^6}} = 6.64 \times 10^{-4} \quad (3)$$

ve türbülanslı sınır tabaka için (a) sütunundan,

$$C_{f,x,\text{türbülanslı}} = \frac{0.027}{(Re_x)^{1/7}} = \frac{0.027}{(1.00 \times 10^6)^{1/7}} = 3.8 \times 10^{-3} \quad (4)$$

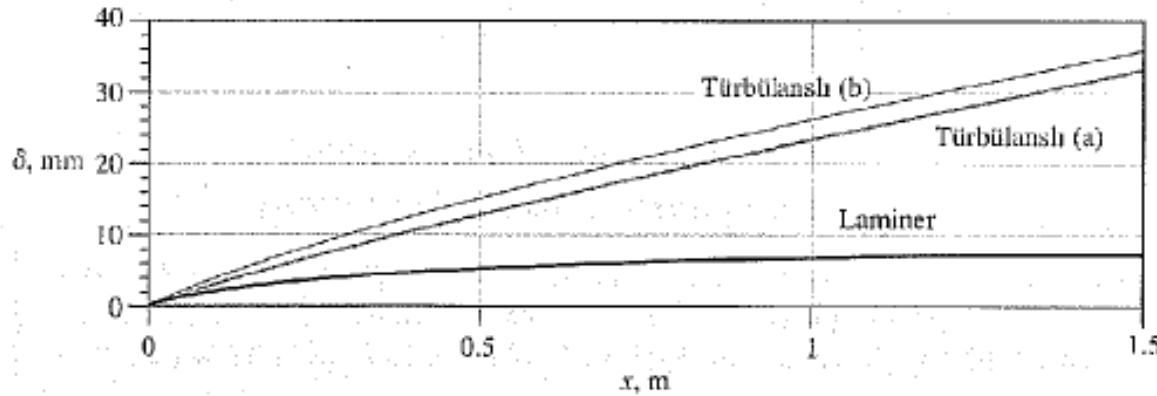
elde edilir. Denklem 3 ve 4 karşılaştırıldığında, türbülanslı yüzey sürtünme katsayısı değerinin laminar değerden beş katından daha fazla olduğu görülür. Eğer Tablo 10-4'teki (b) sütununda verilen diğer türbülanslı yüzey sürtünme katsayısına ait ifadeyi kullansaydık $C_{f,x,\text{türbülanslı}} = 3.7 \times 10^{-3}$ olarak Denklem 4 ile verilen değere çok yakın bir değer bulürdük.



ŞEKİL 10-115

Laminar ve türbülanslı düz plaka sınır tabakalarının aynı x -konumunda fiziksel değişkenler cinsinden karşılaştırılması. Reynolds sayısı $Re_x = 1.0 \times 10^6$.

(c) Yapılan türbülanslı hesaplama, sınır tabakanın plakanın en başından itibaren türbülanslı olduğu varsayımına dayanmaktadır. Gerçekte geçici bir laminar akış bölgesi, ardından bunu izleyen bir geçiş bölgesi ve en sonunda da Şekil 10-81'de gösterildiği gibi bir türbülanslı bölge vardır. Yine de ya tümüyle laminar akış ya da tümüyle türbülanslı akış kabul etmek suretiyle bu akış için δ_{laminar} ve $\delta_{\text{türbülanslı}}$ 'nin X 'in fonksiyonu olarak nasıl büyüdüklerini karşılaştırmak ilginç olabilir. Tablo 10-4'teki ifadeler kullanılarak karşılaştırma amacıyla bu ikisi Şekil 10-1'6'da çizilmiştir.



ŞEKİL 10-116
Örnek 10-12'deki düz plaka için laminar ve türbülanslı sınır tabaka büyümelerinin karşılaştırılması.

İrdeleme Açıkça görülmesi için Şekil 10-116'daki ordinat mm, apsis ise m olarak alınmıştır. Görüldüğü gibi türbülanslı durumda bile sınır tabaka son derece incedir. Tablo 10-4'te verilen (a) ve (b) türbülanslı durumları arasındaki farklılık, ampirik eğri uydurmaları ile Tablo 10-4'teki ifadeleri elde etmede kullanılan yarı-ampirik yaklaşımlar arasındaki uyumsuzluklar ile açıklanabilir. Bu durum, türbülanslı sınır tabaka değerlerini en fazla iki anlamlı basamağa göre verme kararımızı desteklemektedir. Plaka sonuna kadar Reynolds sayısı geçiş bölgesinde kaldığından, δ 'nin gerçek değeri büyük bir olasılıkla Şekil 10-116'da çizilen laminar ve türbülanslı değerler arasında bir yere düşecektir.

1/7'nci kuvvet yasası akışkan mekanikçileri tarafından kullanılan tek türbülanslı sınır tabaka yaklaşımı değildir. Yaygın olan diğer bir yaklaşım da **logaritma yasası** dır. Bu yarı-ampirik bir ifadedir ve yalnızca düz plaka sınır tabakaları için değil aynı zamanda tam gelişmiş boru akışı hız profilleri için geçerlidir.

Aslında logaritma yasası sadece düz plaka üzerindeki akışlar için değil, çeperle çevrili hemen hemen *tüm* türbülanslı sınır tabakalar için uygulanabilir.

Logaritma yasası, genellikle **sürtünme hızı** u^* adı verilen bir karakteristik hız ile boyutsuzlaştırılan değişkenler cinsinden ifade edilir.

Logaritma yasası:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + B$$

Sürtünme hızı:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Tüm çeper boyunca geçerli olan daha zekice bir ifade, 1961 yılında D. B. Spalding tarafından ortaya atılan **Spalding çeper yasası**dır:

$$\frac{yu_*}{\nu} = \frac{u}{u_*} + e^{-\kappa B} \left[e^{\kappa(u/u_*)} - 1 - \kappa(u/u_*) - \frac{[\kappa(u/u_*)]^2}{2} - \frac{[\kappa(u/u_*)]^3}{6} \right]$$

ÖRNEK 10-13 Türbülanslı Sınır Tabaka Profili Denklemlerinin Karşılaştırılması

20°C'deki hava, $L = 15.2$ m uzunluğunda pürüzsüz bir düz plaka üzerinden $V = 10.0$ m/s hızla akmaktadır (Şekil 10-117). $x = L$ 'deki türbülanslı sınır tabaka profilini fiziksel değişkenler cinsinden ($u = f(y)$) çiziniz. Sınır tabakanın plaka başlangıcından itibaren türbülanslı olduğunu varsayarak $1/7$ 'nci kuvvet yasası, logaritma yasası ve Spalding çeper yasası ile elde ettiğiniz profilleri karşılaştırınız.

ÇÖZÜM Üç farklı yaklaşımı kullanarak bir düz plaka sonundaki ortalama sınır tabaka profili $u(y)$ 'yi çizeceğiz.

Kabuller 1. Plaka pürüzsüzdür, ancak alışlagelenin aksine, sınır tabakayı türbülansa geçmeye zorlayan serbest akım çalkantıları mevcut olup sınır tabaka plaka başlangıcından itibaren türbülanslıdır. 2. Akış ortalama olarak daimidir. 3. Plaka sonsuz incedir ve serbest akıma paralel olarak yerleştirilmiştir.

Özellikler Havanın 20°C'deki kinematik viskozitesi ise $\nu = 1.516 \times 10^{-5}$ m²/s'dir.

Analiz Öncelikle $x = L$ 'deki Reynolds sayısını hesaplayalım:

$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(10.0 \text{ m/s})(15.2 \text{ m})}{1.516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1.00 \times 10^7$$

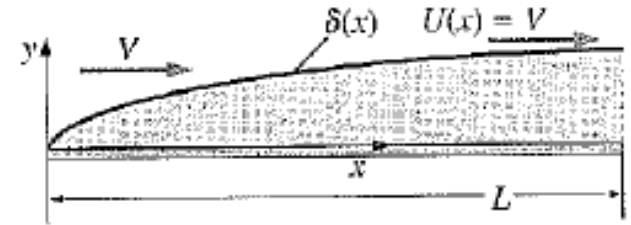
Bu değer, düz plaka sınır tabakası için geçiş bölgesi Reynolds sayısının oldukça üzerindedir (Şekil 10-81) ve dolayısıyla plaka başlangıcından itibaren türbülanslı akış kabul edilmesi uygundur.

