AKM 204– BÖLÜM 9- UYGULAMA SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1. $\vec{V} = (u, v) = (1.3 + 2.8x)\vec{i} + (1.5 - 2.8y)\vec{j}$ ifadesi ile verilen daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz hız alanını dikkate alınız. Bu akış alanının sıkıştırılamaz olduğunu gösteriniz.

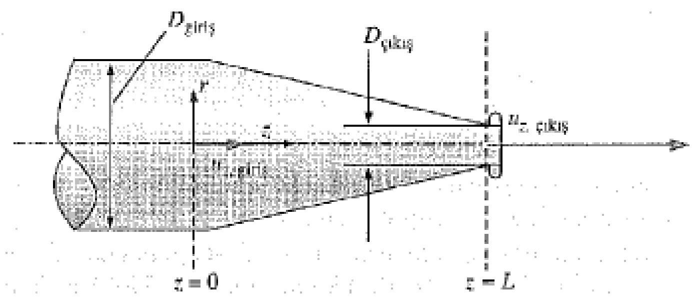
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2.8} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-2.8} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0 \text{ since 2-D}} = 0$$

2. Daimi iki boyutlu, sıkıştırılamaz bir akış alanının u hız bileşeni u = ax + b ile veriliyor. Burada a ve b sabitlerdir. Bilinmeyen v hız bileşenini x ve y'nin fonksiyonu olarak elde ediniz.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -a$$

$$\boxed{v = -ay + f(x)}$$

3. Eksenel simetrik bir bahçe hortumu fıskiyesi içerisindeki daimi su akışını göz önüne alınız. Eksenel hız bileşeni, $u_{z,giriş}$ 'ten $u_{z,çıkış}$'a şekilde gösterildiği gibi akmaktadır. Eksenel hız bileşeni z = 0 ile z = L arasında $u_z = u_{z,giriş} + [(u_{z,çıkış} - u_{z,giriş})/L]z$ ifadesi uyarınca değişmektedir. Radyal hız bileşeni u_r için z = 0 ile z = L arasında bir ifade elde ediniz. Bu akış alanına karşılık gelen akım fonksiyonu için de bir ifade elde ediniz. Çeperlerdeki sürtünme etkilerini göz ardı edebilirsiniz.



Kabuller: Akış sıkıştırılamaz ve daimidir. Eksenel simetrik akış olduğu için $u_\theta = 0$
Çözüm: Sıkıştırılamaz akış için süreklilik denklemi:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial (u_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} = -r\frac{\partial (u_z)}{\partial z} = -r\frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L}$$

$$r u_r = -\frac{r^2}{2}\frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L} + f(z)$$

$$\boxed{u_r = -\frac{r}{2}\frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L}}$$

Akım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\psi = \int r u_z dr = \int r\left(u_{z,\text{entrance}} + \frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L} z\right) dr$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(u_{z,\text{entrance}} + \frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L} z\right) + f(z)$$

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{r}{2}\frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L} - \frac{1}{r} f'(z)$$

$$u_r = -\frac{r}{2}\frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L} - \frac{1}{r} f'(z) = -\frac{r}{2}\frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L} \qquad \text{or} \qquad f'(z) = 0$$

$$\boxed{\psi = \frac{r^2}{2}\left(u_{z,\text{entrance}} + \frac{u_{z,\text{exit}} - u_{z,\text{entrance}}}{L} z\right) + \text{constant}}$$

4. Kartezyen koordinatlarda $\vec{V}= (u, v, w) = (axy^2-b)\,\vec{i}-2cy^3\,\vec{j}+dxy\,\vec{k}$ ifadesi ile verilen daimi, 3-boyutlu hız alanını dikkate alınız. Burada a,b,c ve d sabitlerdir. Hangi şartlarda bu akış alanı sıkıştırılamaz olur?

