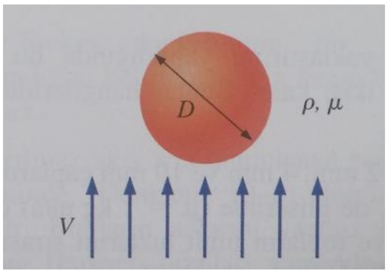
AKM 204- Bölüm 10- Uygulama Soru ve Çözümleri

1. Bir yağmur bulutundaki su damlasının çapı D= 42.5 μm'dir. Hava sıcaklığı 25°C ve basınç standart atmosfer basıncıdır. Damlanın havada askıda kalması için havanın düşey olarak yukarı doğru ne kadar hızda esmesi gerekir?



Kabuller:

i. Damla, küreseldir.

ii. Sürünme akışı yaklaştırımı çözüm için uygundur.

Özellikler:

25°C'de hava için ρ= 1.184 kg/m^3, μ= 1.849x10^{-5} kg/m.s

25°C'de su için ρ= 998 kg/m^3

Çözüm:

Problemi sanki-daimi olarak ele alalım. Parçacık ilk kez limit hıza ulaştığında, aşağı yönlü olan net kuvvet (ağırlık), yukarı yönlü olan net kuvvete (aerodinamik direnç kuvveti + kaldırma kuvveti) eşittir.

$$F_{asagi} = W = mg = \frac{\pi D^3}{6}\rho_{parcacik} g$$

$$F_{yukari} = F_{direnc} + F_{kaldirma}$$

$$F_{yukari} = 3\pi\mu VD + \frac{\pi D^3}{6}\rho_{hava} g$$

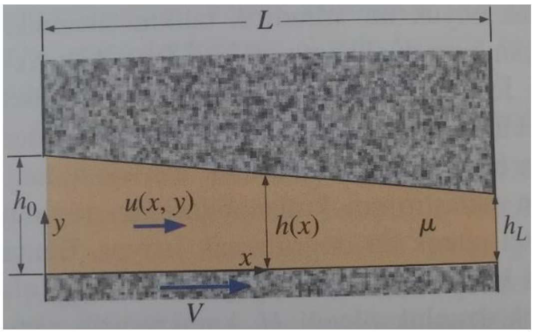
$$Denge: F_{asagi} = F_{yukari} \rightarrow \frac{\pi D^3}{6}(\rho_{parcacik} - \rho_{hava})g = 3\pi\mu VD$$

$$V = \frac{D^2}{18\mu}(\rho_{parcacik} - \rho_{hava})g = \frac{(42.5x10^{-6}\,m)^2}{18(1.849x10^{-5}\,kg/ms)}\left[(998 - 1.184)kg/m^3\right]9.81m/s^2 = 0.0531\,m/s$$

$$\text{Kontrol: } \mathrm{Re} = \frac{\rho_{hava} VD}{\mu} = \frac{(1.184\,kg/m^3)(0.0531\,m/s)(4.2x10^{-6}\,m)}{1.849x10^{-5}\,kg/ms} = 0.144 \ll 1$$

Dolayısıyla sürünme akışı yaklaştırımı doğru bir kabuldür.

2. Yağlama problemlerinde kaymalı yatak ile sıklıkla karşılaşılır. Verilen durumda üstteki blok sabit alttaki ise hareket etmekte olup yağ bu iki blok arasında akmaktadır. Çizim ölçekli değildir, gerçekte h<<L'dir. Bloklar arasındaki boşluk, x arttıkça azalmaktadır. Yani boşluk yüksekliği x=0'da h_0'dan, x=L'de h_L'ye düşmektedir. Tipik olarak boşluk yüksekliğinin uzunluk ölçeği h_0 eksenel uzunluk ölçeği L'den çok küçüktür. Hız bileşeni u, x ve y'nin fonksiyonudur. P basıncı x=0'da P=P_0'dan, x=L'de P=P_L'ye lineer olmayan bir şekilde değişmektedir. İki boyutlu, daimi ve laminer olarak ele alınan bu akış alanında, yerçekimi etkileri ihmal edilmektedir. Sürünme akışı varsayımı ile basınç farkı ΔP=P-P_0 için L, h_0, μ ve V'ye bağlı bir karakteristik ölçek oluşturunuz.



Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

ii. Akış, xy düzleminde 2-boyutludur.

iii. Sürünme akışı yaklaştırımı uygundur.