Tablo 10-4'teki (a) sütunu değerlerini kullanarak plaka sonundaki sınır tabaka kalınlığını ve yerel yüzey sürtünme katsayısını belirleyelim:

$$\delta \cong \frac{0.16x}{(Re_x)^{1/7}} = 0.240 \text{ m} \quad C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(Re_x)^{1/7}} = 2.70 \times 10^{-3} \quad (1)$$

Sürtünme hızı tanımını (Denklemler 10-84) ve $C_{f,x}$ 'in tanımını (Örnek 10-10'da Denklem 10'un sol tarafı) kullanarak sürtünme hızı hesaplanırsa,

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = U \sqrt{\frac{C_{f,x}}{2}} = (10.0 \text{ m/s}) \sqrt{\frac{2.70 \times 10^{-3}}{2}} = 0.367 \text{ m/s} \quad (2)$$



ŞEKİL 10-117

Örnek 10-13'teki düz plaka üzerindeki hava akışı tarafından meydana getirilen türbülanslı sınır tabaka (sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

elde edilir. Burada U_* sabit olup bir düz plaka için her yerde $U = U_*$ 'dir. 1/7'nci kuvvet yasasının (Denklemler 10-82) grafiğini çizmek kolaydır, ancak logaritma yasası (Denklemler 10-83) $u = f(y)$ için kapalı bir fonksiyondur. Bunun yerine Denklem 10-83'ten y^* 'yi u 'nun fonksiyonu olarak çekersek,

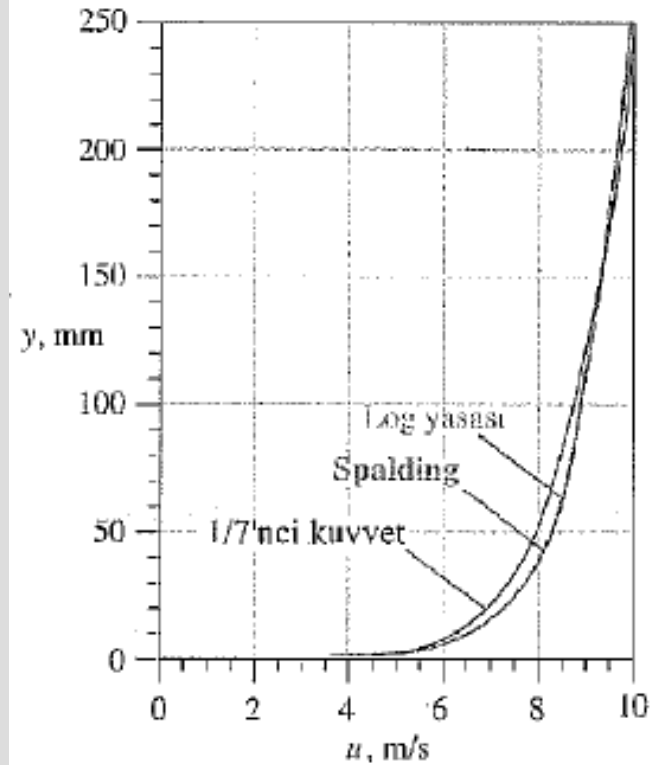
$$y^* = \frac{U_*}{u_*} e^{k(u/U_* - B)} \quad (3)$$

elde ederiz. u hızının çeper üzerinde 0'dan sınır tabaka kenarında U 'ya kadar değiştiği bilindiğinden, Denklem 3 kullanılarak logaritma yasası hız profili fiziksel değişkenler cinsinden çizilebilir. Benzer düşünceyle, Spalding çeper yasası da (Denklemler 10-85) $y = f(u)$ olarak yazılabilir. Bu üç profil, karşılaştırma amacıyla aynı grafik üzerinde çizilmiştir (Şekil 10-118). Profillerin üçü de birbirlerine yakındır ve bu ölçekte logaritma yasasını Spalding yasasından ayırt etmek mümkün değildir.

Çepere yakın bölgeyi büyütme (daha görünür hale getirmek) için Şekil 10-118'deki gibi doğrusal eksenli bir fiziksel değişken grafiği yerine, çoğu zaman boyutsuz değişkenlerin yarı-logaritmik bir grafiği çizilir. Sınır tabaka literatüründe boyutsuz değişkenler için kullanılan en yaygın gösterim, y^* ve u^* (iç değişkenler veya çeper değişkenleri yasası) olup

$$\text{Çeper değişkenleri yasası: } y^* = \frac{yU_*}{\nu}, \quad u^* = \frac{u}{U_*} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir. Fark edeceğimiz gibi y^* bir tür Reynolds sayısıdır ve sürtünme hızı u_* , hem y 'yi hem de u 'yu boyutsuzlaştırmak için kullanılmıştır. Şekil 10-118, çeper değişkenleri yasası kullanılarak Şekil 10-119'da yeniden çizilmiştir. Bu şekilde çizildiğinde, özellikle çeper yakınında olmak üzere üç yaklaşım arasındaki farklar çok daha net görülmektedir. Karşılaştırma için Şekil 10-119'da, tipik deneysel veriler de çizilmiştir. Spalding'in formülü baştan sona en iyi sonucu vermektedir ve çeper yakınında deneysel verileri takip eden yegane ifadedir. Sınır tabakanın dış kısmında, 1/7'nci kuvvet yasası gibi deneysel u^* değerleri de belirli bir y^* değerinden sonra düzleşmektedir. Ancak hem logaritma yasası hem de Spalding formülü, düz bir doğru olarak belirsizce devam etmektedir.

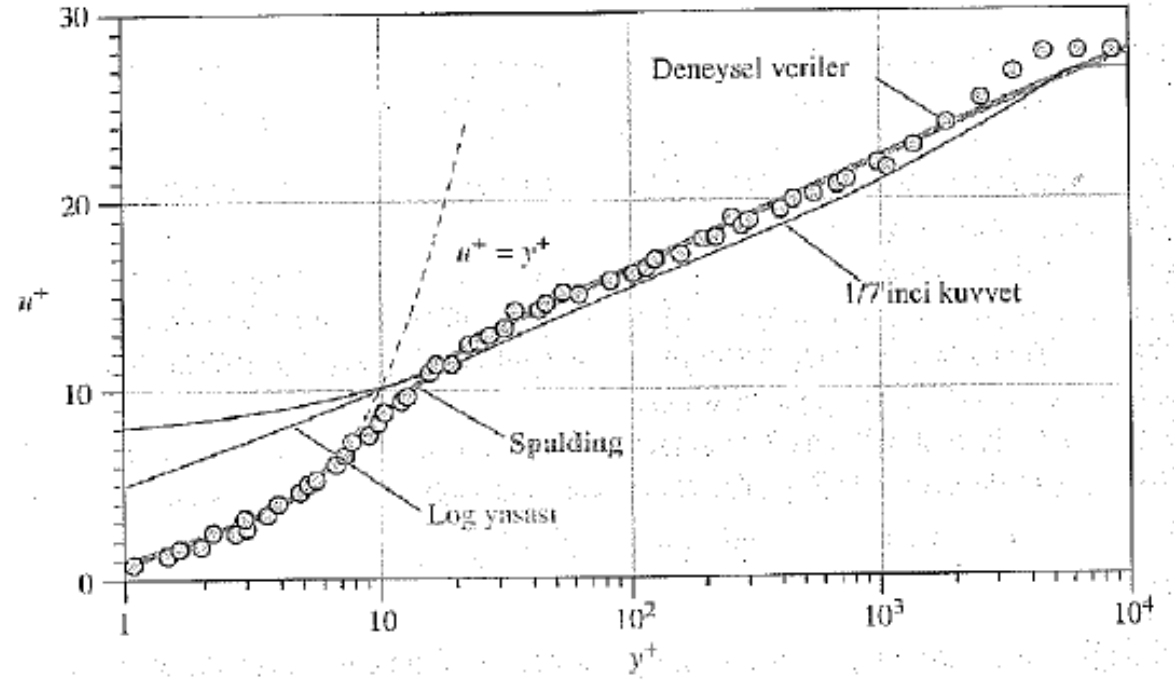


ŞEKİL 10-118

Türbülanslı düz plaka sınır tabakası profili ifadelerinin fiziksel değişkenler cinsinden $Re_x = 1.0 \times 10^7$ için karşılaştırılması: 1/7'nci kuvvet yaklaşımı, logaritma yasası ve Spalding çeper yasası.

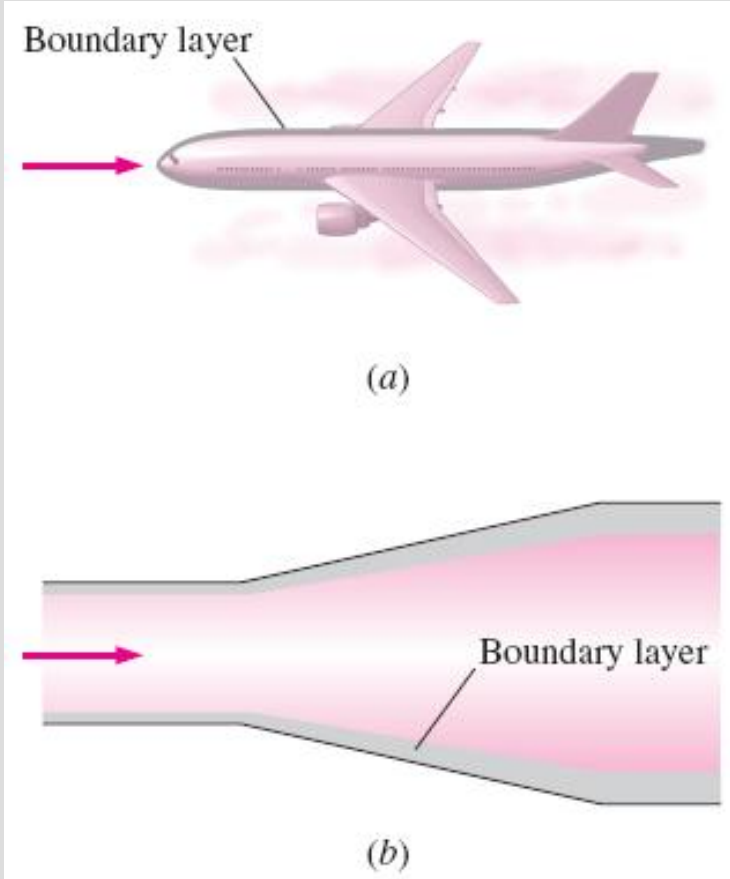
ŞEKİL 10-119

Türbülanslı düz plaka profili ifadelerinin çeper değişkenleri yasası cinsinden $Re_x = 1.0 \times 10^7$ için karşılaştırılması: 1/7'nci kuvvet yaklaşımı, logaritma yasası ve Spalding çeper yasası. Karşılaştırma için tipik deneysel veriler ve viskoz alt tabaka denklemi de ($u^+ = y^+$) gösterilmiştir.