Kabuller: Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.
Çözüm: Sıkıştırılamaz akış için süreklilik denklemi:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{ay^2} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-6cy^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0} = 0 \qquad ay^2 - 6cy^2 = 0$$

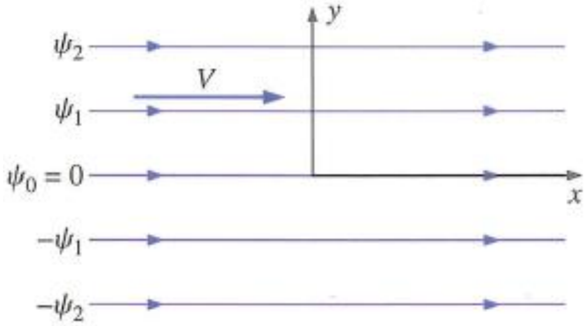
Soruda verilen akış alanının sıkıştırılamaz olması için: **a=6c**

5. Daimi ve sıkıştırılamaz bir akış alanına ait iki hız bileşeni, a, b ve c sabitler olmak üzere $u= ax + bxy + cy^2$ ve $v= axz - byz^2$ şeklindedir. Eksik olan hız bileşeni w için x, y ve z'nin fonksiyonu alan bir ifade elde ediniz.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a+by} - \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-bz^2} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -a - by + bz^2$$

$$\boxed{w = -az - byz + \frac{bz^3}{3} + f(x,y)}$$

6. Üniform akım olarak bilinen daimi, iki-boyutlu sıkıştırılamaz bir akış alanını dikkate alınız. Akışkan hızı her yerde V ve akış x-eksenine paraleldir. Kartezyen hız bileşenleri u=V ve v=0 olduğuna göre bu akışa ait akım fonksiyonu için bir ifade elde ediniz. V=6.94 m/s olduğunu kabul ediniz. y=0.5 m'deki yatay çizgi ψ_2 ve x-ekseni boyunca ψ sıfır olduğuna göre, birim genişlik başına (şekilde sayfa düzleminin içine doğru) bu iki akım çizgisi arasından geçen hacimsel debiyi hesaplayınız.



Kabuller: Akış daimi, sıkıştırılamaz, xy-düzleminde 2- boyutludur.
Çözüm: Akım fonksiyonunun tanımı ile çözüme başlanır:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u = V$$

$$\psi = Vy + g(x)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -g'(x)$$

$$v = 0 = -g'(x) \qquad g'(x) = 0 \qquad g(x) = C$$

$$\boxed{\psi = Vy + C}$$

y =0'da ψ=0 olduğundan C sıfır olur. y=0.5 m'deki akım çizgisi ψ_2 ise şu şekilde hesaplanır:

$$\psi_2 = \left(6.94\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\times(0.5\ \text{m}) = 3.47\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

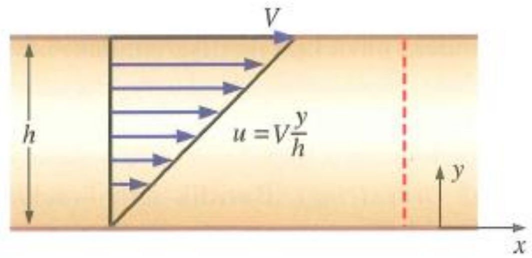
ψ_2 ve ψ_0 akım çizgileri arasındaki birim genişlik başına hacimsel debi şu şekilde hesaplanır:

$$\frac{\dot{V}}{W} = \psi_2 - \psi_0 = (3.47-0)\frac{\text{m}^2}{\text{s}} = \mathbf{3.47}\frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{s}}$$

Hacimsel debinin hız ve kesit alanının çarpımı olduğundan yola çıkılarak, birim genişlik başına hacimsel debi şu şekilde de hesaplanabilir:

$$\frac{\dot{V}}{W} = V(y_2 - y_0) = 6.94\frac{\text{m}}{\text{s}}\times(0.5-0)\ \text{m} = \mathbf{3.47}\frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{s}}$$