Çözüm:

Sürünme akışı yaklaştırımı: $[Eu]\vec{\nabla}^* P^* \cong \left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\right]\vec{\nabla}^{*2}\vec{V}^*$

Burada, denklemin sol tarafındaki basınç kuvvetlerinin, denklemin sağ tarafındaki viskoz kuvvetleri dengelemesi için yeterince büyük olması gerekmektedir. Denklemdeki boyutsuz değişkenlerin mertebeleri 1’dir. Bu durumda Eu ve 1/Re ifadelerinin aynı mertebede olması gerekmektedir. Bu ikisini eşitlersek:

$$[Eu]=\frac{P_0-P_\infty}{\rho V^2}\sim\left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\right]=\frac{\mu}{\rho VL}$$

x-Momentum: $\dfrac{\partial P}{\partial x}\approx\mu\nabla^2 u\rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial x}\approx\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ (2B)

Büyüklük mertebelerini yazarsak: $\underbrace{\dfrac{\partial P}{\partial x}}_{\frac{\Delta P}{L}}\approx\mu\underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{V}{L^2}}+\mu\underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{V}{h_0^{\,2}}}$ $(h_0<<L)$

Karakteristik basınç ölçeği: $\dfrac{\Delta P}{L}\sim\mu\dfrac{V}{h_0^{\,2}}\rightarrow\Delta P\sim\dfrac{\mu VL}{h_0^{\,2}}$

3. 2.sorudaki kaymalı yatağı göz önüne alınız. **a)** Hızın y-bileşeni için bir karakteristik ölçek elde ediniz. **b)** x-momentum denkleminde atalet terimlerini basınç ve viskoz terimler ile kıyaslamak için bir büyüklük mertebesi analizi yapınız. Boşluk küçük (h_0<<L) ve Reynolds sayısı küçük (Re<<1) olduğunda sürünme akışı yaklaştırımının uygun olduğunu gösteriniz. **c)** h_0<<L olduğunda Re sayısı 1’den küçük olmasa bile, sürünme akışı yaklaştırımının uygun olacağını gösteriniz.

Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

ii. Akış, xy düzleminde 2-boyutludur.

iii. Yerçekimi etkileri ihmal edilmiştir.

Çözüm:

a) Hızın y bileşeni için karakteristik bir ölçek elde etmek üzere süreklilik denklemi yazılırsa:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{V}{L}}+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{V}{h_0}}=0\rightarrow v\sim\frac{Vh_0}{L}$$

b) Daimi, 2B, sıkıştırılamaz ve yerçekimi etkisinin hesaba katılmadığı x momentum denklemi yazılırsa:

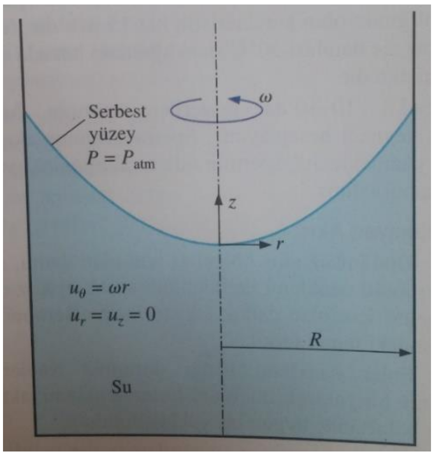
$$\underbrace{\rho u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\rho V^2}{L}}+\underbrace{\rho v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\rho\frac{Vh_0}{L}\frac{V}{h_0}=\frac{\rho V^2}{L}}=-\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\frac{\mu V}{h_0^{\,2}}}+\underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\cancel{\frac{\mu V}{L^2}}\ \text{(ihmal)}}+\underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{\mu V}{h_0^{\,2}}}$$

h_0<<L

Mertebelerin büyüklük karşılaştırması: $\underbrace{\rho u\dfrac{\partial u}{\partial x}}_{1}+\underbrace{\rho v\dfrac{\partial u}{\partial y}}_{1}=-\underbrace{\dfrac{\partial P}{\partial x}}_{\frac{\mu}{\rho Vh_0}\frac{L}{h_0}}+\underbrace{\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{\mu}{\rho Vh_0}\frac{L}{h_0}}$

Yukarıdaki denklemde basınç ve viskoz terimlerin 1/Re terimini (sürünmeli akışlar için büyük bir değer) ve L/h_0 terimini (bu da sürünmeli akışlar için büyük bir değerdir) içerdiğini görmekteyiz. Bu durumda atalet terimleri (denklemin sol tarafı), basınç ve viskoz terimlerine oranla ihmal edilebilecek mertebede küçüktür.

