

Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları

3. Baskıdan Çeviri

Yunus A. Cengel, John M. Cimbala

McGraw-Hill, 2014

Bölüm 7

BOYUT ANALİZİ ve MODELLEME

Lecture slides by

Hasan GÜNEŞ



Amerikan Deniz Kuvvetlerine ait Arleigh Burke sınıfı bir destroyerin 1:46.6 ölçekli modelinin, Iowa Üniversitesi'nde bulunan 100 m uzunluğundaki model gemi deney tankındaki testi. Model uzunluğu 3.05 m'dir. Bu testlerde Froude sayısı en önemli boyutsuz parametredir.

Öğrenim Amaçları

- Boyutlar, birimler ve denklemlerdeki boyutsal homojenliği kavramış olmalıdır
- Boyut analizinin yararlarını öğrenmiş olmalıdır
- Tekrarlayan değişkenler yöntemini kullanarak boyutsuz parametreleri tespit edebilmelidir
- Dinamik benzerlik kavramını ve deneysel modellemede uygulanmasını öğrenmiş olmalıdır

7-1 ■ BOYUTLAR VE BİRİMLER

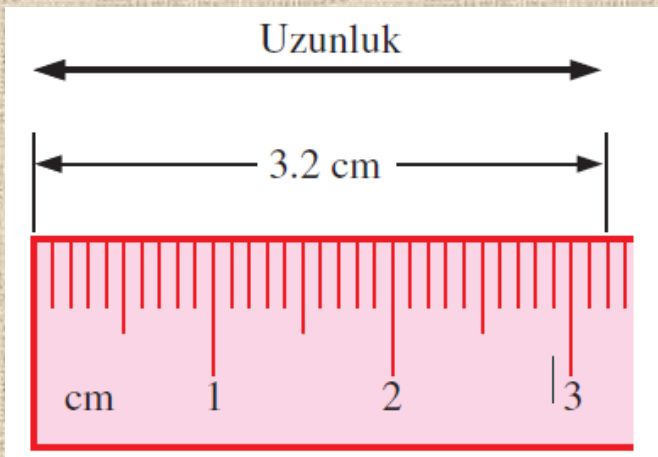
Boyut: Sayısal değer olmaksızın fiziksel miktarın bir ölçüsüdür.

Birim: Boyuta sayı atama işlemidir.

Kütle, uzunluk, zaman, sıcaklık, elektrik akımı, ışık miktarı ve madde miktarı olmak üzere yedi ana boyut vardır. **Ana boyutlar, temel** veya **esas boyutlar** olarak da adlandırılmaktadır.

Ana boyutların dışında kalan tüm boyutlar yedi ana boyutun bir birleşimi ile oluşturulabilir.

$$\text{Kuvvetin boyutları} : \{ \text{Kuvvet} \} = \left\{ \text{Kütle} \frac{\text{Uzunluk}}{\text{Zaman}^2} \right\} = \{ \text{mL/t}^2 \}$$



Boyut sayısal değer olmaksızın fiziksel bir miktarın ölçüsüdür. **Birim** ise boyuta sayı atama işlemidir. Örneğin “uzunluk” bir boyuttur fakat santimetre bir birimdir.

Ana boyutlar ve ilgili temel SI ve İngiliz birimleri

Boyut	Sembol*	SI Birimi	İngiliz birimi
Kütle	m	kg (kilogram)	lbm (pound-kütle)
Uzunluk	L	m (metre)	ft (foot)
Zaman†	t	s (saniye)	s (saniye)
Sıcaklık	T	K (kelvin)	R (rankin)
Elektrik akımı	I	A (amper)	A (amper)
Işık miktarı	C	cd (kandela)	cd (kandela)
Madde miktarı	N	mol (mol)	mol (mol)

ÖRNEK 7-1 Yüzey Geriliminin Ana Boyutları

Bir mühendis bazı böceklerin suda nasıl yürüyebildiklerini araştırmaktadır (Şekil 7-2). Bu problemdeki önemli bir akışkan özelliği, boyutları birim uzunluk başına kuvvet olan yüzey gerilimidir (σ_s). Yüzey gerilimin boyutlarını ana boyutlar cinsinden yazınız.

ÇÖZÜM Yüzey geriliminin ana boyutları belirlenecektir.

Analiz Denklem 7-1'den kuvvetin boyutları kütle ile ivmenin çarpımıdır $\{mL/t^2\}$. Böylece

$$\text{Yüzey geriliminin boyutları: } \{\sigma_s\} = \left\{ \frac{\text{Kuvvet}}{\text{Uzunluk}} \right\} = \left\{ \frac{m \cdot L/t^2}{L} \right\} = \{m/t^2\} \quad (1)$$

elde edilir.

İrdeleme Bir değişken veya sabitin boyutlarını ana boyutlar cinsinden göstermenin faydası tekrarlayan değişkenler yönteminin ele alınacağı Kısım 7-4'te daha anlaşılır hale gelecektir.



Suda yürüyen böcek bunu yüzey gerilimini kullanarak yapabilmektedir.

7-2 ■ BOYUTSAL HOMOJENLİK

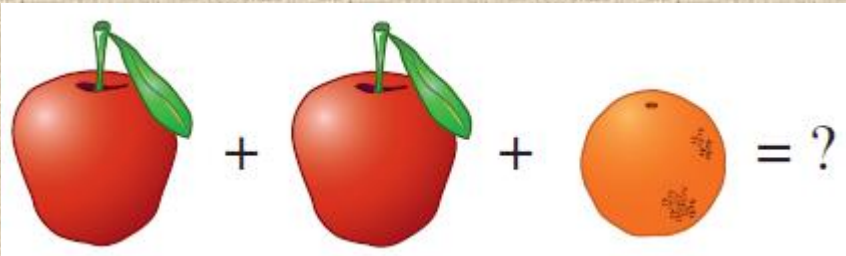
Boyutsal homojenlik yasası: Bir denklemde toplanan bütün terimlerin boyutları aynı olmalıdır.

Sistemdeki toplam enerji değişimi : $\Delta E = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE$

$$\Delta U = m(u_2 - u_1)$$

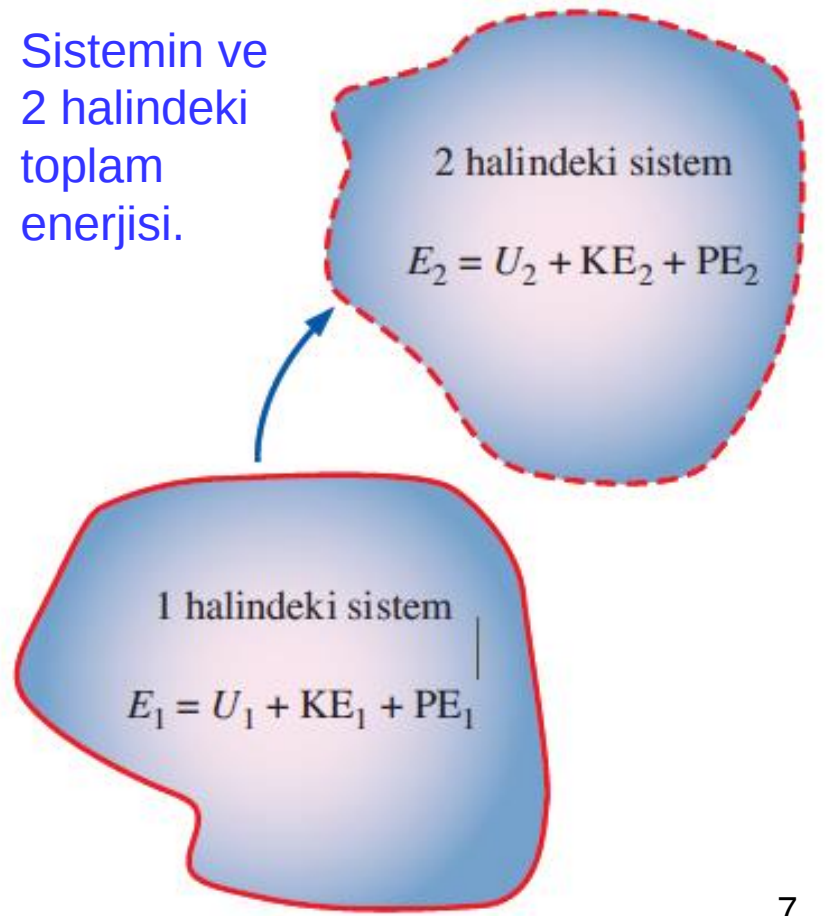
$$\Delta KE = \frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2)$$

$$\Delta PE = mg(z_2 - z_1)$$



Elmalarla armutlar toplanmaz !