7. Şekilde gösterildiği gibi aralarında h mesafesi bulunan üstteki hareketli, alttaki ise sabit iki sonsuz levha arasındaki tam gelişmiş Couette akışını dikkate alınız. Akış xy-düzleminde daimi, sıkıştırılamaz ve 2- boyutludur. Hız alanı $\vec{V}$= (u, v) = (Vy/h)$\vec{i}$+0$\vec{j}$ şeklinde verilmiştir. Şekilde gösterilen düşey kesikli çizgi boyunca olan akım fonksiyonu ψ için bir ifade elde ediniz. Uygunluk bakımından kanalın alt çeperi boyunca ψ=0 alınız. Üst çeper boyunca ψ'nin değeri nedir?



Kabuller: Akış daimi, sıkıştırılamaz, xy-düzleminde 2- boyutlu ve tam gelişmiştir.
Çözüm: Akım fonksiyonunun tanımı ile çözüme başlanır:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = \frac{V}{h} y$$

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2 + g(x)$$

Ardından akım fonksiyonunun diğer bileşeni için aynı işlemler yapılır:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -g'(x)$$

$$v = 0 = -g'(x) \qquad g'(x) = 0 \qquad g(x) = C$$

Bu soruda akım fonksiyonunun genel hali:

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2 + C$$

Soruda kanalın alt çeperi boyunca (y=0) ψ=0 alınması istendiğinden, akım fonksiyonu:

$$\boxed{\psi = \frac{V}{2h} y^2}$$

Üst çeper boyunca (y=h) ψ'nin değeri:

$$\boxed{\psi_{top} = \frac{V}{2h} h^2 = \frac{Vh}{2}}$$

8. xy-düzleminde daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz bir akış alanı; a, b, c ve d sabitler olmak üzere ψ = ax^2 –by^2 +cx +dxy ile verilen bir akım fonksiyonuna sahiptir. (a) Hız bileşenleri u ve v için ifadeler elde ediniz. (b) Bu akış alanının sıkıştırılamaz süreklilik denklemini sağladığını gösteriniz.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2by + dx \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2ax - c - dy$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{d} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-d} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0} = 0$$

9. $\vec{V}$= (u, v) = (ax+b) $\vec{i}$+ (-ay+c) $\vec{j}$ ile verilen daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılamaz hız alanını dikkate alınız. Burada a, b ve c sabitlerdir. Basıncı x ve y'nin fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Kabuller: Akış daimi, sıkıştırılamaz, xy-düzleminde 2- boyutludur. Yer çekiminin x ve y düzlemlerine etkisi yoktur.

Çözüm: Akış daimi, 2- boyutlu, sıkıştırılamaz süreklilik ve momentum denklemlerini sağlamalıdır. Her iki denklem için kontroller yapılacaktır. İlk önce süreklilik ile başlanmıştır:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a}+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-a}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0\text{ (2-D)}}=0$$

Süreklilik sağlanmıştır. Navier-Stokes denkleminin x bileşenine bakılırsa:

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{0\text{ (steady)}}+\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{(ax+b)a}+\underbrace{v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}}_{(-ay+c)0}+\underbrace{\cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}}_{0\text{ (2-D)}}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\underbrace{\cancel{\rho g_x}}_{0}+\mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}_{0\text{ (2-D)}}\right)$$

Denklem aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\rho\left(-a^2x-ab\right)$$

Aynı işlemler y bileşeni için de yapılırsa:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\rho\left(-a^2y+ac\right)$$

P(x,y) basınç alanı x ve y'nin fonksiyonu olmalıdır. Bunun için önce x'e sonra y'ye göre türev ile önce y sonra x'e göre türevin eşit olması gerekir. Bunu kontrol etmek için çapraz türevlere (cross-differentiation) bakılır.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)=0$$