4. Dönen bir silindirik kap içerisinde T=20°C sıcaklığındaki su, z ekseni etrafında katı bir cisim halinde dönmektedir. Su, katı cisim gibi hareket ettiğinden viskoz gerilme bulunmamakta, dolayısıyla Euler denklemi geçerli olmaktadır. Euler denklemini integre ederek su içerisinde herhangi bir yerdeki basıncı r ve z'nin fonksiyonu olarak ifade ediniz. (Serbest yüzeyin her yerinde $P=P_{atm}$'dir. Akış z ekseni etrafında dönel simetriktir.)



Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

ii. Akış, dönel simetriktir yani, Θ'ya göre tüm türevler sıfırdır.

iii. Yerçekimi –z yönünde etkindir.

Özellikler:

T=20° C'de su için ρ=998 kg/m^3, μ=1.002x10^{-3} kg/m.s

Çözüm:

$u_r=u_z=0$ $u_\Theta=\omega r$

Euler denklemi r bileşeni: $-\rho\dfrac{u_\theta^{\,2}}{r} = -\dfrac{\partial P}{\partial r} \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r$ (1)

z bileşeni: $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho g \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$ (2)

1. denklemi r'ye göre integre edersek: $P = \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2} + f(z)$ (3)

3. denklemin z'ye göre türevini alıp 2. Denkleme eşitlersek: $f'(z) = -\rho g \rightarrow f(z) = -\rho g z + C_1$ (4)

$P = \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C_1$ (5)

C_1'i bulmak için orijindeki sınır koşullarını uygularsak:

r=0, z=0'da $P=P_{atm}=C_1 \rightarrow C_1=P_{atm}$ $\rightarrow P = \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + P_{atm}$ (6)

Serbest yüzeyde $P=P_{atm}$'dir. Denklem 6, serbest yüzeyin şeklini verir: $z_{yuzey} = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$

5. $\vec{V}$= (u, v) = (ax + b)$\vec{i}$+ (−ay + c)$\vec{j}$ ile verilen daimi, iki boyutlu ve sıkıştırılamaz hız alanını dikkate alınız. Bu akış alanı dönümsüz müdür? Eğer öyleyse hız potansiyeli fonksiyonu için bir ifade elde ediniz.

Çözüm: Akış alanının dönümsüz olması için girdap vektörünün (ζ) sıfıra eşit olması gerekir.

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

Akış alanı dönümsüz olduğu için bir hız potansiyeli fonksiyonu tanımlanabilir.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = ax + b \qquad \phi = a\frac{x^2}{2} + bx + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = v = -ay + c \qquad f(y) = -a\frac{y^2}{2} + cy + \text{constant} \qquad \phi = a\frac{(x^2 - y^2)}{2} + bx + cy + C_1$$

6. $\phi = 3(x^2 - y^2) + 4xy - 2x - 5y + 2$ hız potansiyeli fonksiyonu ile tanımlanan daimi, 2 boyutlu, dönümsüz bir akışın hız alanını göz önüne alınız.

a) u ve v hız bileşenlerini hesaplayınız.

b) ϕ'nin geçerli olduğu bölgede hız alanının dönümsüz olduğunu doğrulayınız.

c) Bu bölge için akım fonksiyonu veren bir ifade elde ediniz.

Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

ii. Akış, xy düzleminde 2-boyutludur.

iii. Akış, incelediğimiz bölgede dönümsüzdür.

Çözüm:

a) Hız Bileşenleri: $u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 6x + 4y - 2 \qquad v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -6y + 4x - 5$

b) Vortisite z-bileşeni: $\zeta_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4 - 4 = 0$

Akış, xy düzlemindedir ve vortisitenin tek bileşeni z yönünde olacaktır. z bileşeninin sıfır olması, akışın ilgilendiğimiz bölümde dönümsüz olduğunu göstermektedir.