Sistemin ve 2 halindeki toplam enerjisi.



$$\{\Delta E\} = \{\text{Enerji}\} = \{\text{Kuvvet} \cdot \text{Uzunluk}\} \rightarrow \{\Delta E\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta U\} = \left\{ \text{Kütle} \frac{\text{Enerji}}{\text{Kütle}} \right\} = \{\text{Enerji}\} \rightarrow \{\Delta U\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta KE\} = \left\{ \text{Kütle} \frac{\text{Uzunluk}^2}{\text{Zaman}^2} \right\} \rightarrow \{\Delta KE\} = \{mL^2/t^2\}$$

$$\{\Delta PE\} = \left\{ \text{Kütle} \frac{\text{Uzunluk}}{\text{Zaman}^2} \text{Uzunluk} \right\} \rightarrow \{\Delta PE\} = \{mL^2/t^2\}$$

UYARI!

**HOMOJEN OLMAYAN
DENKLEMLERE
DİKKAT EDİNİZ**

Boyutsal homojen olmayan bir denklem kesinlikle hata yapıldığının işaretidir.

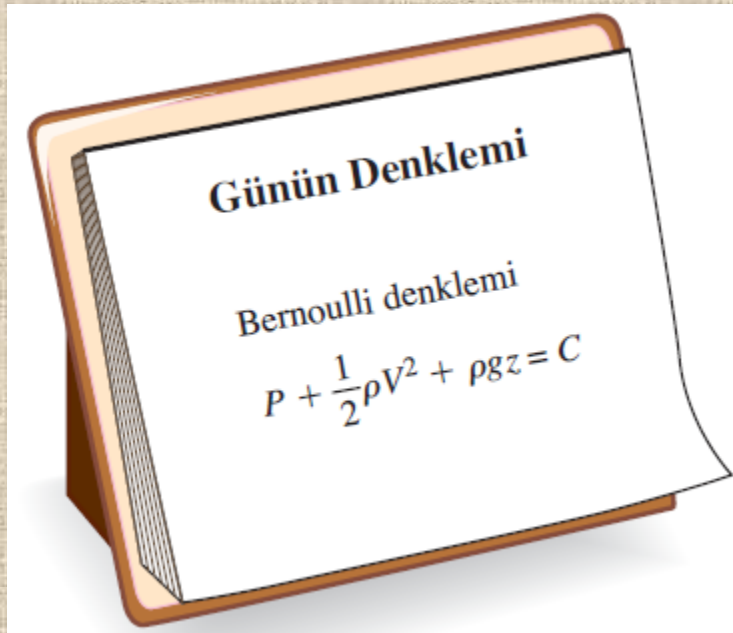
ÖRNEK 7-2

Bernoulli Denkleminin Boyutsal Homojenliği

Akışkanlar mekaniğinde muhtemelen en iyi bilinen (aynı zamanda en fazla yanlış kullanılan) denklem, Bölüm 5'te anlatılan Bernoulli denklemidir (Şekil 7-6). Sıkıştırılamaz dönümsüz akışlar için Bernoulli denkleminin standart bir biçimi şöyledir:

Bernoulli denklemi:
$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C \quad (1)$$

(a) Bernoulli denkleminde toplam halinde olan her bir terimin aynı boyutta olduğunu gösteriniz. (b) C sabitinin boyutları nelerdir?



Bernoulli denklemi *boyutsal* olarak *homojen* olan bir denkleme iyi bir örnektir. Sabit dahil toplanan tüm terimlerin boyutları aynı olup, hepsi basınç boyutundadır. Ana boyutlar cinsinden her bir terimin boyutu $\{m/(t^2L)\}$ dir.

ÇÖZÜM Denklem 1'de toplam halinde olan her bir terimin ana boyutlarının aynı olduğunu göstereceğiz ve C sabitinin boyutlarını belirleyeceğiz.

Analiz (a) Her bir terim ana boyutlar cinsinden yazılır:

$$\{P\} = \{\text{Basınç}\} = \left\{ \frac{\text{Kuvvet}}{\text{Alan}} \right\} = \left\{ \text{Kütle} \frac{\text{Uzunluk}}{\text{Zaman}^2} \frac{1}{\text{Uzunluk}^2} \right\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \rho V^2 \right\} = \left\{ \frac{\text{Kütle}}{\text{Hacim}} \left(\frac{\text{Uzunluk}}{\text{Zaman}} \right)^2 \right\} = \left\{ \frac{\text{Kütle} \times \text{Uzunluk}^2}{\text{Uzunluk}^3 \times \text{Zaman}^2} \right\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$$

$$\{\rho g z\} = \left\{ \frac{\text{Kütle}}{\text{Hacim}} \frac{\text{Uzunluk}}{\text{Zaman}^2} \text{Uzunluk} \right\} = \left\{ \frac{\text{Kütle} \times \text{Uzunluk}^2}{\text{Uzunluk}^3 \times \text{Zaman}^2} \right\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$$

Gerçekten de **toplam halinde olan terimlerin üçü de aynı boyuttur.**

(b) Boyutsal homojenlik yasası gereği sabit, denklemde toplam halinde olan diğer terimlerle aynı boyutta olmalıdır. Böylece sabitin boyutları aşağıdaki gibi olur:

Bernoulli sabitinin ana boyutları: $\{C\} = \left\{ \frac{\text{m}}{\text{t}^2\text{L}} \right\}$

İrdeleme Eğer terimlerden birisinin bile boyutu diğerlerinin boyutundan farklı ise analizde bir yanlışlık yapılmış demektir.

Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Boyutsuz denklem: Denklemdaki her bir terim, çarpımları denklemdaki terimlerle aynı boyuta sahip bir değişken ve sabitler grubu ile bölünürse denklem **boyutsuz** hale getirilmiş olur.

Normalleştirilmiş denklem: Eğer denklemdaki boyutsuz terimlerin büyüklüğü 1 mertebesinde ise denklem **normalleştirilmiş** olur.

Boyutsuzlaştırılmış bir denklemdaki her bir terim boyutsuzdur.

Boyutsuz parametreler: Hareket denklemini boyutsuzlaştırdığımızda adını önemli bir bilim insanı veya mühendisten alan birçok **boyutsuz parameter** ile karşılaşırız. (örneğin the Reynolds sayısı, Froude sayısı vb.).

Denklemleri boyutsuzlaştırma işlemi bazı yazarlar tarafından **denetlemeli analiz** olarak adlandırılır.

Boyutsuzlaştırılmış Bernoulli denklemi

$$\frac{P}{P_{\infty}} + \frac{\rho V^2}{2P_{\infty}} + \frac{\rho g z}{P_{\infty}} = \frac{C}{P_{\infty}}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{1\} \end{array}$$

Bernoulli denkleminin *boyutsuzlaştırılmış* bir şekli, toplam halinde bulunan her bir terimin basınca (burada P_{∞} kullanıyoruz) bölünmesiyle bulunur. Ortaya çıkan her bir terim *boyutsuzdur* (boyutu {1}'dir).

Hareket denklemi:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Boyutlu sonuç: $z = z_0 + w_0t - \frac{1}{2}gt^2$

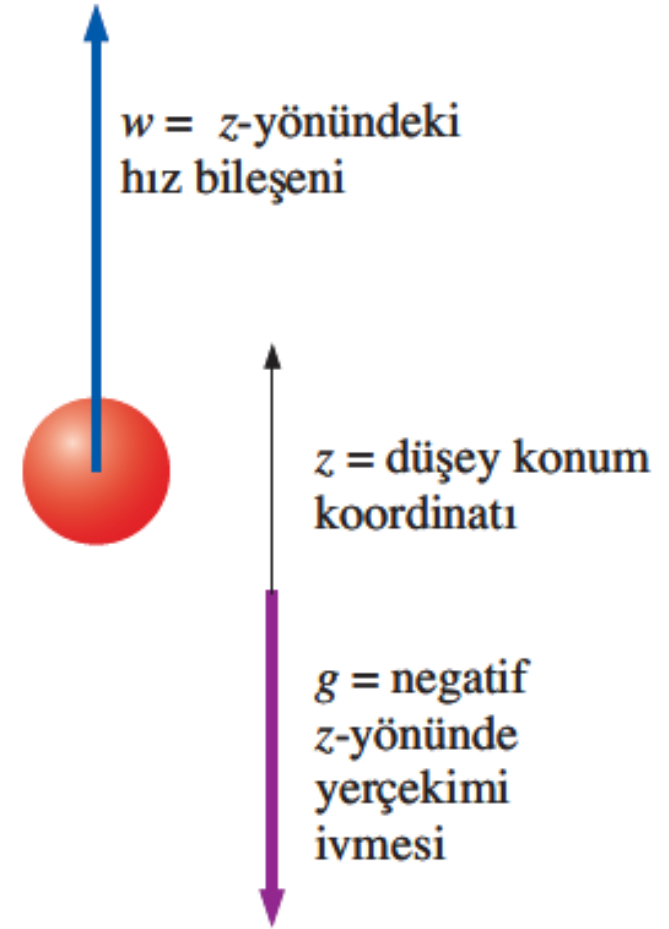
Boyutlu değişkenler: bir problemde değişen boyutlu niceliklerdir. **Örnekler:** z (uzunluk boyutu) ve t (zaman boyutu).