İrdeleme Şekil 10-119'da $u^+ = y^+$ doğrusal denklemi de çizilmiştir. Çepere çok yakın ($0 < y^+ < 5$ veya 6) bölgeye viskoz alt tabaka adı verilir. Bu bölgede çepere yakınlık dolayısıyla türbülans çalkantıları bastırılır ve hız profili neredeyse doğrusaldır. Bu bölgeye verilen diğer isimler **doğrusal alt tabaka** ve **laminer alt tabaka**dır. Spalding denkleminin viskoz alt tabakayı izlediği ve (ardından) düzgün bir biçimde logaritma yasası ile kaynaştığı görülmektedir. Çepere yakın bu bölgede ne 1/7'nci kuvvet yasası ne de logaritma yasası geçerlidir.

Basınç Gradyenli Sınır Tabakalar



Basınç gradyanlı sınır tabakalar hem dış hem de iç akışlarda oluşur: (a) Bir uçağın gövdesi boyunca ve art izi içerisine doğru gelişen sınır tabaka ve (b) bir yayıcının çeperinde büyüyen sınır tabaka (her iki durumda da sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

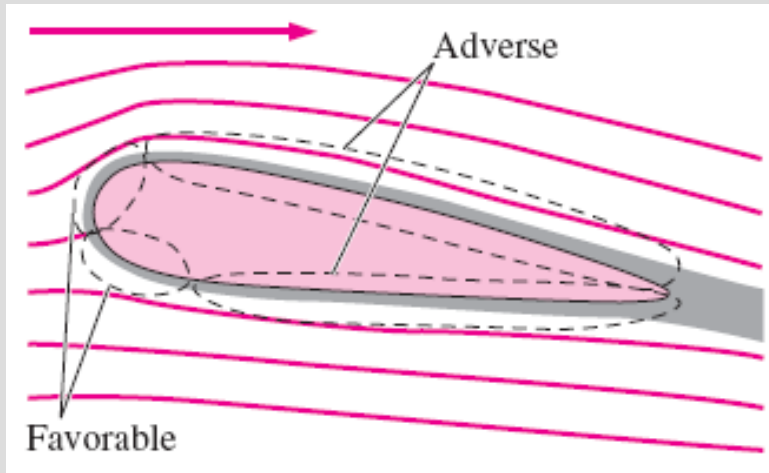
Eğer akış, viskoz olmayan ve/veya dönümsüz bir dış akış bölgesinde (sınır tabakanın dışı) *ivmeleniyorsa* $U(x)$ artar $P(x)$ ise azalır.

Buna **elverişli basınç gradyanı** diyoruz.

Bu tür ivmelenen bir akışta sınır tabaka genellikle incedir ve çepere sıkıca tutunmuştur. Dolayısıyla çeperden ayrılmayacak bir yapıda olduğundan elverişlidir veya istenir.

Öte yandan dış akış *yavaşlıyorsa* (negatif ivmeleniyorsa) $U(x)$ azalır, $P(x)$ artar ve bu durumda bir **elverişsiz** veya **ters basınç gradyanı** söz konusudur.

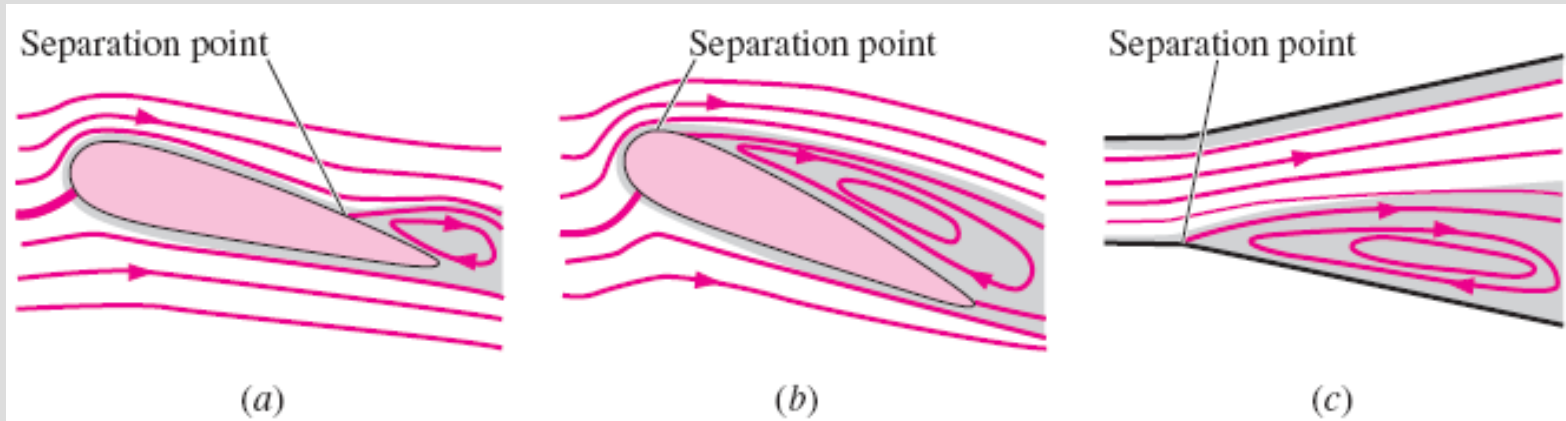
Adından da anlaşılacağı gibi bu arzu edilmeyen bir durumdur. Çünkü sınır tabaka bu tür durumlarda genellikle daha kalındır, çepere sıkıca tutunmamıştır ve dolayısıyla çeperden ayrılması çok daha muhtemeldir.



Serbest akıma daldırılmış bir cisim boyunca olan sınır tabaka, tipik olarak cismin ön kısmında elverişli bir basınç gradyene, cismin arka kısmında ise elverişsiz bir basınç gradyene maruz kalır.

Sık akım çizgileri, **ayrılma kabarcıkları** adı verilen sürekli dolanımlı bir akış bölgesini işaret etmektedir.

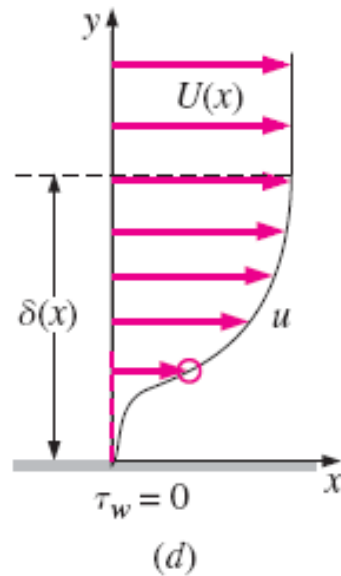
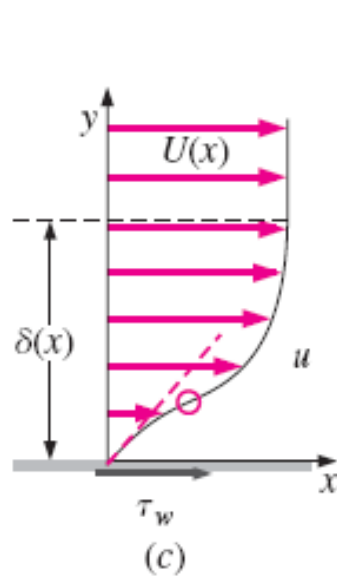
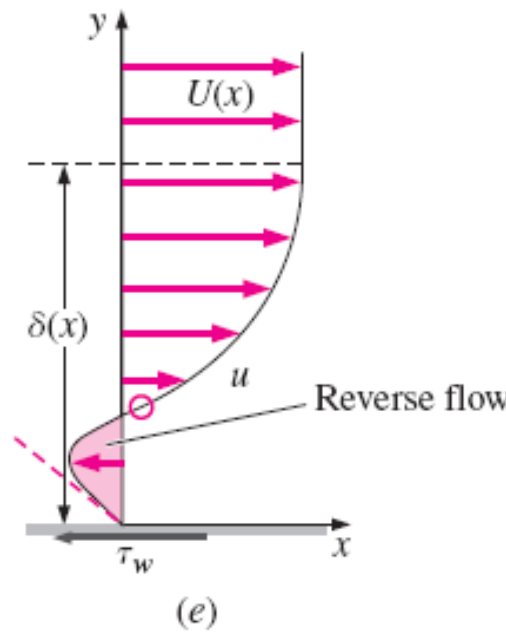
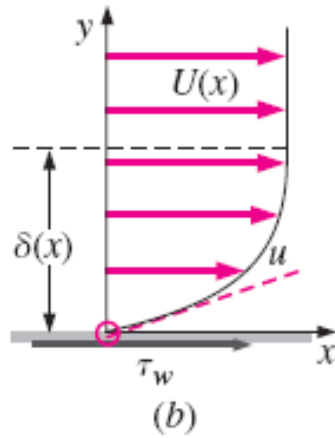
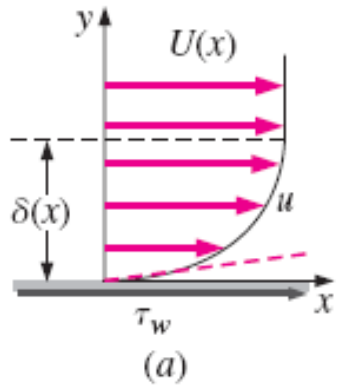
Ayrılma kabarcığındaki ters akıştan ötürü bir ayrılma noktasının aşağıdaki gibi sınır tabaka denklemleri geçersizdir:



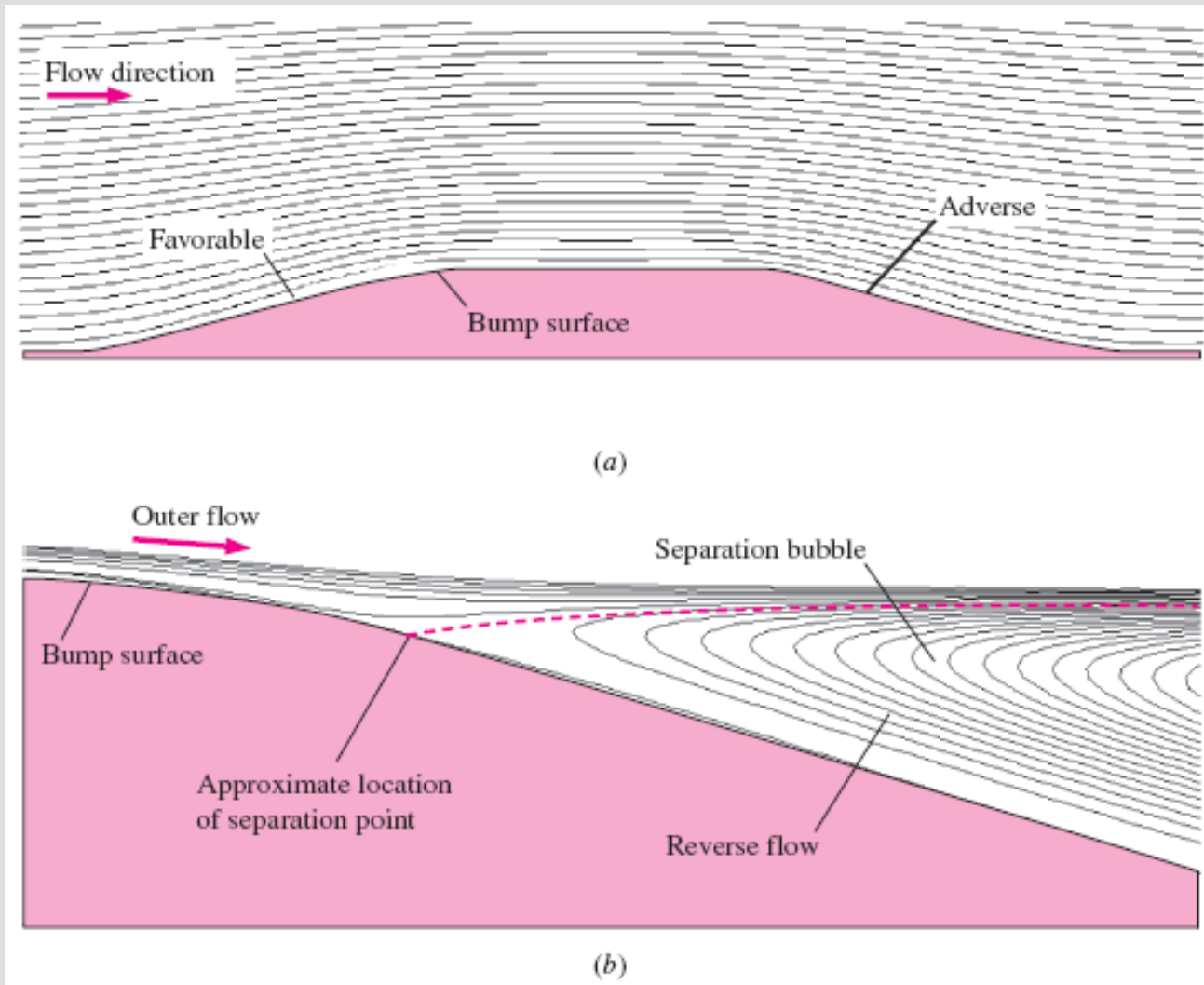
Ters basınç gradyeninin bulunduğu bölgelerde oluşan sınır tabaka ayrılmalarına örnekler: (a) Orta düzeyde bir hücum açısındaki uçak kanadı, (b) yüksek hücum açısında aynı kanat (stoldaki kanat) ve (c) sınır tabakanın tutunamadığı ve bir kenar üzerinden ayrıldığı geniş açılı bir yayıcı.

Çeperde:

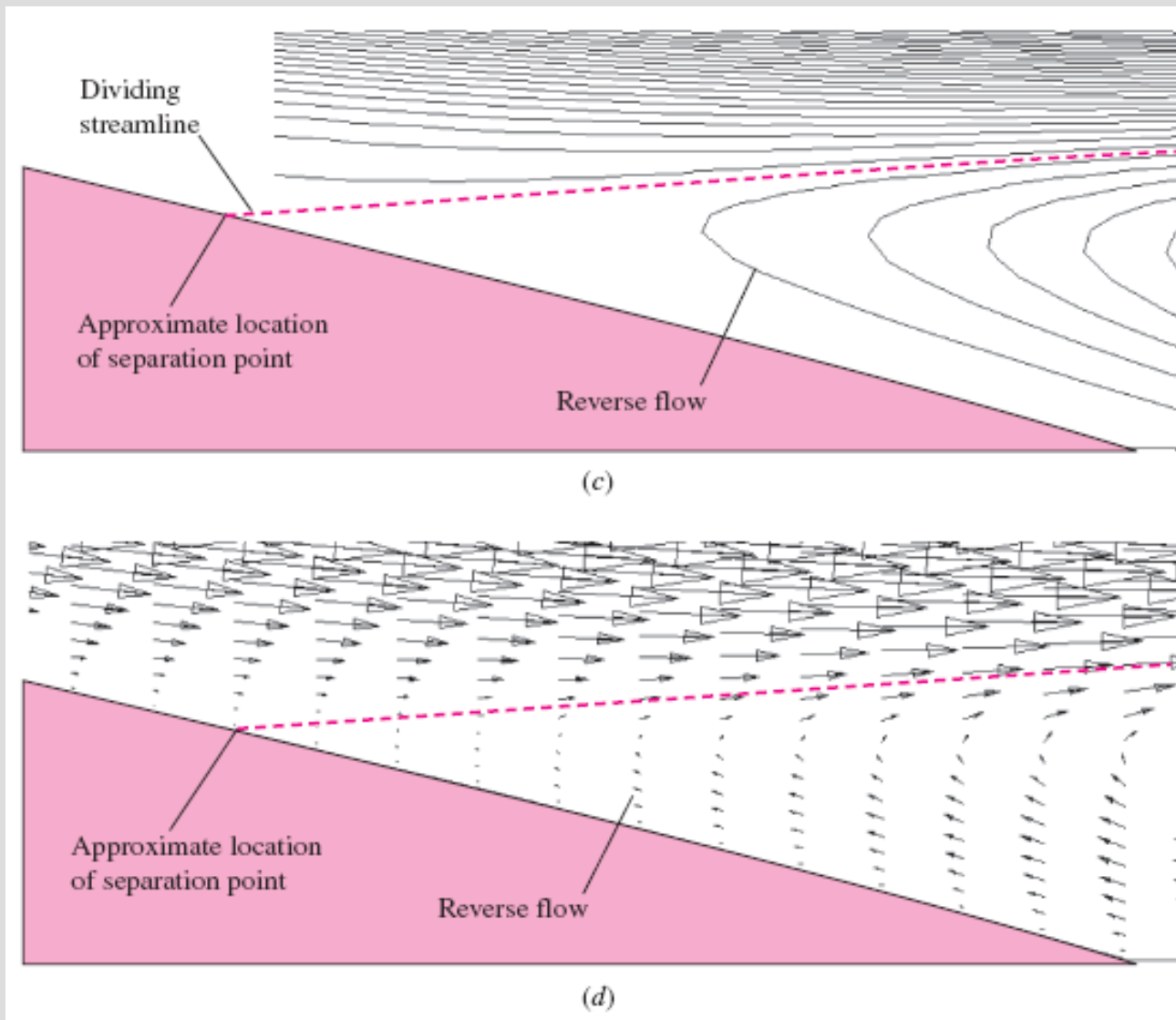
$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -U \frac{dU}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$$



Basınç gradyeninin bir fonksiyonu olarak sınır tabaka profili şekillerinin karşılaştırılması ($dP/dx = -U dU/dx$): (a) Elverişli, (b) sıfır, (c) hafif ters, (d) kritik ters (ayrılma noktası) ve (e) yüksek ters; hükmün noktaları mavi dairelerle gösterilmiş olup çeper kayma gerilmesi $\tau_w = \mu (\partial u / \partial y)_{y=0}$ her durum için çizilmiştir.