c) Akım fonksiyonu:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

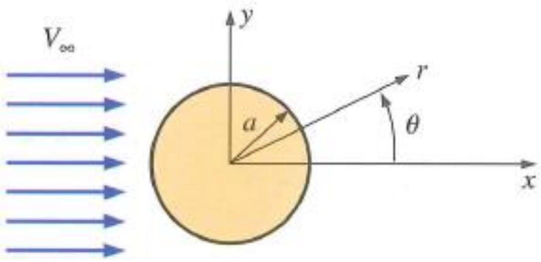
$$\psi = 6xy + 2y^2 - 2y + f(x)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = v = -6y - f'(x) = -6y + 4x - 5$$

$$f'(x) = 5 - 4x \rightarrow f(x) = 5x - 2x^2 + sabit$$

$$\psi = 6xy + 2y^2 - 2y + 5x - 2x^2 + sabit$$

7. Akış alanının dönümsüz olarak ele alınması halinde *a* yarıçaplı dairesel bir silindir üzerinden V_∞ serbest akımlı, daimi, sıkıştırılamaz, iki boyutlu akışa ait akım fonksiyonu $\psi = V_\infty sin\theta(r - \frac{a^2}{r})$ ifadesi ile verilir. Bu akış için hız potansiyeli fonksiyonu ϕ'yi r ve Θ ile V_∞ ve *a* parametrelerine bağlı bir fonksiyon olarak elde ediniz.



Çözüm 1: Hız bileşenlerinin her bölge için akım fonksiyonundan hesaplanması ve hız potansiyelini bulmak için integre edilmesi:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad \rightarrow \qquad \phi = V_\infty \cos\theta \left(r + \frac{a^2}{r}\right) + f(\theta)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{f'(\theta)}{r} = -V_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\phi = V_\infty \cos\theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right)$$

Çözüm 2: Bu akışı uniform akış ve bir dublenin süperpozisyonu olarak düşünürsek hız potansiyeli:

$$\phi = V_\infty r \cos\theta + K\frac{\cos\theta}{r}$$

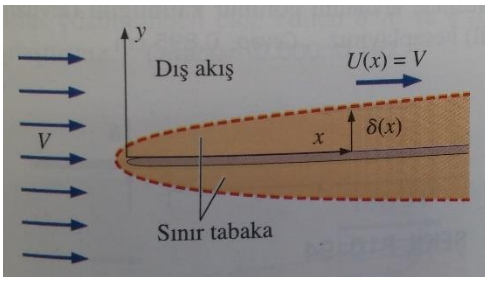
Dublenin gücünü (strength) bulmak için radyal hız bileşeni u_r'yi silindir yüzeyinde sıfıra eşitleyelim:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_\infty \cos\theta - K\frac{\cos\theta}{r^2} \quad \rightarrow \quad 0 = V_\infty \cos\theta - K\frac{\cos\theta}{a^2}$$

$$K = a^2 V_\infty.$$

$$\phi = V_\infty \cos\theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right)$$

8. Sınır tabakaların genellikle katı çeperler boyunca oluştuğu düşünülür. Bununla birlikte sınır tabaka yaklaştırımının doğru olduğu başka akışlar da vardır. Bu akışlar için 3 örnek veriniz ve sınır tabaka yaklaştırımının neden uygun olduğunu açıklayınız.



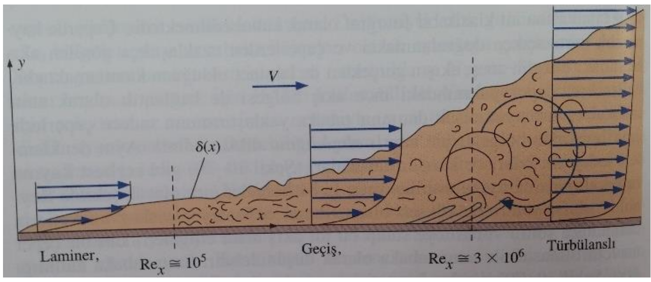
Çözüm:

Bir duvar üzerinden akış haricinde 3 akış tipinde de sınır tabaka akışı yaklaşımı yapmak uygundur. Bunlar:

- İz (wake)
- Jet akışı (jet flow)
- Karışma bölgesi akışları (mixing layers)

Bu akışlar baskın bir akış yönüne sahiptir. Yüksek Reynolds sayılarında, kayma tabakası incedir çünkü viskoz terimler (kuvvetler) atalet terimlerine (kuvvetlerine) göre küçüktür.

9. Hava, karayolu boyunca hız limiti işaret levhasına paralel olarak V=8.5 m/s hızla akmaktadır. Havanın sıcaklığı 25°C ve akış yönüne paralel işaret levhası genişliği W=0.45 m'dir. İşaret levhası üzerindeki sınır tabaka laminer mi, yoksa geçiş rejimli midir?



Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

ii. İşaret levhasının yüzeyi pürüzsüzdür.

Özellikler:

T= 25°C'de havanın yoğunluğu ρ= 1.184 kg/m^3, viskozitesi μ=1.849x10^{-5} kg/m.s, kinematik viskozitesi ν=1.562x10^{-5} m^2/s'dir.