Her iki ifade eşit olduğu için, P(x,y) basınç alanı x ve y'nin fonksiyonudur ve basınç alanı hesaplanabilir:

x denkleminden basınç alanı: $$P(x,y)=\rho\left(-\frac{a^2x^2}{2}-abx\right)+g(y)$$

y'ye göre türev alınırsa:

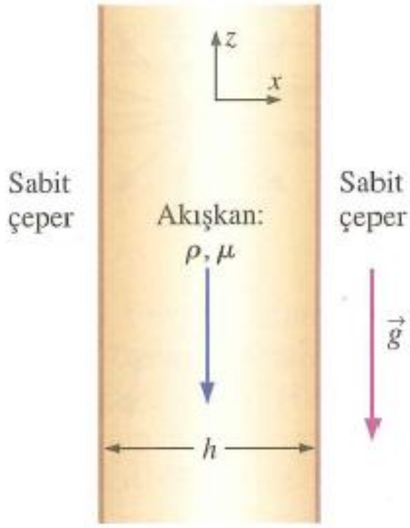
$$\frac{\partial P}{\partial y}=g'(y)=\rho\left(-a^2y+ac\right)$$

$$g(y)=\rho\left(-\frac{a^2y^2}{2}+acy\right)+C$$

P(x,y) basınç alanı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\boxed{P(x,y)=\rho\left(-\frac{a^2x^2}{2}-\frac{a^2y^2}{2}-abx+acy\right)+C}$$

10. İki sonsuz düşey çeper arasından aşağı akan viskoz bir akışkanın daimi, sıkıştırılamaz, paralel, laminer akışını dikkate alınız. Çeperler arasındaki mesafe h olup, yerçekimi negatif z-yönünde (şekilde aşağı doğru) etkimektedir. Akışa bir basınç gradyeni etkimemektedir, yani akışkan yalnızca yerçekiminden dolayı aşağı doğru hareket etmektedir. Akış alanındaki her noktada basınç sabittir. Hız alanını hesaplayınız ve uygun boyutsuz değişkenler kullanarak hız profilini çiziniz.



Kabuller:

i. Duvarlar y-z düzleminde sonsuzdur (y'nin yönü sayfa içine doğrudur.)
ii. Akış daimidir.
iii. Akış paraleldir. (Hızın x bileşeni olan u, her yerde sıfırdır.)
iv. Akışkan sıkıştırılamaz ve Newton tipi akışkandır. Akış laminerdir.
v. Basınç her yerde aynıdır. Yani, akışa uygulanan herhangi bir basınç gradyeni yoktur.
vi. Hız alanı 2-boyutludur. Yani, v=0 ve y'nin tüm türevleri sıfırdır.
vii. Yerçekimi negatif z-yönünde etkimektedir. Yani, $\vec{g} = -g\,\vec{k}$, $g_x = g_y = 0$ ve $g_z = -g$

Çözüm: Aşağıdaki adımları takip ederek hız ve basınç alanları elde edilir.
Adım 1: Problemi ve geometriyi kurmak.
Adım 2: Kabulleri ve sınır şartlarını belirlemek. 7 tane kabul belirlendi. Sınır şartları duvarlardaki kaymama koşulundan (no-slip) gelmektedir. **(1)** x=-h/2'de u=v=w=0. **(2)** x=h/2'de u=v=w=0
Adım 3: Diferansiyel denklemleri yazmak ve sadeleştirmek. Kartezyen koordinatlarda süreklilik denklemi ile başlıyoruz,

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\text{Assumption 3}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}_{\text{Assumption 6}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

w; z'nin fonksiyonu değildir. Yani, orijini nereye koyarsak koyalım akış herhangi bir z konumunda aynıdır. Yani, akış tam gelişmiştir. w zamanın da bir fonksiyonu değildir (2. Kabul), y'nin de bir fonksiyonu değildir (6. Kabul). Sonuç olarak, w en fazla x'in fonksiyonudur. Süreklilik denkleminden varılan sonuç: **<u>w=w(x)</u>**