Boyutsuz değişkenler: Bir problemde değişen fakat boyutu olmayan nicelikler olarak tanımlanır. **Örnek:** Derece veya radian cinsinden ölçülen dönme açısı .

Boyutlu sabit: Yerçekimi ivmesi sabiti g , boyutlu olmakla birlikte sabit kalır.

Parametre: Problemdeki boyutlu değişkenler, boyutsuz değişkenler ve boyutlu sabitlerin birleşik grubu için parameter terimi kullanılır.

Saf sabit: Denklemdaki $1/2$ sabiti ve 2 üssü. Saf sabitlere diğer yaygın örnekler π ve e 'dir.



Boşlukta düşen bir cisim. Düşey hız yukarı doğru pozitif yönde çizildiği için düşen bir cisim için $w < 0$ olur.

Bir denklemi boyutsuzlaştırmak için, asıl denklemde bulunan ana boyutlara dayanan **ölçeklendirme parametreleri** ni seçmemiz gerekir.

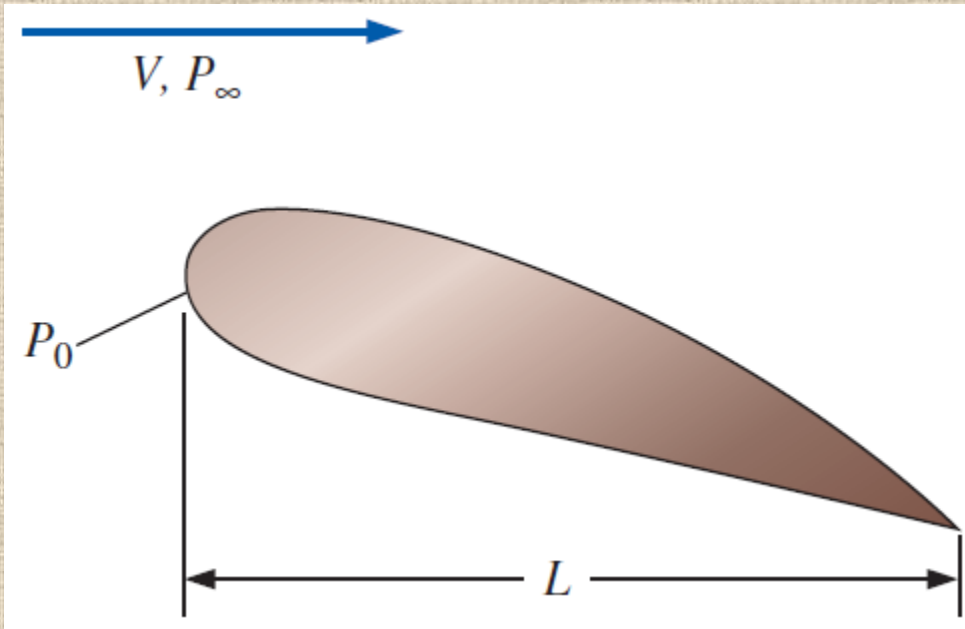
Tüm parametrelerin ana boyutları:

$$\{z\} = \{L\} \quad \{t\} = \{t\} \quad \{z_0\} = \{L\} \quad \{w_0\} = \{L/t\} \quad \{g\} = \{L/t^2\}$$

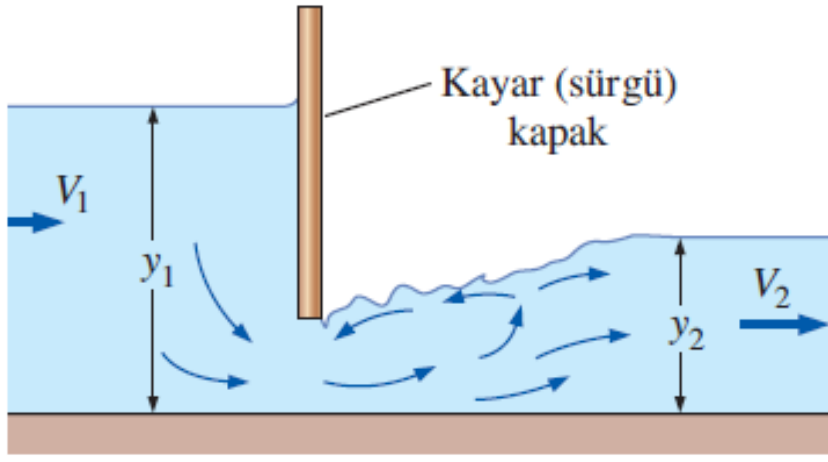
Boyutsuzlaştırılmış değişkenler:

$$z^* = \frac{z}{z_0} \quad t^* = \frac{w_0 t}{z_0}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2(z_0 z^*)}{d(z_0 t^*/w_0)^2} = \frac{w_0^2}{z_0} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -g \quad \rightarrow \quad \frac{w_0^2}{gz_0} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -1 \quad \text{Fr} = \frac{w_0}{\sqrt{gz_0}} \quad \text{Froude sayısı}$$



Akışkanlar mekaniği problemlerinde **ölçeklendirme parametreleri** genellikle karakteristik uzunluk L , karakteristik hız V , ve referans basınç farkı $P_0 - P_\infty$ 'yi içerir. Bunun yanında yoğunluk, viskozite ve yerçekimi ivmesi gibi diğer parametreler ve akışkan özelliklerinin de problemlere dahil olduğu olur.



Froude sayısı açık kanallarda ve diğer serbest yüzeyli akışlarda önemlidir. Burada bir kayar (sürgü) kapaktan geçen akış gösterilmiştir. Kapağın yukarıakım bölgesindeki Froude sayısı $Fr_1 = V_1 / \sqrt{gy_1}$ aşağıakım bölgesindeki ise $Fr_2 = V_2 / \sqrt{gy_2}$ 'dir.

Boyutsuzlaştırılmış hareket denklemi:

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{Fr^2}$$

Boyutsuz sonuç:

$$z^* = 1 + t^* - \frac{1}{2Fr^2} t^{*2}$$

Problemdeki önemli parametreler arasındaki ilişkiler tespit edilir.

Boyutsuzlaştırılmış denklemdeki parametre sayısı, asıl denklemdeki parametre sayısından daha azdır.

Bir denklemi boyutsuzlaştırmanın iki temel yararı.

ÖRNEK 7-3 Boyutsuzlaştırmanın Yararları

Küçük erkek kardeşiniz ve arkadaşları lisedeki fizik dersinde içi vakum şartlarında tutulan büyük düşey bir boru kullanarak deney yapıyorlar. Öğrenciler çelik bir bilyeyi uzaktan kumanda ile boru içine bırakabiliyorlar. Bilyenin başlangıçta bırakılma yüksekliği z_0 , 0 ile 15 m arasında (yükseklik borunun alt kısmından itibaren ölçülmektedir) ve başlangıçtaki düşey hızı ise w_0 , 0 ile 10 m/s arasında değiştirilebilmektedir. Öğrenciler boru boyunca yerleştirilen fotosensör ağına bağlı bilgisayar yardımı ile çelik bilyenin yörüngesini (z yüksekliğini t zamanının fonksiyonu olarak) her bir test için grafik üzerine aktarabilmektedirler. Öğrenciler boyut analizi veya boyutsuzlaştırma tekniklerine yabancı olduklarından, yörüngenin z_0 ve w_0 başlangıç şartlarından nasıl etkilendiğini bulmak için birkaç tane “acemice” deney yapıyorlar. İlk önce w_0 'ı 4 m/s'de sabit tutup, 5 değişik z_0 değeri: 3, 6, 9, 12 ve 15 m için deney yapıyorlar. Deney sonuçları Şekil 7-12a'da gösterilmiştir. Sonra da, z_0 'ı 10 m'de sabit tutarak ve 5 değişik w_0 değeri 2, 4, 6, 8 ve 10 m/s için deneyler yapıyorlar. Bu sonuçlar Şekil 7-2b'de gösterilmiştir. O akşam erkek kardeşiniz verileri ve yörünge grafiklerini size gösterir ve yarın farklı z_0 ve w_0 değerleri için deneylere devam edeceklerini söyler. Siz de önce verileri boyutsuzlaştırarak problemin sadece *bir* parametreye indirgenebileceğini ve daha fazla deney yapmaya gerek olmadığını açıklıyorsunuz. Görüşünüzü ispatlamak için boyutsuz bir grafik çizin ve tartışınız.