Çözüm:

Bu akış, akışkanın levhaya paralel aktığı sınır tabaka akışıdır. Reynolds sayısını hesaplayalım:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho V W}{\mu} = \frac{VW}{\nu} \rightarrow \mathrm{Re}_x = \frac{(8.5m/s)(0.45m)}{1.562\times 10^{-5} m^2/s} = 2.45\times 10^5$$

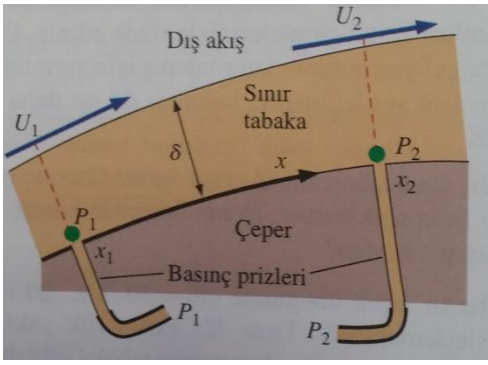
Çok sakin, düşük çalkantılı serbest akım şartlarında pürüzsüz düz levha için türbülansa geçiş için kritik Re sayısı: **1x10^5** 'tir. Gerçek mühendislik akışlarında kullanılan kritik Re sayısı ise $\mathrm{Re}_{x,cr}$= **5x10^5** kabul edilmektedir. Üzerinden sabit bir hızda serbest akım geçen pürüzsüz düz bir levha için geçiş süreci kritik Re sayısı ile başlar ve sınır tabaka geçiş Re sayısı $\mathrm{Re}_{x,geçiş}$≈**30x10^5**'te tamamen türbülanslı hale gelinceye kadar devam eder. Bu soruda hesapladığımız Re sayısı kritik Re sayısı $\mathrm{Re}_{x,cr}$ 'ten biraz büyük, gerçek mühendislik Re kritik sayısından küçük ve geçiş Re krtitik sayısından çok daha küçük olduğu için, sınır tabaka bir süre laminer kalır ve daha sonra geçiş bölgesine girer.

10. Bir çeper üzerindeki laminer sınır tabaka boyunca iki noktadan statik basınç (P) ölçülmektedir. Ölçülen basınçlar P_1 ve P_2 olup yüzey boyutuyla kıyaslandığında basınç prizleri (delikleri) arasındaki mesafe küçüktür. ($\Delta x = X_2 - X_1 << L$). Sınır tabaka üstünde 1 noktasındaki dış akış hızı U_1, akışkan yoğunluğu ve viskozitesi sırasıyla ρ ve μ olarak verilmektedir. Sınır tabaka üstünde bulunan 2 noktasındaki dış akış hızı U_2'yi P_1, P_2, Δx, U_1, ρ ve μ'ye bağlı olarak bulunuz.

Kabuller:

i. Akış daimi, sıkıştırılamaz ve laminerdir.

ii. Sınır tabaka yaklaşımı uygundur.



Çözüm:

Sınır tabaka yaklaşımında sınır tabaka normali doğrultusunda basınç P sabittir. Çeper boyunca herhangi bir x konumunda sınır tabakanın dış kenarındaki basınç çeperdeki basınçla aynıdır. Dış akış bölgesinde, Bernoulli denklemi:

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} \rightarrow \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho U}\frac{dP}{dx} \qquad (1)$$

Küçük Δx değerleri için, $U_2 \approx U_1 + (dU/dx)\Delta x \qquad P_2 \approx P_1 + (dP/dx)\Delta x$

$$U_2 \approx U_1 - \frac{1}{\rho U_1}\frac{dP}{dx}\Delta x = U_1 - \frac{1}{\rho U_1}\frac{P_2 - P_1}{\Delta x}\Delta x \rightarrow U_2 \approx U_1 - \frac{P_2 - P_1}{\rho U_1}$$

11. Laminer akışlı bir rüzgar tüneli 30 cm çapında ve 80 cm boyunda test bölümüne sahiptir. Hava sıcaklığı 20°C'dir. Test bölümünün girişindeki 2 m/s'lik bir üniform hava hızı için, merkez çizgisi üzerindeki hava hızı test bölümünün sonuna kadar % kaç artar?

Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

ii. Duvarlar pürüzsüzdür, bozulmalar ve titreşimler minimumda tutulmaktadır.

iii. Sınır tabaka laminerdir.