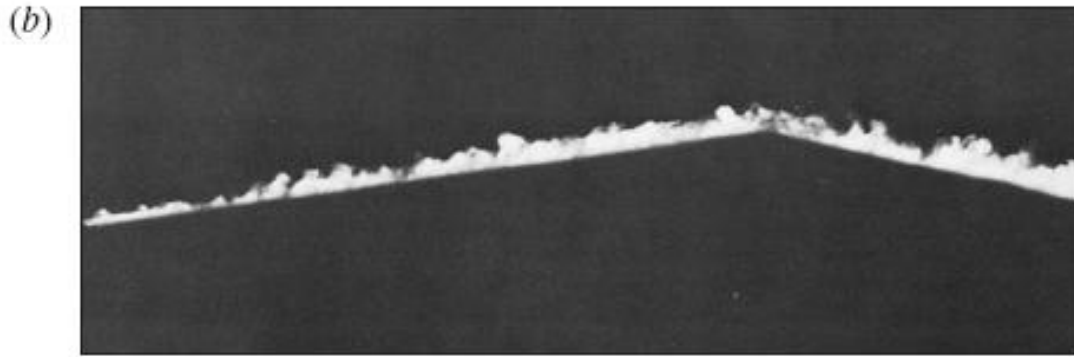
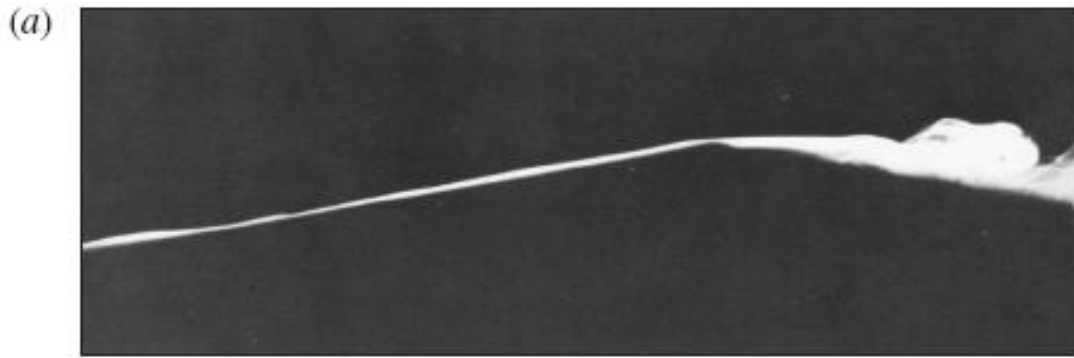
Bir tümsek üzerindeki akışın HAD sonuçları: (a) Dış akışa ait akım çizgilerinin çizildiği Euler çözümü (akış ayrılması yok), (b) tümseğin aşağı akım üzerinde akış ayrılmasını gösteren laminar akış çözümü,



(c) ayrılma noktası civarındaki akım çizgilerinin yakından görünüşü ve (d) hız vektörlerinin yakından görünüşü, (c)'deki görünüş.

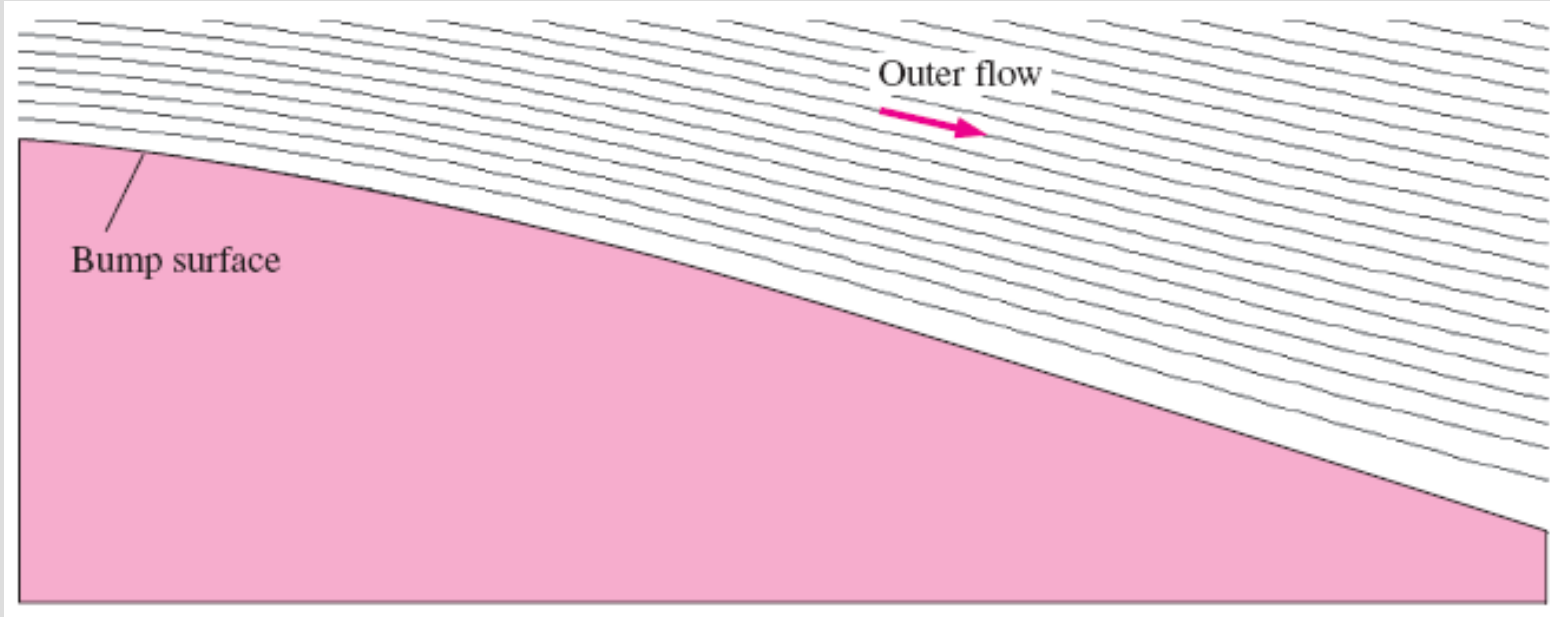
Sınır tabaka yaklaştırımı sadece dış akış çözümünün başansı kadar iyi sonuç verir; eğer ayrılma noktası dış akışı önemli ölçüde değiştiriyorsa, bu durumda sınır tabaka yaklaştırımı hatalı olacaktır.

Türbülanslı sınır tabakalar, aynı ters basınç gradyanına maruz laminar sınır tabakalara kıyasla akış ayrılmasına karşı daha dirençlidir.



Ters basınç gradyanında laminar ve türbülanslı sınır tabaka görüntülerinin karşılaştırılması; akış soldan sağa doğrudur. (a) Laminar sınır tabaka köşede ayrılır ancak (b) türbülanslı sınır tabaka ayrılmaz. Resimler 1982'de M. R. Head tarafından akış titanyum-tetraklorür ile görselleştirilerek çekilmiştir.

Head, M. R. 1982 in Flow Visualization II, W. Merzkirch, ed., 399-403. Washington: Hemisphere.



Şekil 10-124'te verilen tümsek üzerindeki türbülanslı akışa ait HAD sonuçları. Şekil 10-124b 'deki laminer sonuçlarla kıyaslandığında türbülanslı sınır tabaka akış ayrılmasına karşı daha dirençlidir ve tümseğin arka kısmındaki ters basınç gradyeni bölgesinde ayrılmaz.

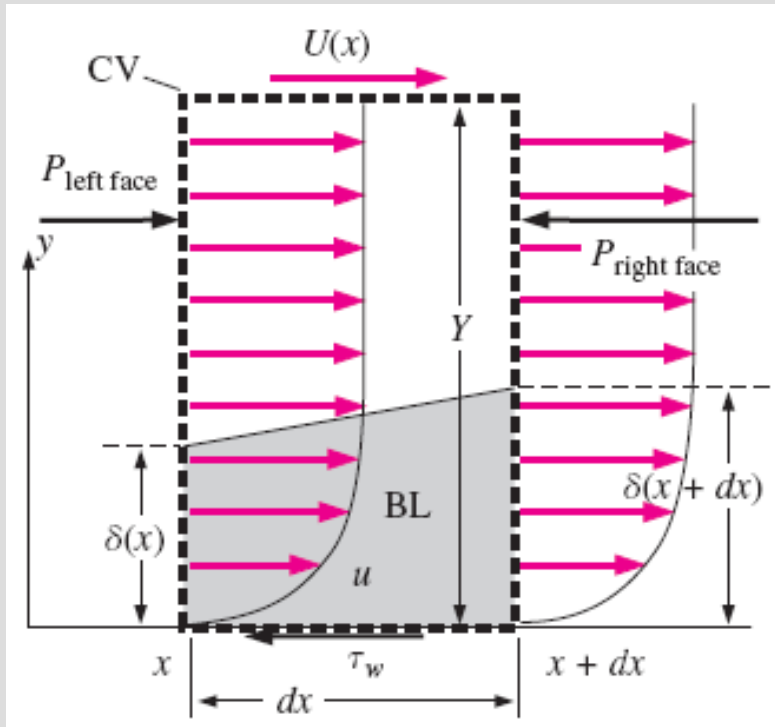
Tümseğin arka kısmında ayrılan laminer sınır tabakanın aksine, türbülanslı sınır tabakanın yüzeye tutulu kaldığına (akış ayrılmasının bulunmadığına) dikkat ediniz. Türbülanslı durumda dış akış Euler çözümü hiçbir akış ayrılması olmaması ve sınır tabakanın oldukça kalın kalmasından ötürü tüm yüzey boyunca geçerli olmaya devam etmektedir.

Sınır Tabakalar İçin Momentum İntegral Tekniği

Pratik mühendislik uygulamalarının çoğunda sınır tabaka içerisinde olup biten her şeyi bilmek gerekli değildir. Daha çok, sınır tabaka kalınlığı ve yüzey sürtünme katsayısı gibi sınır tabakanın genel özelliklerinin uygun tahminlerini yapmak isteriz.

Momentim integral tekniği, yüzeyler boyunca sıfır veya sıfır olmayan basınç gradyeni altındaki sınır tabakalara ait bu tür özelliklerin niceliksel yaklaşımlarını elde etmede bir kontrol hacmi yaklaşımını kullanır.

Hem laminer hem de türbülanslı sınır tabakalar için kullanılabilir.