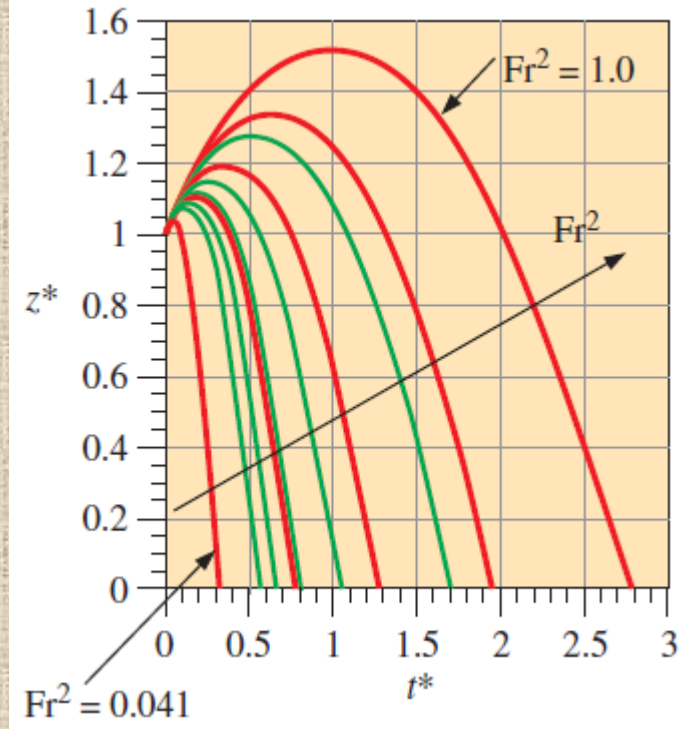
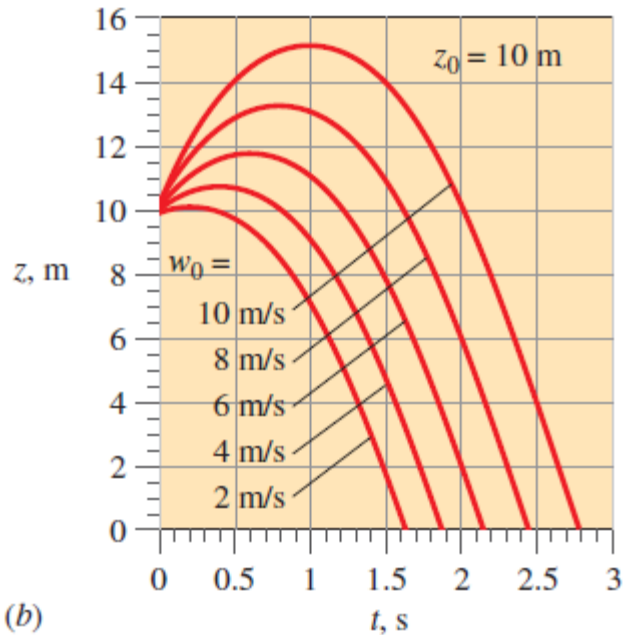
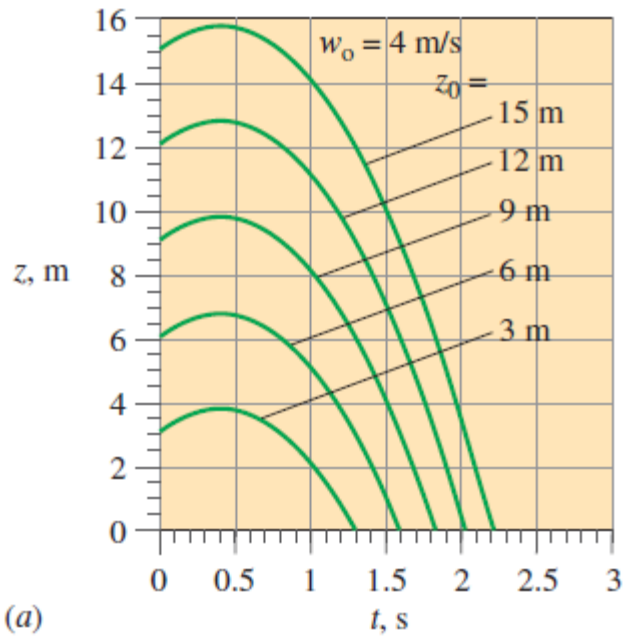
ÇÖZÜM Mevcut tüm yörünge verilerinden boyutsuz bir grafik çizilecektir. Bu amaçla z^* 'ı, t^* 'ın fonksiyonu olarak çizeceğiz.

Kabuller Boru içi, bilye üzerindeki aerodinamik direnç ihmal edilebilecek düzeyde vakum altında tutulmaktadır.

Özellikler Yerçekimi ivmesi sabiti 9.81 m/s²'dir.

Analiz Bu problem için boyutsuzlaştırılmış biçimi Denklem 7-9 ile verilen Denklem 7-4 geçerlidir. Daha önce açıklandığı gibi bu problemdeki boyutlu parametre üç (g , z_0 ve w_0) boyutsuz *bir* parametre (Froude sayısı) altında birleştirilir. Şekil 7-12a ve b'de gösterilen 10 adet yörünge, Denklem 7-6'nın boyutsuz değişkenleri haline dönüştürüldükten sonra boyutsuz olarak Şekil 7-13'te tekrar çizilmiştir. Bütün yörüngelerin aynı aileden olduğu ve geriye kalan tek parametrenin Froude sayısı olduğu açıkça görülmektedir. Bu deneylerde Fr^2 değeri, yaklaşık olarak [0.041–1] arasında değişmektedir. Başka deneyler yapılacaksa, yukarıdaki aralığın dışında Fr sayısını verecek şekilde, z_0 ve w_0 kombinasyonlarının seçilmesi uygun olacaktır. Tüm yörüngeler Şekil 7-13'te çizildiği gibi aynı aileden oldukları için çok sayıda ilave deneye ihtiyaç bulunmamaktadır.

İrdeleme Düşük Froude sayılarında yerçekimi kuvvetleri atalet kuvvetlerinden çok daha büyüktür ve bilye zemine göreceli olarak daha kısa zamanda düşer. Yüksek Fr sayılarında ise önce atalet kuvvetleri baskın çıkar ve bilye, düşmeden önce önemli miktarda yükselir; yere çarpması çok daha uzun zaman alır. Doğal olarak öğrencilerin yerçekimi sabitini değiştirme imkanları yoktur. Eğer değiştirebilselerdi, g 'nin etkisini de görebilmek için fazladan birçok deney daha yapmaları gerekecekti. Eğer önce boyutsuzlaştırma yöntemini kullanırlarsa, Şekil 7-13'te gösterilen boyutsuz yörünge grafikleri *herhangi bir g değeri için geçerli olacak ve Fr 'nin deney değerlerinin dışında olduğu durumlar hariç daha fazla deneye gerek kalmayacaktır.*



Boşlukta düşen çelik bir bilyenin yörüngeleri. Şekil 7–12a ve b'deki veriler boyutsuzlaştırılmış ve bir grafik üzerinde birleştirilmiştir.

Boşlukta düşen çelik bilyenin yörüngeleri:
 (a) w_0 , 4 m/s'de sabit tutulmuş ve
 (b) z_0 , 10 m'de sabit tutulmuştur (Örnek 7–3).

ÖRNEK 7-4

Boyutsuz Verilerin Ekstrapolasyonu

Ay yüzeyindeki çekim sabiti, yeryüzünün çekim sabitinin yaklaşık olarak altıda biri kadardır. Ayda bulunan bir astronot elindeki topu ay yüzeyinin 2 m yukarısından, yatayla 5° açı yapacak şekilde 21.0 m/s'lik başlangıç hızıyla fırlatmaktadır (Şekil 7-14). (a) Şekil 7-13'te gösterilen Örnek 7-3'e ait boyutsuz verileri kullanarak topun zemine düşme süresini hesaplayınız. (b) Sonucu *analitik* olarak hesaplayınız ve (a) şıkkındaki sonuçla karşılaştırınız.

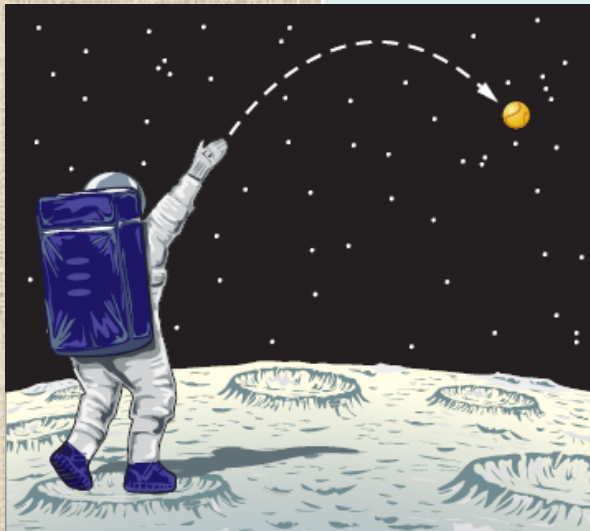
ÇÖZÜM Topun ay zeminine düşmesi için gereken süreyi hesaplamak için yeryüzünde elde edilen deneysel veriler kullanılacaktır.