Özellikler:

20°C'de havanın kinematik viskozitesi: ν= 1.516x10^{-5} m^2/s

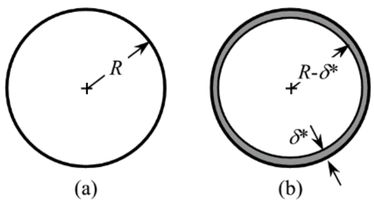
Çözüm:

Sınır tabaka tünelin test kesiti duvarları boyunca geliştikçe, dönümsüz akış bölgesindeki hava, kütlenin korunumu sebebiyle hızlanır. Test kesitinin sonunda Reynolds sayısı:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(2m/s)(0.80m)}{1.516\times10^{-5} m^2/s} = 1.055\times10^5$$

Duvar boyunca sınır tabakanın laminer olduğunu kabul edebiliriz.

$$\delta^* \approx \frac{1.72x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{1.72(0.8m)}{\sqrt{1.055\times10^5}} = 0.00424\,m = 4.24mm$$



(a) test kesitinin başlangıcında
(b) bitişinde

Kütlenin korunumu: $V_{bitis}A_{bitis} = A_{baslangic}V_{baslangic}$

$$V_{bitis} = V_{baslangic}\frac{\pi R^2}{\pi(R-\delta^*)^2}$$

$$V_{bitis} = (2m/s)\frac{(0.15m)^2}{(0.15-0.00423\,m)^2} = 2.12m/s$$

Havanın hızı, yer değiştirme kalınlığı etkisiyle yaklaşık olarak **%6** artmıştır.

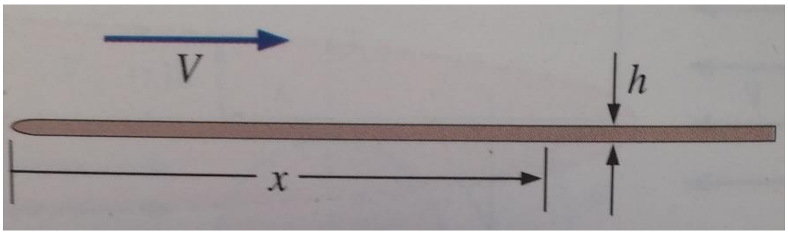
12. 20°C sıcaklığındaki hava bir düz levhaya paralel olarak V= 8.5 m/s hızla akmaktadır. 40 cm boyundaki levhanın girişi iyice yuvarlatılmıştır. Levha kalınlığı h= 0.75 cm olmasına karşın, sınır tabakadaki yerdeğiştirme etkilerinden ötürü sınır tabaka dışındaki akış daha yüksek görünür kalınlığa sahip bir levha "görmektedir". x=10 cm aşağıakım mesafesindeki levhanın görünür kalınlığını (levhanın her iki tarafı dahil) hesaplayınız.

Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

ii. Duvarlar pürüzsüzdür.

iii. Sınır tabaka gelişmeye x=0'da başlamaktadır.



Özellikler:

20°C'de havanın kinematik viskozitesi: ν= 1.516x10^{-5} m^2/s

Çözüm:

Levha boyunca sınır tabaka geliştikçe, Reynolds sayısı artmaktadır.

$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{(8.5m/s)(0.10m)}{1.516\times10^{-5}m^2/s} = 5.607\times10^4$$

$Re_x<Re_{x,cr}$ olduğu için sınır tabaka laminer kalmaktadır. x=10 cm'deki yer değiştirme kalınlığını hesaplarsak;

$$\delta^* \approx \frac{1.72x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1.72(0.1m)}{\sqrt{5.607\times10^4}} = 7.264\times10^{-4}m = 0.07264\,cm$$

Yer değiştirme kalınlığı, büyüyen sınır tabaka etkisiyle dış akışın çeper kalınlığında gördüğü hayali artıştır. Levha kalınlığı 0.75 cm'dir ve levhanın 2 yüzünde de sınır tabaka oluşacağından levhanın toplam görünen kalınlığı:

$$h_{gorunen} = h + 2\delta^* = 0.75cm + 2(0.07264\,cm) = 0.895cm$$

13. İnce ve pürüzsüz bir düz plaka üzerinden 21˚C sıcaklığındaki hava 4.72 m/s hızla akmaktadır. Plakanın uzunluğu 3.23 m'dir. Plaka üzerindeki sınır tabakanın laminer mi, türbülanslı mı yoksa bu ikisi arasında mı (geçiş rejimi) olması en muhtemeldir? Plaka sonundaki sınır tabaka kalınlığını şu iki durum için karşılaştırınız: (a) Sınır tabaka her yerde laminer ve (b) sınır tabaka her yerde türbülanslı.