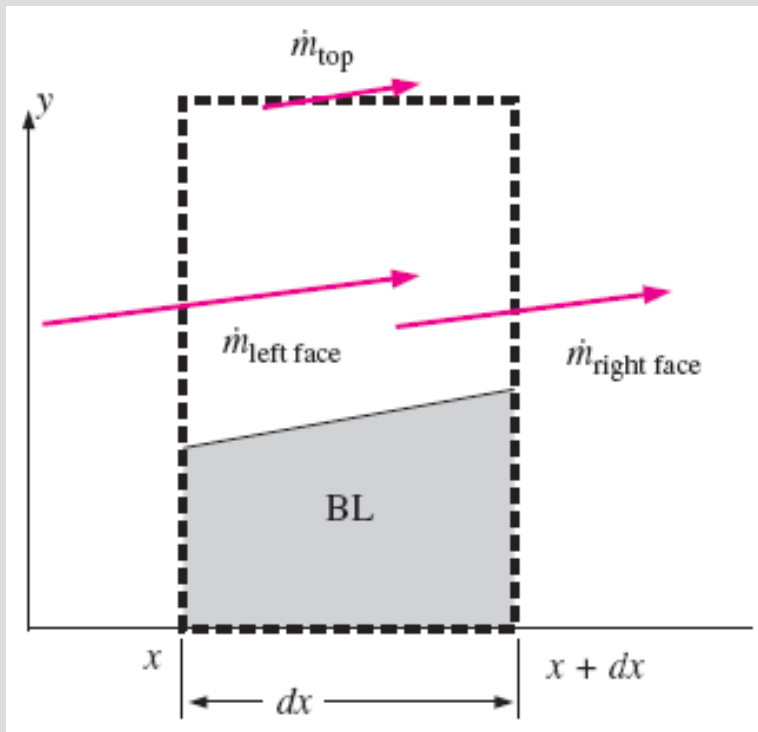
$$P_{\text{left face}} = P$$

$$P_{\text{right face}} = P + \frac{dP}{dx} dx$$

$$\dot{m}_{\text{left face}} = \rho w \int_0^Y u dy$$

$$\dot{m}_{\text{right face}} = \rho w \left[\int_0^Y u dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u dy \right) dx \right]$$

Momentum integral denkleminin türetilmesinde kullanılan kontrol hacmi (kalın kesikli siyah çizgi).



Şekil 10-127 'deki kontrol hacmi için kütle akışı dengesi.

$$\dot{m}_{\text{top}} = -\rho w \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right) dx$$

$$\underbrace{\sum F_{x, \text{body}}}_{\text{ignore gravity}} + \underbrace{\sum F_{x, \text{surface}}}_{Y_w P - Y_w \left(P + \frac{dP}{dx} dx \right) - w \, dx \, \tau_w}$$

$$= \underbrace{\int_{\text{left face}} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}_{-\rho w \int_0^Y u^2 \, dy} + \underbrace{\int_{\text{right face}} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}_{\rho w \left[\int_0^Y u^2 \, dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 \, dy \right) dx \right]} + \underbrace{\int_{\text{top}} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}_{\dot{m}_{\text{top}} U}$$

$$-Y \frac{dP}{dx} - \tau_w = \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 \, dy \right) - \rho U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right)$$

$$U \frac{dU}{dx} \int_0^Y dy - \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u^2 \, dy \right) - U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u(U - u) \, dy \right) + \frac{dU}{dx} \int_0^Y (U - u) \, dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\frac{d}{dx} \left(U^2 \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \right) + U \frac{dU}{dx} \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Product rule:

$$\frac{d}{dx} \left(U \int_0^Y u \, dy \right) =$$

$$U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right) + \frac{dU}{dx} \int_0^Y u \, dy$$

Product rule in reverse:

$$U \frac{d}{dx} \left(\int_0^Y u \, dy \right) =$$

$$\frac{d}{dx} \left(U \int_0^Y u \, dy \right) - \frac{dU}{dx} \int_0^Y u \, dy$$

Çarpım kuralı momentum integral denkleminin türetilmesinde tersten kullanılır.

Kármán integral equation:

$$\frac{d}{dx} (U^2 \theta) + U \frac{dU}{dx} \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Kármán integral equation, alternative form: $\frac{C_{f,x}}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (2 + H) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx}$

Shape factor:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

Local skin friction coefficient:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

Kármán integral equation, flat plat boundary layer:

$$C_{f,x} = 2 \frac{d\theta}{dx}$$

ÖRNEK 10-14 Düz Plaka Sınır Tabakasının Kármán İntegral Denklemi İle Analizi

Düz bir plaka üzerindeki türbülanslı sınır tabaka hakkında yalnızca iki unsurun, yani yerel yüzey sürtünme katsayısının (Şekil 10-130),

$$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}} \quad (1)$$

ve sınır tabaka profili şekli için,

$$y \leq \delta \text{ ise } \frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \text{ ve } y > \delta \text{ ise } \frac{u}{U} \cong 1 \quad (2)$$

olarak ifade edilen 1/7'inci kuvvet yasasının bilindiğini varsayınız. Yerdeğiştirme kalınlığı ve momentum kalınlığı tanımlarından yararlanmak suretiyle Kármán integral denklemini kullanarak δ , δ^* ve θ 'nın x ile nasıl değiştiğini belirleyiniz.

ÇÖZÜM Denklem 1 ve 2'ye göre δ , δ^* ve θ 'yı belirleyeceğiz.

Kabuller 1 Akış türbülanslı ancak ortalama olarak daimidir. 2 Plaka ince ve $U(x) = V = \text{sabit}$ olacak şekilde serbest akıma paralel olarak yerleştirilmiştir.

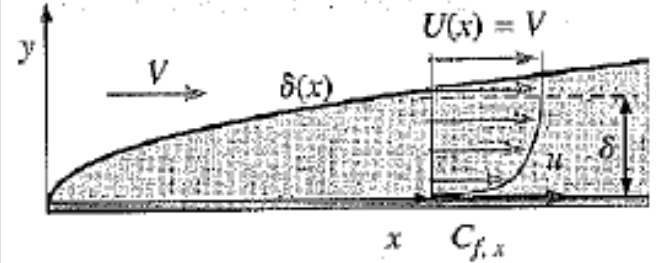
Analiz Momentum kalınlığını bulmak için önce Denklem 2'yi Denklem 10-80'de yerine yazıp integre edelim:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy = \frac{7}{72} \delta \quad (3)$$

Benzer şekilde Denklem 10-72'yi integre ederek yerdeğiştirme kalınlığını bulalım:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy = \frac{1}{8} \delta \quad (4)$$

Kármán integral denklemi düz bir plaka sınır tabakası için Denklem 10-97'ye dönüşür.



ŞEKİL 10-130

Örnek 10-14'te akışın düz plaka üzerinde meydana getirdiği türbülanslı sınır tabaka (sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

Denklemleri 3'ü Denklem 10-97'de yazıp düzenleyerek,

$$C_{f,x} = 2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{14}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

elde edilir. Bu ifadeden,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{14} C_{f,x} = \frac{72}{14} 0.027 (Re_x)^{-1/7} \tag{5}$$

sonucuna varılır. Burada yerel yüzey sürtünme katsayısı yerine Denklem 1'i yerleştirmiş olduk. Böylece Denklem 5 doğrudan integre edilerek,

Sınır tabaka kalınlığı: $\delta \cong \frac{0.16}{x} (Re_x)^{1/7} \tag{6}$

elde edilebilir. Son olarak Denklem 3 ve 4'ün Denklem 6'da yerine yazılmasıyla δ^* ve θ için,

Yerdeğiştirme kalınlığı: $\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(Re_x)^{1/7}} \tag{7}$

ve

Momentum kalınlığı: $\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(Re_x)^{1/7}} \tag{8}$

sonuçları bulunur.

İrdeleme Sonuçlar, Tablo 10-4'ün (a) sütununda verilen ifadelerle iki anlamlı basamağa kadar uyum göstermektedir. Doğrusunu söylemek gerekirse Tablo 10-4'teki ifadelerin çoğu Kármán integral denklemi yardımıyla elde edilmiştir.



ŞEKİL 10-131

Kármán integral denklemini kullanabilmek için bilinen (veya kabul edilen) bir hız profiline gereksinim vardır.

ÖRNEK 10-15 Bir Rüzgar Tünelinin Test Bölgesinin Çeperi Üzerindeki Direnç

Dikdörtgen en-kesitli bir rüzgar tünelinin çeperi boyunca bir sınır tabaka gelişmektedir. Hava 20°C sıcaklıkta ve atmosferik basıncıdadır. Sınır tabaka, daralma bölgesinin yukarıkımından başlamakta ve test bölgesi içerisine doğru büyümektedir (Şekil 10-132). Test bölgesine ulaştığında ise sınır tabaka tamamen türbülanslı olmaktadır. Sınır tabaka profili ve kalınlığı, rüzgar tünelinin test bölgesinin alt çeperinin hem başında ($x = x_1$) hem de sonunda ($x = x_2$) ölçülmektedir. Test bölgesi 1.8 m boyunda 0.50 m eninde (Şekil 10-132'de sayfa içine doğru) olup aşağıda verilen ölçümler yapılmıştır:

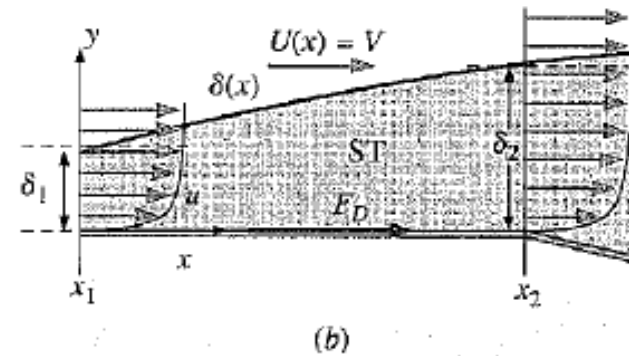
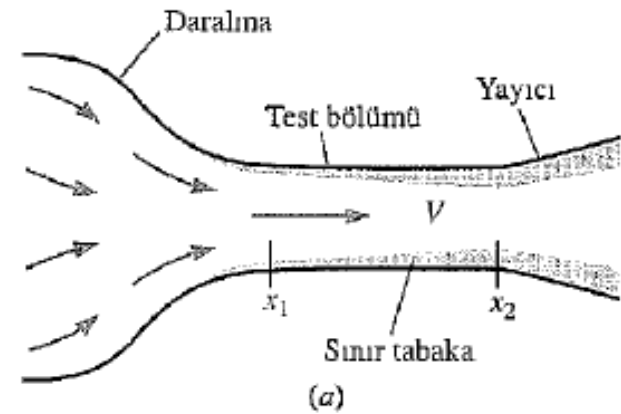
$$\delta_1 = 4.2 \text{ cm} \quad \delta_2 = 7.7 \text{ cm} \quad V = 10.0 \text{ m/s} \quad (1)$$

Sınır tabaka profili, her iki konumda da standart 1/7'inci kuvvet yasası yaklaşıtlımına kıyasla 1/8'inci kuvvet yasası yaklaşıtlımına daha iyi uyum göstermektedir:

$$y \leq \delta \text{ ise } \frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8} \quad \text{ve} \quad y > \delta \text{ ise } \frac{u}{U} \cong 1 \quad (2)$$

Buna göre rüzgar tünelinin test bölümünün alt çeperine etkiyen F_D toplam yüzey sürtünme direnç kuvvetini belirleyiniz.