Kabuller 1 Topun yatay hızı önemsizdir. 2 Astronotun etrafındaki ay yüzeyi tamamen düzdür. 3 Ayda atmosfer olmadığından top üzerine aerodinamik direnç etkimemektedir. 4 Ayın çekim ivmesi yeryüzündekinin altıda biridir.

Özellikler Ayın çekim sabiti $g_{ay} \cong 9.81/6 = 1.63 \text{ m/s}^2$ 'dir.

Analiz (a) g_{ay} değerine ve başlangıç hızının düşey bileşenine dayanarak Froude sayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$w_0 = (21.0 \text{ m/s}) \sin(5^\circ) = 1.830 \text{ m/s}$$



Bir topun ayda fırlatılışı

$$Fr^2 = \frac{w_0^2}{g_{ay} z_0} = \frac{(1.830 \text{ m/s})^2}{(1.63 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m})} = 1.03$$

Fr^2 'nin bu değeri Şekil 7–13'te verilen grafikteki en büyük değerle hemen hemen aynıdır. Şekil 7–13'ten belirleneceği üzere, boyutsuz değişkenler cinsinden, top zemine $t^* \cong 2.75$ 'te çarpar. Denklem 7–6'yı kullanarak boyutlu değişkenlere geçilirse,

Zemine çarpma için gereken süre:
$$t = \frac{t^* z_0}{w_0} = \frac{2.75(2.0 \text{ m})}{1.830 \text{ m/s}} = \mathbf{3.01 \text{ s}}$$

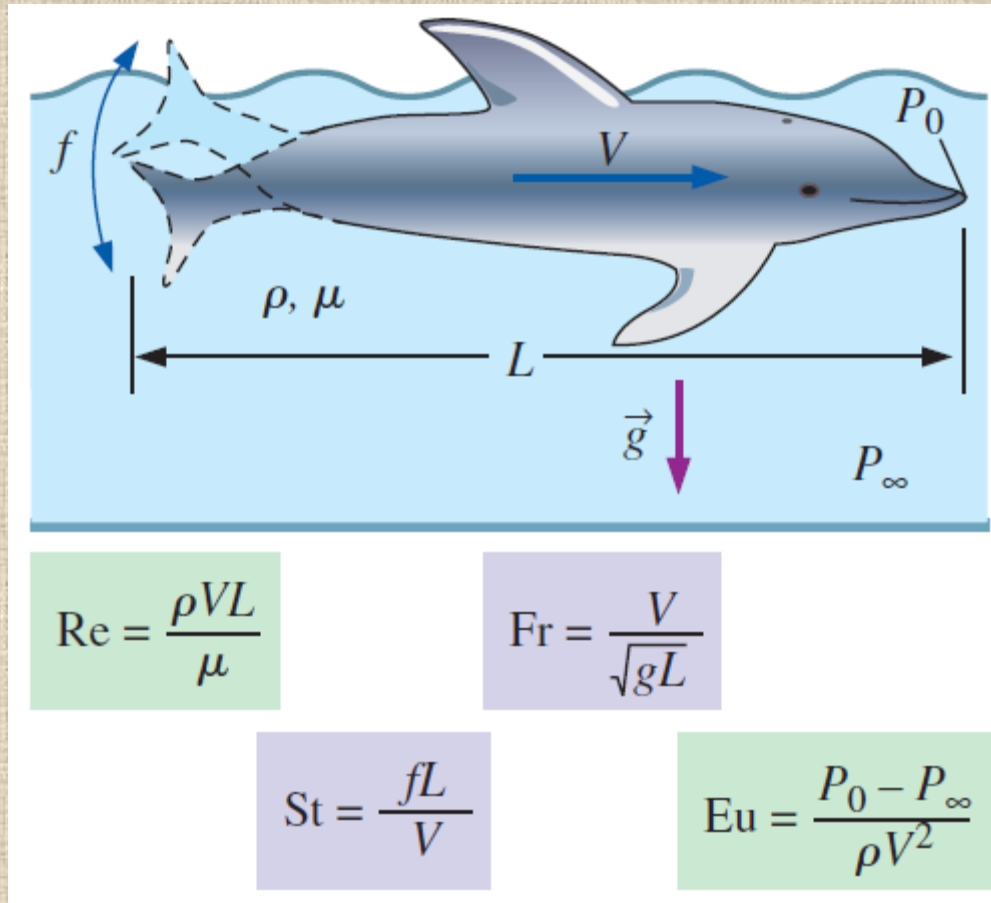
olarak bulunur.

(b) Analitik çözüm; Denklem 7–5'te z sıfıra eşitlenerek ve denklemden t çekilerek aşağıdaki gibi bulunur:

Zemine çarpma için gereken gerçek süre:

$$\begin{aligned} t &= \frac{w_0 + \sqrt{w_0^2 + 2z_0 g}}{g} \\ &= \frac{1.830 \text{ m/s} + \sqrt{(1.830 \text{ m/s})^2 + 2(2.0 \text{ m})(1.63 \text{ m/s}^2)}}{1.63 \text{ m/s}^2} = \mathbf{3.05 \text{ s}} \end{aligned}$$

İrdeleme Eğer Fr sayısı Şekil 7–13'teki yörüngelerden ikisinin arasında kalmış olsaydı, bu durumda interpolasyon yapmamız gerekirdi. Sayılardan bazıları yalnızca iki anlamlı basamağa göre verildiğinden, (a) ve (b) şıklarındaki sonuçlar arasındaki küçük fark önemsizdir. Nihai sonuç iki anlamlı basamağa göre $t = 3.0 \text{ s}$ 'dir.



Serbest yüzeye sahip zamana bağlı genel bir akış probleminde ölçeklendirme parametreleri: karakteristik uzunluk L , karakteristik hız V , karakteristik frekans f ve referans basınç farkı $P_0 - P_\infty$ olarak alınır. Akışa ait diferansiyel denklemlerin boyutsuzlaştırılması, ortaya dört boyutsuz parameter çıkarır: Reynolds sayısı, Froude sayısı, Strouhal sayısı ve Euler sayısı (bkz. Bölüm 10).

7-3 ■ BOYUT ANALİZİ VE BENZERLİK

Çoğu deneylerde zamandan ve paradan tasarruf etmek için testler tam ölçekli **prototip** yerine, geometrik olarak ölçeklendirilmiş bir **model** üzerinde gerçekleştirilir.

Böyle durumlarda sonuçları uygun bir şekilde ölçeklendirmek için özen göstermek gerekir. Burada güçlü bir teknik olan **boyut analizini** tanımlayacağız.

Boyut analizinin üç ana amacı aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Deney tasarlamak (fiziksel ve/veya sayısal) ve sonuçlarını raporlamak için yardımcı olacak boyutsuz parametreleri oluşturmak.
- Model performansından prototipin performansının kestirilebileceği ölçeklendirme yasalarını elde etmek.
- Parametreler arası ilişkilerdeki eğilimleri tahmin etmek.

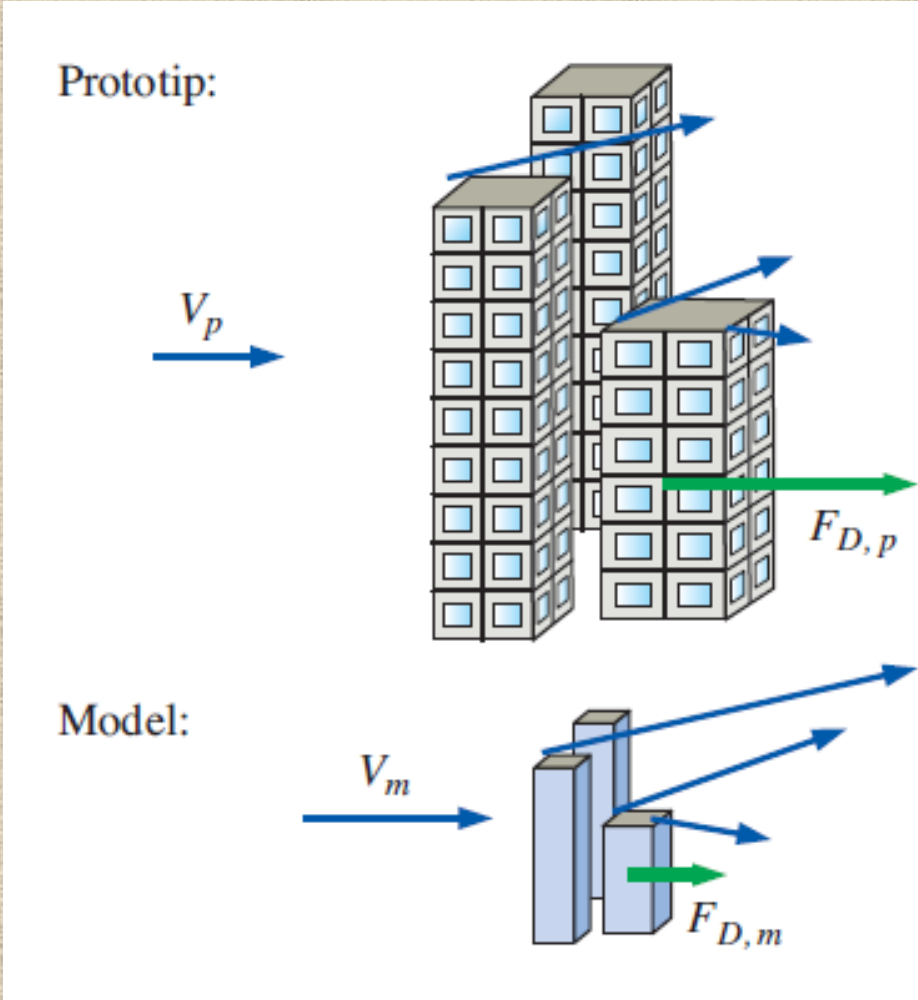
Benzerlik ilkesi

Bir model ve prototip arasında tam bir benzerlik olabilmesi için üç şart gereklidir.