Çözüm: 21˚C'de havanın viskozitesi 1.526x10^{-5} m^2/s'dir.

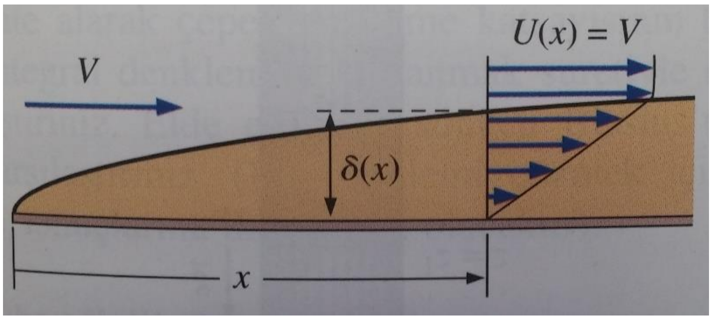
$$Re_x = \frac{Vx}{\nu} = 1x10^6$$

Mühendislik problemlerinde türbülanslı akış için kritik Reynolds sayısı 5x10^5'tir ve bu akıştaki Re sayısı bu değerin üzerinde görülmektedir. Ancak düz bir levha üzerindeki akımda geçiş bölgesi Re sayısı 3x10^6'dır ve bu akıştaki değer kritik değerin altındadır. Bu da akışın plağın başlangıcında laminar aşağı akımda ise geçiş bölgesi Re sayılarında olduğunu gösteriyor.

$$\delta = \frac{4.91x}{\sqrt{Re_x}} = 0.015m$$

$$\delta = \frac{0.16x}{{Re_x}^{1/7}} = 0.0997m$$

14. Düz bir levha üzerindeki daimi, sıkıştırılamaz ve laminer akışta sınır tabaka kalınlığı δ, basit bir lineer ilişki ile şu şekilde verilmektedir: y<δ için u=Uy/δ ve y>δ için u=U. Bu lineer yaklaştırıma göre yer değiştirme kalınlığını ve momentum kalınlığını δ'nın fonksiyonu olarak veren ifadeler geliştiriniz. Bulunan δ*/ δ ve Θ/δ değerlerini Blasius çözümünden elde edilen δ*/δ ve Θ/δ değerleriyle karşılaştırınız.



Çözüm:

Düz bir levha için U(x)=V=sabit

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy = \left[y - \frac{y^2}{2\delta} \right]_{y=0}^{y=\delta}$$

Sadece y=δ için integre ediyoruz. δ*'ı δ'nın bir fonksiyonu olarak elde ediyoruz.

$$\delta^* = \left[\delta - \frac{\delta}{2}\right] - [0 - 0] = \frac{\delta}{2} \rightarrow \delta^* = \frac{\delta}{2}$$

Benzer şekilde;

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy = \left[\frac{y^2}{2\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2}\right]_{y=0}^{y=\delta}$$

$$\theta = \left[\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{3}\right] - [0 - 0] = \frac{\delta}{6} \rightarrow \theta = \frac{\delta}{6}$$

$$\delta^* = \frac{\delta}{2} \rightarrow \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{2} = 0.500$$

$$\theta = \frac{\delta}{6} \rightarrow \frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{6} = 0.167$$

Blasius çözümü sonuçları:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1.72}{4.91} = 0.350$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{0.664}{4.91} = 0.135$$

Bu durumda $\frac{\delta^*}{\delta}$ için hata %43, $\frac{\theta}{\delta}$ için hata %23 olarak hesaplanabilir.

15. Düz bir levha üzerindeki laminer ve türbülanslı sınır tabakalar için şekil faktörü H'yi karşılaştırınız. Türbülanslı sınır tabakanın, levhanın başlangıcından itibaren türbülanslı olduğunu kabul ediniz. Sonucu irdeleyiniz. Sizce H'ye neden "şekil faktörü" adı verilir?

Çözüm:

Şekil faktörü H, yer değiştirme kalınlığının momentum kalınlığına oranı olarak tanımlanmaktadır.

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\delta^*/x}{\theta/x}$$

Düz bir levha üzerindeki laminer sınır tabaka için:

$$H = \frac{\delta^*/x}{\theta/x} = \frac{1.72/\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{0.664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = 2.59$$

Türbülanslı sınır tabaka için:

TABLE 10–4

Summary of expressions for laminar and turbulent boundary layers on a smooth flat plate aligned parallel to a uniform stream*

Property	Laminar	(a) Turbulent(†)	(b) Turbulent(‡)
Boundary layer thickness	$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.38}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$
Displacement thickness	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.048}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$
Momentum thickness	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.037}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$
Local skin friction coefficient	$C_{f,x} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\mathrm{Re}_x)^{1/7}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.059}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}$

* Laminar values are exact and are listed to three significant digits, but turbulent values are listed to only two significant digits due to the large uncertainty affiliated with all turbulent flow fields.