ÇÖZÜM Bir rüzgar tünelinin test bölümünün alt çeperi üzerine ($x = x_1$ ile $x = x_2$ arasında) etkiyen toplam yüzey sürtünme direnç kuvveti belirlenecektir.



ŞEKİL 10-132

Örnek 10-15'te verilen rüzgar tünelinin çeperleri boyunca gelişen sınır tabaka: Test bölgesinin alt çeperinin (a) genel görünüşü ve (b) yakın görünüşü (sınır tabaka kalınlığı abartılı olarak çizilmiştir).

Özellikler 20°C'deki hava için $\nu = 1.516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ve $\rho = 1.204 \text{ kg/m}^3$.
Kabuller 1 Akış ortalama olarak daimidir. 2 Rüzgar tünelinin çeperleri $U(x) = V =$ sabit olacak şekilde hafifçe iraksamaktadır.

Analiz Momentum kalınlığı θ 'yi bulmak için önce Denklem 2'yi Denklem 10–80'de yerine koyup integre edelim:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/8}\right) dy = \frac{4}{45} \delta \quad (3)$$

Düz bir plaka sınır tabakası için Kármán integral denklemi, Denklem 10–97'ye dönüşür. Çeper boyunca olan kayma gerilmesi cinsinden Denklem 10–97

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho U^2 C_{f,x} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (4)$$

haline gelir. Yüzey sürtünme direnci kuvvetini bulmak için Denklem 4'ü $x = x_1$ 'den $x = x_2$ 'ye integre edersek,

$$F_D = w \int_{x_1}^{x_2} \tau_w dx = w \rho U^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\theta}{dx} dx = w \rho U^2 (\theta_2 - \theta_1) \quad (5)$$

buluruz. Burada w , çeperin Şekil 10–132'de sayfa düzlemine dik genişliğidir. Denklem 3'ün Denklem 5'te yerine yazılmasıyla,

$$F_D = w \rho U^2 \frac{4}{45} (\delta_2 - \delta_1) \quad (6)$$

sonucuna varılır. Son olarak verilen sayısal değerlerin Denklem 6'da yerine konulmasıyla direnç kuvveti,

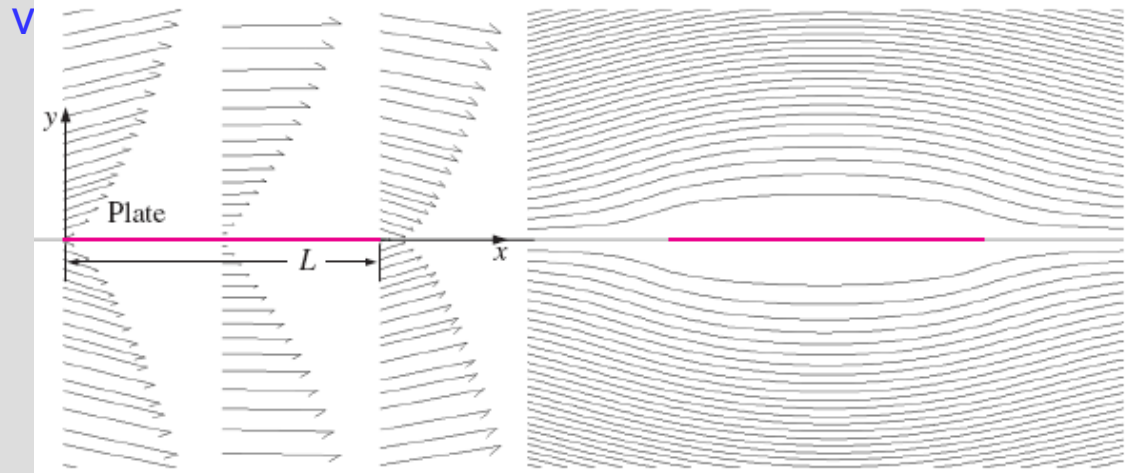
$$F_D = (0.50 \text{ m})(1.204 \text{ kg/m}^3)(10.0 \text{ m/s})^2 \frac{4}{45} (0.077 - 0.042) \text{ m} \left(\frac{\text{s}^2 \cdot \text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}}\right) = 0.19 \text{ N}$$

olarak bulunur.

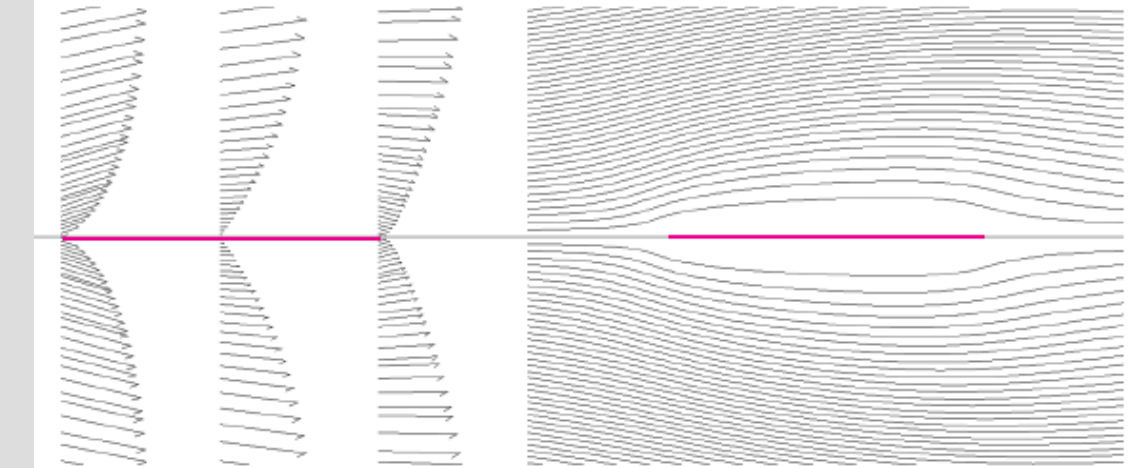
İrdeleme Newton'un küçük bir kuvvet birimi olması nedeniyle bu kuvvet oldukça küçüktür. Eğer dış akış hızı $U(x)$ sabit olmasaydı Kármán integral denklemini uygulamak çok daha zor olurdu.

L uzunluğunda sonsuz ince düz bir plaka üzerindeki akış. HAD hesaplamaları Re_L nin 10^{-1} ile 10^5 arasındaki değerleri için