(1) Geometrik benzerlik- model ve prototip ile aynı şekle sahip olmalı ve ölçeklendirme çarpanı olan bir sabitle ölçeklendirilebilmelidir.

(2) Kinematik benzerlik- model akışın herhangi bir noktasındaki hız, prototip akışta bu noktaya karşılık gelen noktadaki hız ile doğru (sabit ölçek çarpanı ile) orantılı olmalıdır.

(3) Dinamik benzerlik- Model akıştaki bütün *kuvvetler*, prototip akışta bunlara karşılık gelen kuvvetlerin sabit bir çarpanla ölçeklendirilmesi ile elde edildiğinde dinamik benzerliğe ulaşılmış olur (*kuvvet-ölçekli* denklik).



Model akıştaki hız vektörü, prototip akışta buna karşılık gelen yerdeki hız vektörü ile doğru orantılı ve aynı yönde olduğunda *kinematik benzerlik* sağlanmış olur.

Genel bir akış alanında model ve prototip arasında tam benzerlik ancak geometrik, kinematik ve dinamik benzerlikler sağlandığında elde edilir.

Yunan alfabesindeki büyük Pi harfi (Π) boyutsuz bir parametreyi gösterebilir.

Genel boyut analizi problemlerinde **bağımlı Π** diyeceğimiz ve Π_1 ile göstereceğimiz bir Π parametresi vardır.

Π_1 parametresi genelde diğer birkaç Π 'nin fonksiyonudur ve bunlara **bağımsız Π** 'ler denir.

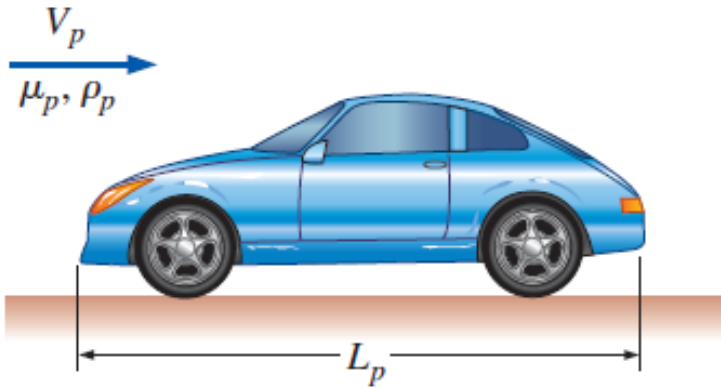
Π 'ler arasındaki fonksiyonel ilişki: $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_k)$

Tam benzerlik sağlamak için model ve prototip geometric olarak benzer olmalı ve tüm bağımsız Π grupları model ve prototipte birbirleriyle eşleşmelidir.

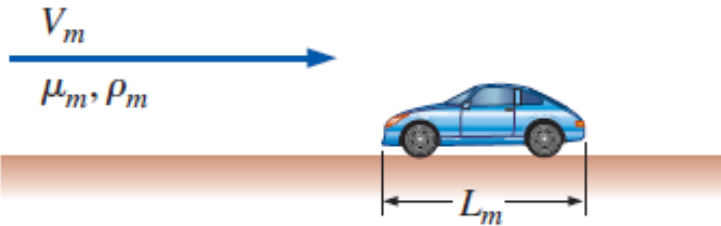
Benzerlik için

Eğer $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$ ve $\Pi_{3,m} = \Pi_{3,p} \dots$ ve $\Pi_{k,m} = \Pi_{k,p}$,
o halde $\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$ 'dir. (7-12)

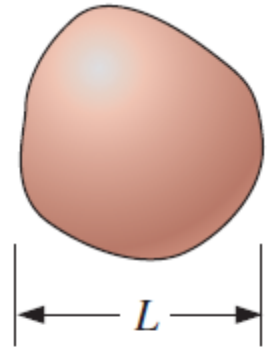
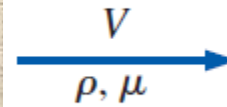
Prototip otomobil



Model otomobil



L_p uzunluğundaki prototip otomobil ile L_m uzunluğundaki model otomobil arasındaki *geometrik benzerlik*



$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

Reynolds sayısı Re ; yoğunluk, karakteristik hız ve karakteristik uzunluğun çarpımının dinamik viskoziteye oranıdır. Alternatif olarak karakteristik hız ve karakteristik uzunluğun çarpımının $\nu = \mu/\rho$ olarak tanımlanan *kinematik viskoziteye* oranıdır.

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \quad \text{burada} \quad \Pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \quad \text{ve} \quad \Pi_2 = \frac{\rho VL}{\mu}$$

Reynolds sayısı akışkanlar mekaniğinde en fazla tanınan ve en önemli boyutsuz parametrelerin başında gelmektedir.

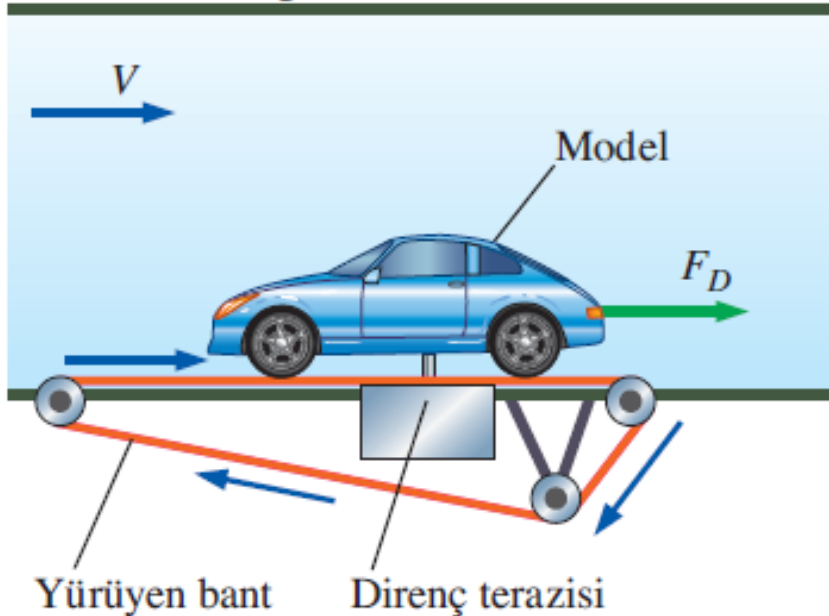
ÖRNEK 7-5

Model ve Prototip Otomobil Arasındaki Benzerlik

Yeni bir spor otomobilin 80 km/h hız ve 25 °C hava sıcaklığında aerodinamik direnci belirlenecektir. Otomotiv mühendisleri rüzgar tüneline test etmek için otomobilin 1/5 ölçekli modelini kullanacaklardır. Mevsim kışır ve rüzgar tüneline laboratuvarın ısıtılmayan kısmına yerleştirilmiştir; dolayısıyla rüzgar tünelineki havanın sıcaklığı yaklaşık olarak 5 °C alınabilir. Mühendislerin model ve prototip arasındaki benzerliği elde edilebilmeleri için rüzgar tüneline hangi hızda çalıştırmaları gerektiğini bulunuz.

Özellikler Atmosfer basıncındaki hava için $T = 25\text{ °C}$, $\rho = 1.184\text{ kg/m}^3$ ve $\mu = 1.849 \times 10^{-5}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$ 'dir. Benzer şekilde, $T = 5\text{ °C}$ 'de, $\rho = 1.269\text{ kg/m}^3$ ve $\mu = 1.754 \times 10^{-5}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$ 'dir.

Rüzgar tüneli test bölümü



Direnç terazisi bir cismin rüzgar tüneline aerodinamik direncini ölçmek için kullanılan bir düzendir. Otomobil modelleri test edilirken rüzgar tüneline zeminine, otomobilin referans koordinat sistemine göre hareketli zemini temsil etmek üzere yürüyen bir bant eklenir.