† Obtained from one-seventh-power law.

‡ Obtained from one-seventh-power law combined with empirical data for turbulent flow through smooth pipes.

Karşılaştırma yapmak için hem a sütununa göre, hem b sütununa göre hesaplama yapılırsa:

(a)

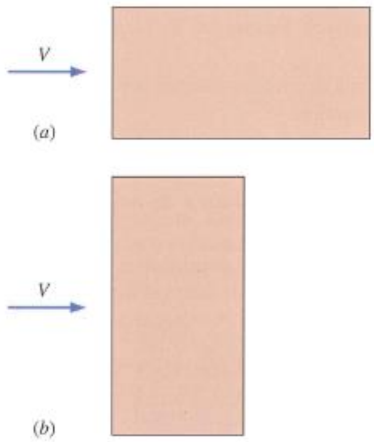
$$H = \frac{\delta^* / x}{\theta / x} = \frac{0.02 / (\mathrm{Re}_x)^{1/7}}{0.016 / (\mathrm{Re}_x)^{1/7}} = 1.25$$

(b)

$$H = \frac{\delta^* / x}{\theta / x} = \frac{0.048 / (\mathrm{Re}_x)^{1/5}}{0.037 / (\mathrm{Re}_x)^{1/5}} = 1.30$$

Bu durumda laminer sınır tabakanın şekil faktörü türbülanslı sınır tabanın neredeyse 2 katıdır. Bu da bize şekil faktörü küçük değere sahip olduğunda daha dolgun bir sınır tabaka oluşacağını gösterir. Küçük H değerinde sınır tabaka ayrılmamaya meyillidir. H, hız gradyeninin şekline bağlıdır (adından da anlaşılacağı üzere→ şekil faktörü)

16. Şekilde gösterilen dikdörtgen şeklindeki düz plakaların bir boyutu diğer boyutunun 2 katıdır. Hava, plakaya paralel şekilde üniform hızla akmakta ve böylece plakanın her iki yanında laminer sınır tabaka oluşturmaktadır. Hangi yerleştirme biçimi (uzun boyut rüzgara paralel veya kısa boyut rüzgara paralel) daha yüksek dirence sahiptir?



Çözüm: Reynolds sayısı laminer bir plakadaki kayma gerilmesi denkleminde paydadadır ve kayma gerilmesi x arttıkça azalacaktır.

$$\tau_w = 0.332 \frac{\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Böylece duvardaki ortalama kayma gerilmesi kısa kenarın rüzgara paralel olduğu durumda daha yüksek olacaktır. Yüzey alanı yerleştirme biçimine bağlı olmaksızın aynı olacağı için (b) durumunda daha fazla direnç oluşacaktır.

17. 30˚C sıcaklıktaki hava, pürüzsüz bir düz plaka üzerinde 25.0 m/s'lik uniform bir hızla akmaktadır. Plaka boyunca sınır tabakanın türbülansa geçiş sürecine başladığı yaklaşık x-konumunu hesaplayınız. Plaka boyunca yaklaşık olarak hangi x-konumunda sınır tabaka muhtemelen tam türbülanslı hale gelir?

Çözüm: Verilen sıcaklıkta yoğunluk ve viskozite değerleri sırasıyla:1.164 kg/m^3 ve 1.872x10^{-5} kg/ms'dir. Geçiş Reynolds sayısı 100.000 için gerçekleşmektedir.

$$\mathrm{Re}_{x,\text{critical}} = \frac{\rho V x_{\text{critical}}}{\mu} = 100,000$$

$$x_{\text{critical}} = \frac{100,000\mu}{\rho V} = \frac{100,000\left(1.872\times10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s}\right)}{\left(1.164\ \text{kg/m}^3\right)\left(25.0\ \text{m/s}\right)} = 6.43\times10^{-2}\ \text{m}$$

Görüldüğü gibi geçiş yaklaşık olarak 6-7 cm civarında olacaktır. Tam türbülanslı hale geçebilmesi için Reynolds sayısı 3x10^6 olmalıdır bu da yaklaşık olarak x=2 m civarında olacaktır.