Şimdi de mümkün olduğunca Navier-Stokes denkleminin her bir bileşeni sadeleştirilir. Her yerde u=v=0 olduğu için ve yerçekimi x veya y yönünde etkimediği için x ve y momentum denklemleri tam olarak sağlanır (aslında her iki denklemde de tüm terimler sıfırdır). z momentum denklemi aşağıdaki gibi sadeleşir:

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}}_{\text{Assumption 2}} + \underbrace{u\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}}_{\text{Assumption 3}} + \underbrace{v\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}}_{\text{Assumption 6}} + \underbrace{w\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{\text{Continuity}}\right) = \underbrace{-\cancel{\frac{\partial P}{\partial z}}}_{\text{Assumption 5}} + \underbrace{\rho g_z}_{-\rho g}$$

$$+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}}_{\text{Assumption 6}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}}_{\text{continuity}}\right) \quad \text{or} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu}$$

<u>w=w(x)</u> olduğu için kısmi türev işareti toplam türev işareti ile değiştirildi. Böylece kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü.

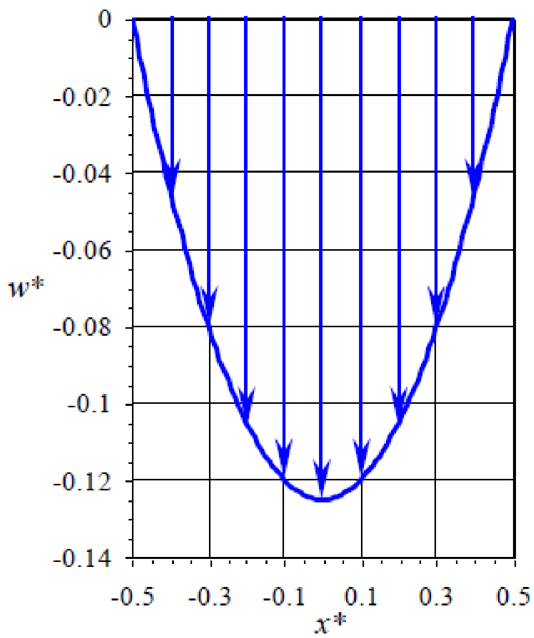
Adım 4: Diferansiyel denklemler çözülür. Süreklilik denklemi ve x ve y momentum denklemi çözüldü. z momentum denklemi iki kere entegre edilirse:

$$w = \frac{\rho g}{2\mu}x^2 + C_1 x + C_2$$

Adım 5: C_1 ve C_2 ‘nin bulunabilmesi için sınır şartları uygulanır. Sırasıyla 1. ve 2. sınır şartları uygulandığında:

$$0 = \frac{\rho g}{8\mu}h^2 - C_1\frac{h}{2} + C_2$$

$$0 = \frac{\rho g}{8\mu}h^2 + C_1\frac{h}{2} + C_2$$



Yukarıdaki 2 denklem çözülürse:

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = \frac{-\rho g}{8\mu}h^2$$

Hız alanı aşağıdaki gibidir:

$$w = \frac{\rho g}{2\mu}\left(x^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)$$

$-h/2<x<h/2$ olduğundan dolayı, w her yerde negatif olur (akış aşağı doğru olduğu için bu sonuç beklenmektedir)

Adım 6: Sonuçlar doğrulanır. Diferansiyel denklemler ve sınır koşullarının sağlandığını görmek için çözüm yapılır.

Hız alanında x*=x/h ve w*=wμ/(ρgh^2) olmak üzere boyutsuzlaştırma yapılırsa, boyutsuz hız profili aşağıdaki hale gelir:

$$\boxed{w^* = \frac{1}{2}\left(\left(x^*\right)^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

Ayrıca, boyutsuz hız profilinin çizimi yukarıdaki grafikte verilmiştir.