Analiz Bu problemde sadece bir bağımsız Π sayısı olduğundan, $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$ olması halinde benzerlik denklemi (Denklem 7-12) geçerlidir. Π_2 sayısı Denklem 7-13 ile verilir ve Reynolds sayısı olarak adlandırılır. Buna göre

$$\Pi_{2,m} = Re_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \Pi_{2,p} = Re_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

yazılabilir. Bu denklemler model testlerinde bilinmeyen rüzgar tüneli hızı V_m 'yi bulmak için çözülebilir:

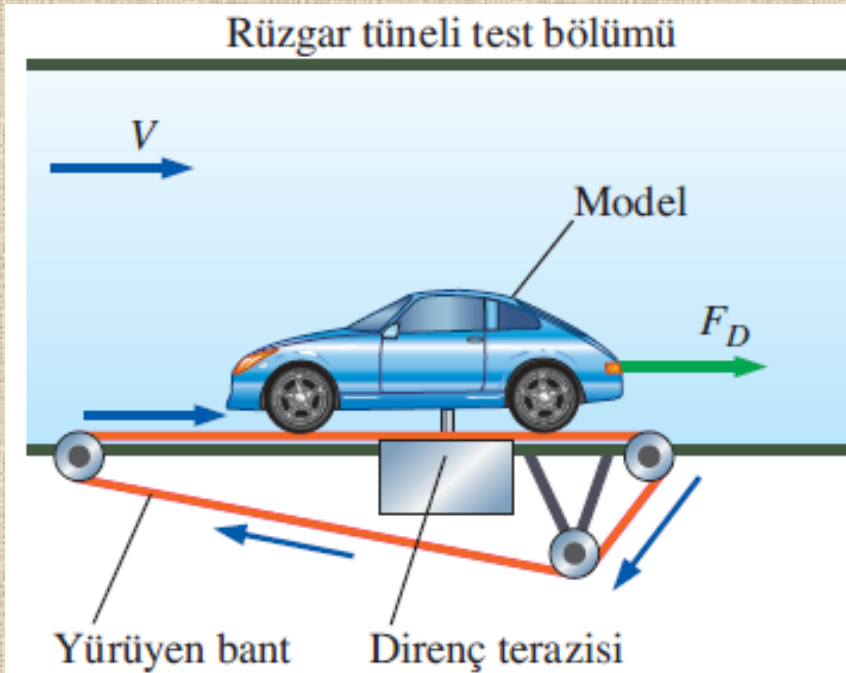
$$\begin{aligned} V_m &= V_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{L_p}{L_m} \right) \\ &= (80.0 \text{ km/h}) \left(\frac{1.754 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} \right) \left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3} \right) (5) = \mathbf{354 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

Dolayısıyla benzerliği sağlamak için rüzgar tünelinin 354 km/h'lik hızda (uç anlamalı basamağa göre) çalıştırılması gerekir. Model ve prototip otomobilin gerçek uzunluğunun verilmemiş olmasına rağmen, prototipin modelin beş katı büyüklüğünde olduğuna, yani L_p 'nin L_m 'ye oranının bilindiğine dikkat ediniz. Boyutlu parametrelerin boyutsuz oranlar şeklinde (bu örnekte yapıldığı gibi) yeniden düzenlenmesiyle birim sisteminin önemi ortadan kalkar. Paydaki birimler paydadaki birimlerle sadeleştiği için birimler arası dönüşüm de gereksizdir.

İrdeleme Bulunan hız değeri çok yüksektir (100 m/s civarında) ve rüzgar tüneli bu hızda çalışamayabilir. Öte yandan bu kadar yüksek hızda sıkıştırılamaz akış kabulü tartışmaya açık hale gelir (bunu daha sonra Örnek 7-8'de detaylı olarak tartışacağız).

ÖRNEK 7-6 Prototip Otomobil Üzerindeki Aerodinamik Direnç Kuvveti

Bu örnek Örnek 7-5'in devamıdır. Model ve prototip arasında benzerliği elde etmek için mühendislerin rüzgar tüneline 354 km/h hızında çalıştırdıklarını düşününüz. Model otomobil üzerindeki aerodinamik direnç kuvveti **direnç terazisi** ile ölçülmektedir (Şekil 7-19) ve direnç değerleri kaydedilmektedir. Model üzerindeki ortalama direnç kuvveti 94 N olduğuna göre, prototip üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetini (80 km/h ve 25 °C'de) belirleyiniz.



Direnç terazisi bir cismin rüzgar tüneline aerodinamik direncini ölçmek için kullanılan bir düzendir. Otomobil modelleri test edilirken rüzgar tüneline zemine, otomobilin referans koordinat sistemine göre hareketli zemini temsil etmek üzere *yürüyen bir bant* eklenir.

Analiz $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$ olduğundan, benzerlik denklemine göre (Denklem 7-12) $\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$ yazılabilir. Bu problem için Π_1 Denklem 7-13'te verilmiştir. Buna göre

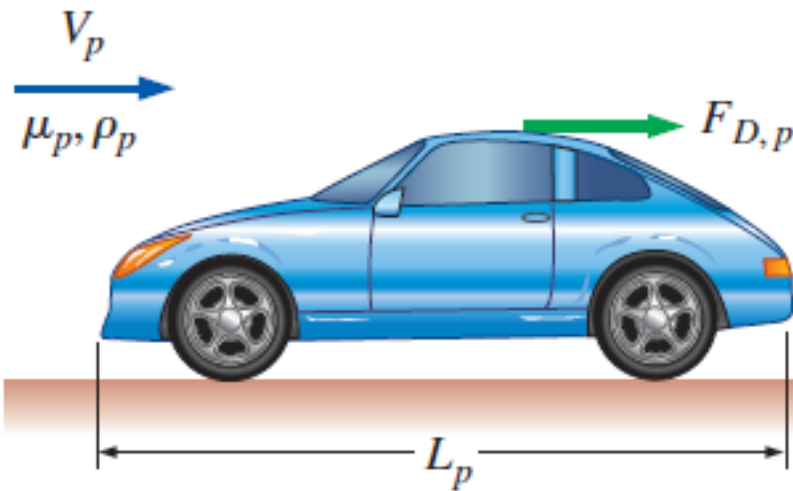
$$\Pi_{1,m} = \frac{F_{D,m}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \Pi_{1,p} = \frac{F_{D,p}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlik prototip otomobil üzerindeki bilinmeyen aerodinamik direnç kuvveti $F_{D,p}$ için çözülürse aşağıdaki sonuç bulunur:

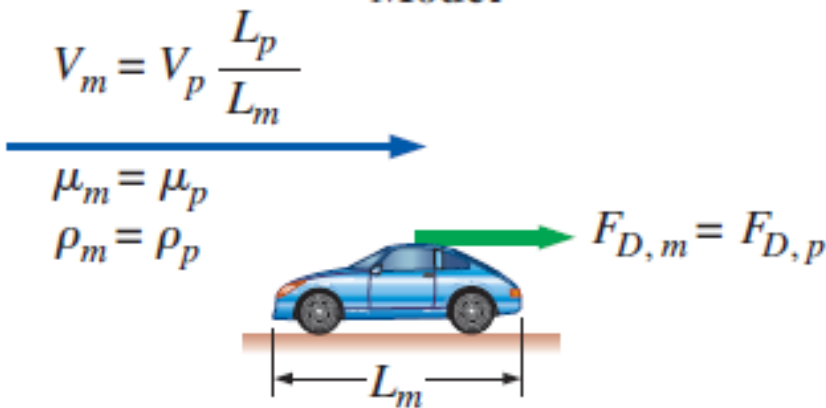
$$\begin{aligned} F_{D,p} &= F_{D,m} \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \left(\frac{L_p}{L_m} \right)^2 \\ &= (94 \text{ N}) \left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3} \right) \left(\frac{80 \text{ km/h}}{354 \text{ km/h}} \right)^2 (5)^2 = \mathbf{112 \text{ N}} \end{aligned}$$

İrdeleme Boyutlu parametreler boyutsuz oranlar şeklinde düzenlendiğinde, birimler SI ve İngiliz birimlerinin karışımı olsa bile tamamen sadeleşir. Π_1 'in denkleminde hem hızın hem de uzunluğun karesi alındığından, rüzgar tünelindeki yüksek hız, modelin küçük boyutta olmasının etkisini hemen hemen dengeler ve böylece model üzerindeki direnç kuvveti yaklaşık olarak prototip üzerindeki ile aynı olur. Aslında rüzgar tünelindeki havanın yoğunluğu ve viskozitesi prototip üzerinden akan havanınkilerle *aynı* ise, her iki direnç kuvveti de aynı olacaktır (Şekil 7-20).