V



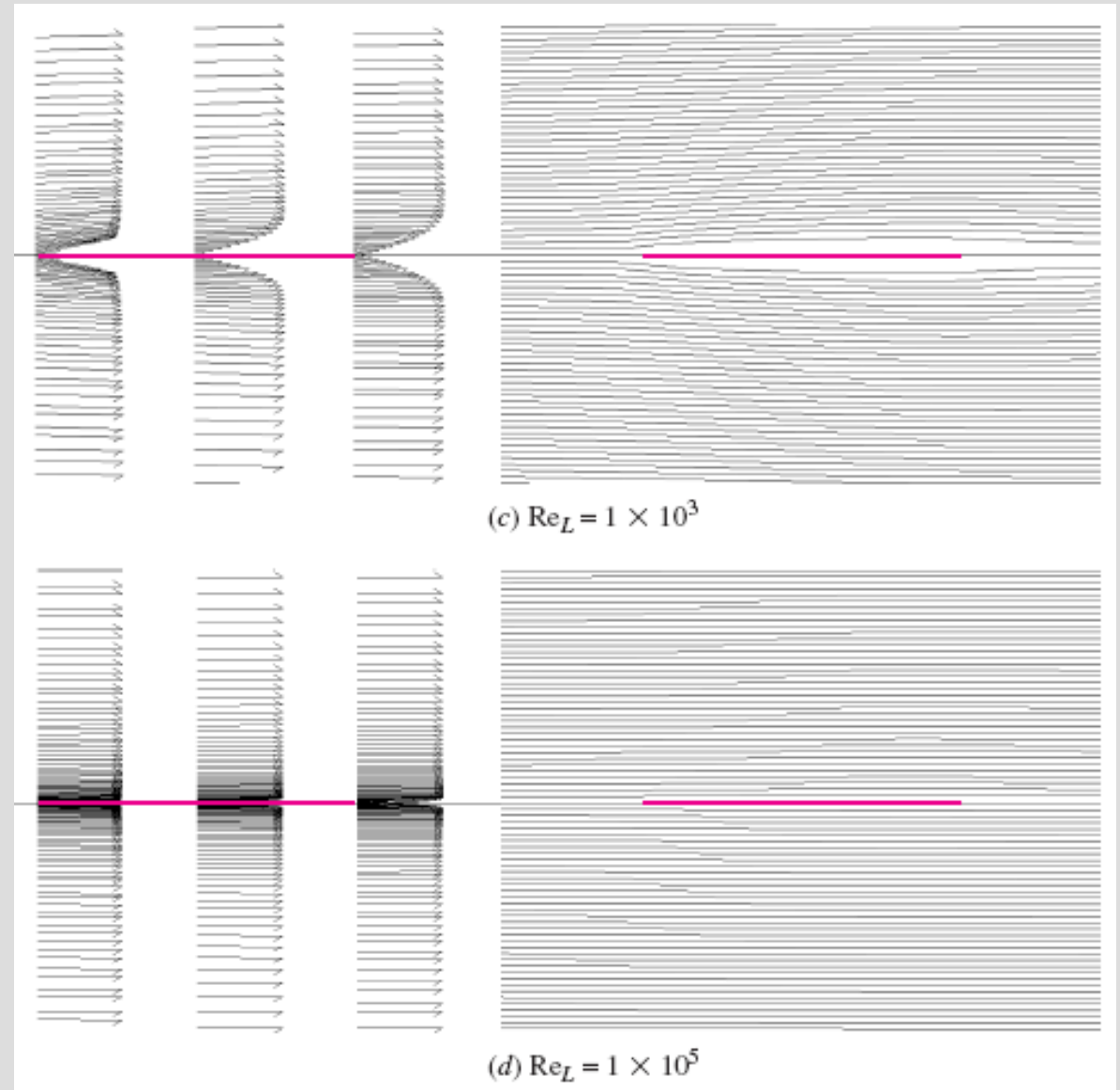
(a) $Re_L = 1 \times 10^{-1}$

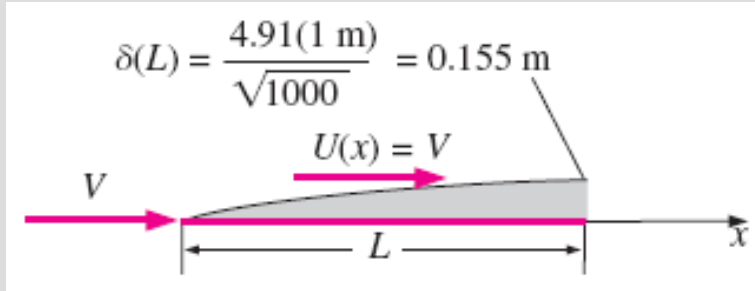


(b) $Re_L = 1 \times 10^1$

1 m uzunluğunda sonsuz ince bir düz plaka üzerinde soldan sağa doğru daimi, sıkıştırılamaz laminar akışa ait HAD hesaplamaları; hız vektörleri sol sütunda ve plaka boyunca üç farklı konumda gösterilmiş olup plaka civarındaki akım çizgileri sağ sütunda verilmiştir. (a) $Re_L = 0.1$ (b) $Re_L = 10$, (c) $Re_L = 1000$ ve (d) $Re_L = 100000$. Akışın yalnızca üst yarısı çözülmüştür—alt yarısı ise bir ayna görüntüsüdür. Hesaplama bölgesinin kenarlarında “sonsuz” uzak-alan şartlarını göz önüne almak için, hesaplama bölgesi burada gösterilenin ötesinde yüzlerce plaka boyu kadar uzamaktadır.

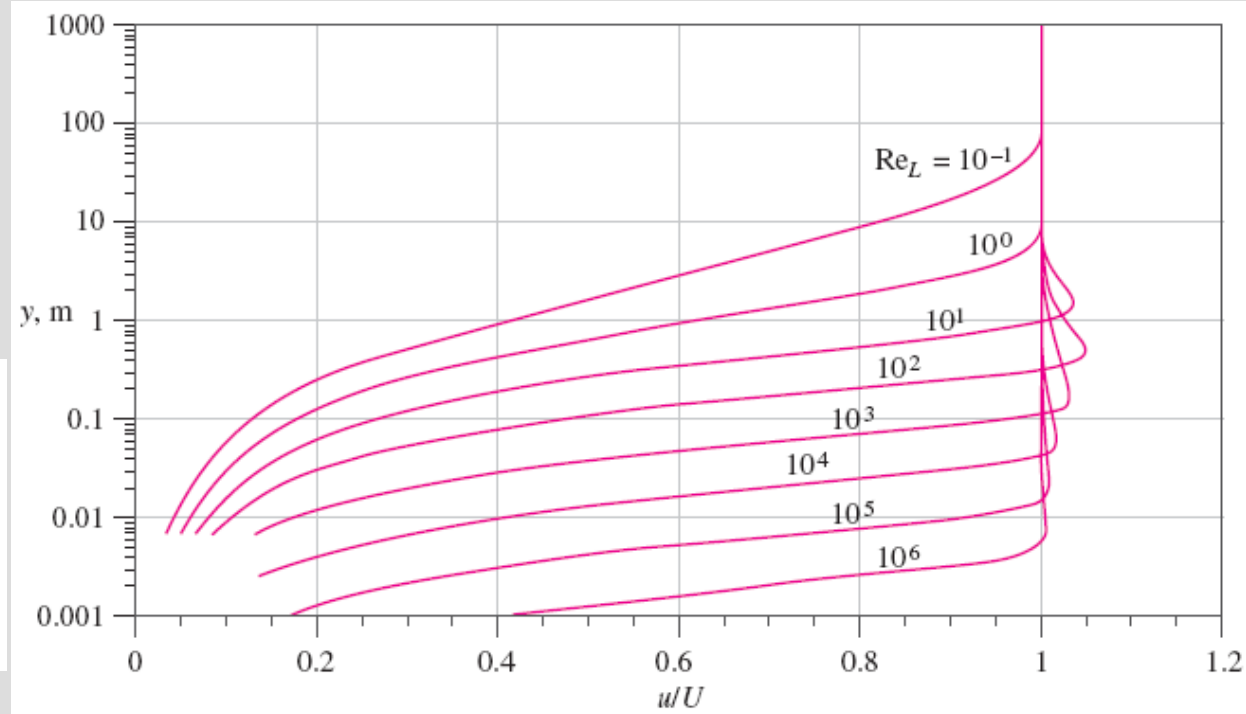
1 m uzunluğunda sonsuz ince bir düz plaka üzerinde soldan sağa doğru daimi, sıkıştırılmaz laminar akışa ait HAD hesaplamaları; hız vektörleri sol sütunda ve plaka boyunca üç farklı konumda gösterilmiş olup plaka civarındaki akım çizgileri sağ sütunda verilmiştir. (a) $Re_L = 0.1$ (b) $Re_L = 10$, (c) $Re_L = 1000$ ve (d) $Re_L = 100000$. Akışın yalnızca üst yarısı çözülmüştür—alt yarısı ise bir ayna görüntüsüdür. Hesaplama bölgesinin kenarlarında “sonsuz” uzak-alan şartlarını göz önüne almak için, hesaplama bölgesi burada gösterilenin ötesinde yüzlerce plaka boyu kadar uzamaktadır.





Düz bir plaka üzerindeki laminer akış için $Re_L = 1000$ 'de sınır tabaka kalınlığının hesaplanması. Bu sonuç, Şekil 10-134c'de gösterilen aynı Reynolds sayısı için $x = L$ 'de HAD kullanılarak elde edilen hız profili ile karşılaştırılmıştır.

Sonsuz ince bir düz plaka üzerinde daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu HAD hesaplamaları: boyutsuz x hız bileşeni u/U plakadan olan düşey mesafe y 'ye göre çizilmiştir. Orta seviyedeki Reynolds sayılarında gözlemlenen baskın hız aşması, çok düşük ve çok yüksek Re_L değerlerinde gözden kaybolmaktadır.



Özet

- GİRİŞ
- BOYUTSUZLAŞTIRILMIŞ HAREKET DENKLEMLERİ
- SÜRÜNME AKIŞI YAKLAŞTIRIMI
 - ✓ Sürünme Akışında Bir Küre Üzerindeki Direnç
- VİSKOZ OLMAYAN AKIŞ BÖLGELERİ İÇİN YAKLAŞTIRIM
 - ✓ Viskoz Olmayan Akış Bölgelerinde Bernoulli Denklemine Türetilmesi
- DÖNÜMSÜZ AKIŞ YAKLAŞTIRIMI
 - ✓ Süreklilik Denklemi
 - ✓ Momentum Denklemi
 - ✓ Dönümsüz Akış Bölgelerinde Bernoulli Denklemine Türetilmesi
 - ✓ İki-Boyutlu Dönümsüz Akış Bölgeleri
 - ✓ Dönümsüz Akış Bölgelerinin Süperpozisyonu
 - ✓ Temel Düzlemsel Dönümsüz Akışlar
 - ✓ Süperpozisyon ile Oluşturulan Dönümsüz Akışlar
- SINIR TABAKA YAKLAŞTIRIMI
 - ✓ Sınır Tabaka Denklemleri
 - ✓ Sınır Tabaka Çözüm Yolu
 - ✓ Yerdeğiştirme Kalınlığı
 - ✓ Momentum Kalınlığı
 - ✓ Türbülanslı Düz Plaka Sınır Tabakası
 - ✓ Basınç Gradyenli Sınır Tabakalar
 - ✓ Sınır Tabakalar İçin Momentum İntegral Tekniği