Prototip



Model



Prototip üzerinden akan hava ile rüzgar tünelineki havanın aynı özelliklere sahip olduğu ($\rho_m = \rho_p, \mu_m = \mu_p$) ve benzerlik şartlarının sağlandığı ($V_m = V_p L_p / L_m$) özel durumda, prototip ve model üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetleri birbirlerine eşittir. Eğer prototip ve model testlerinde kullanılan akışkanların özellikleri aynı değilse, dinamik benzerlik şartları sağlanmış olsa bile direnç kuvvetleri aynı olmak zorunda değildir.

1/5 ölçekli otomobil modelini test etmek üzere rüzgar tüneli yerine su tüneli kullanılsaydı, benzerliği elde etmek için gereken su tüneli hızı aşağıda görüldüğü gibi kolaylıkla hesaplanabilir:

$$V_m = V_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{L_p}{L_m} \right)$$
$$= (80.0 \text{ km/h}) \left(\frac{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} \right) \left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{998.0 \text{ kg/m}^3} \right) (5) = 25.7 \text{ km/h}$$



Görüldüğü üzere su tünelinin önemli bir avantajı, gerekli su tüneli hızının aynı ölçekteki model için gerekli rüzgar tüneli hızından çok daha düşük olmasıdır (hava için 354 km/h ve su için 25.7 km/h) .

Model akışkanı prototip akışkanından farklı bile olsa yine de benzerlik elde edilebilir. Burada bir denizaltı modeli rüzgar tünelinde test edilmektedir.

7-4 ■ TEKRARLAYAN DEĞİŞKENLER YÖNTEMİ VE BUCKINGHAM Pİ TEOREMİ

Boyutsuz parametreler olan Π terimlerini nasıl *oluşturacağız*?

Bu amaç için geliştirilmiş olan birkaç yöntem vardır ancak bunlardan en üstünü (ve en basiti) **tekrarlayan değişkenler yöntemi**dir.

Tekrarlayan değişkenler yöntemini oluşturan altı adımının kısa bir özeti.

Tekrarlayan Değişkenler Yöntemi

Adım 1: Problemde verilen parametreleri listeleyin ve toplam sayılarını (n) sayın.

Adım 2: n tane parametreden her birinin ana boyutlarını yazın.

Adım 3: j indirgemesini ana boyutların sayısı olarak alın. Beklenen sayıda Π 'leri ifade eden k 'yi hesaplayın,
$$k = n - j.$$

Adım 4: j adet tekrarlayan parametre seçin.

Adım 5: k adet Π 'yi oluşturun ve gerekli oldukça üzerinde manipülasyon yapın.

Adım 6: Nihai fonksiyonel ilişkiyi yazın ve yaptığınız cebirsel işlemleri kontrol edin.

Adım 1 Parametreleri listeleyin (boyutlu değişkenler, boyutsuz değişkenler ve boyutlu sabitler) ve bunları sayın. Problemdaki toplam parametre sayısı, bağımlı değişkenler dahil olmak üzere n olsun. Her bir bağımsız parametrenin diğer bağımsız parametrelere bağlı olmadığından emin olun (örneğin, yarıçap r ve alanı $A = \pi r^2$ aynı anda almayın, çünkü r ve A bağımsız *değildir*).

Adım 2 n tane parametrenin her biri için ana boyutları yazın.

Adım 3 j indirgemesini tahmin edin. İlk tahmin olarak j 'yi problemde verilen ana boyutların sayısına eşit alın. **Buckingham Pi teoremine** göre Π 'lerin beklenen sayısı (k), n eksi j 'ye eşittir:

Buckingham Pi teoremi:

$$k = n - j$$

(7-14)

Eğer bu adımda veya takip eden herhangi bir adımda analizden bir sonuç alınamazsa, Adım 1'de yeterli sayıda parametreyi dahil edip etmediğinizi kontrol edin. Aksi takdirde başa dönün ve j 'yi *bir azaltıp* tekrar deneyin.

Adım 4 Her bir Π 'yi oluşturmak için kullanılacak j tane **tekrarlayan parametre** seçin. Tekrarlayan parametrelerin her bir Π teriminde görölme potansiyelleri olduğu için bunları *doğru* seğtiğinizden emin olun (Tablo 7-3).

Adım 5 Çarpım boyutsuz olacak şekilde, j tane tekrarlayan parametreyi geriye kalan parametrelerden birisi ile gruplayarak Π 'lerden birini elde edin. Bu şekilde k tane Π 'yi oluşturun. Kural gereği Π_1 olarak gösterilen ilk Π terimi *bağımlı* Π 'dir (listenin solunda olan). Tanınmış boyutsuz grupları elde etmek için gerektiğinde Π 'ler üzerinde değişiklik yapın (Tablo 7-5).

Adım 6 Bütün Π 'lerin boyutsuz olup olmadıklarını kontrol edin. Nihai fonksiyonel ilişkiyi Denklem 7-11 biçiminde ifade edin.

* Bu yöntem, boyut analizi yapılırken boyutsuz Π gruplarını ile bulmak için kullanılan bir adım-adım çözüm yöntemidir.

Adım 1*İlgili parametrelerin listesi:*

$$z = f(t, w_0, z_0, g) \quad n = 5$$

Adım 2

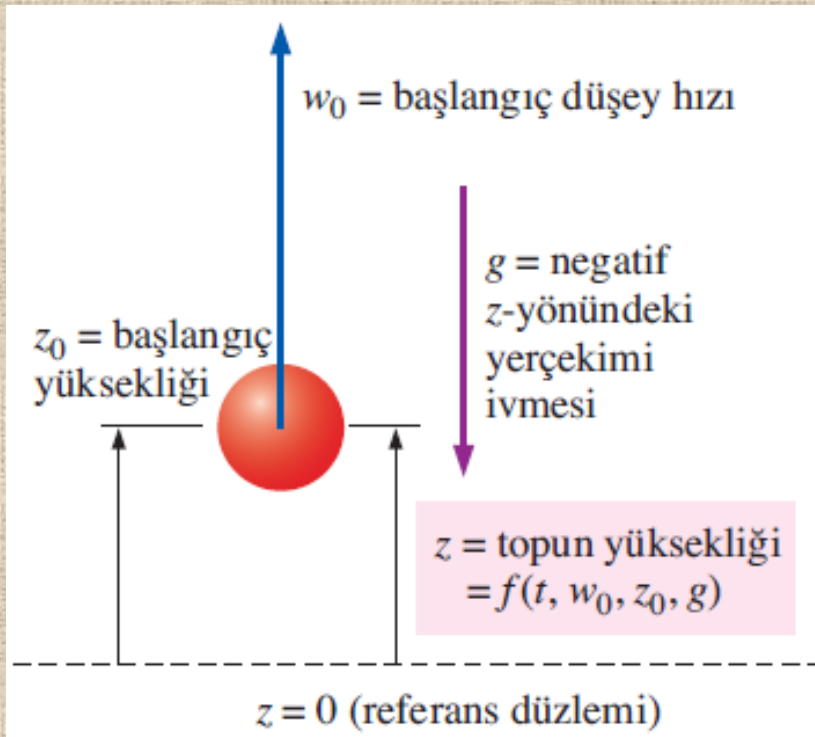
z	t	w_0	z_0	g
$\{L^1\}$	$\{t^1\}$	$\{L^1 t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1 t^{-2}\}$

Adım 3*İndirgeme:*

$$j = 2$$

Beklenen Π sayısı:

$$k = n - j = 5 - 2 = 3$$

Adım 4*Tekrarlayan parametreler:* w_0 ve z_0 

Boşlukta düşen bir topun boyut analizine uygun gösterimi. z *yüksekliği*; t zamanın, w_0 başlangıç düşey hızının, z_0 başlangıç yüksekliğinin ve g yerçekimi ivmesinin bir fonksiyonudur.

Step 5

Bağımlı Π :

$$\Pi_1 = zw_0^{a_1}z_0^{b_1}$$

$$\Pi_1 \text{'in boyutları: } \{\Pi_1\} = \{L^0t^0\} = \{zw_0^{a_1}z_0^{b_1}\} = \{L^1(L^1t^{-1})^{a_1}L^{b_1}\}$$

$$\text{Zaman: } \{t^0\} = \{t^{-a_1}\} \quad 0 = -a_1 \quad a_1 = 0$$

$$\text{Uzunluk: } \{L^0\} = \{L^1L^{a_1}L^{b_1}\} \quad 0 = 1 + a_1 + b_1 \quad b_1 = -1 - a_1 \quad b_1 = -1$$

$$\Pi_1 = \frac{z}{z_0}$$

İlk bağımsız Π :

$$\Pi_2 = tw_0^{a_2}z_0^{b_2}$$

$$\Pi_2 \text{'in boyutları: } \{\Pi_2\} = \{L^0t^0\} = \{tw_0^{a_2}z_0^{b_2}\} = \{t(L^1t^{-1})^{a_2}L^{b_2}\}$$

Üsler eşitlenirse

$$\text{Zaman: } \{t^0\} = \{t^1t^{-a_2}\} \quad 0 = 1 - a_2 \quad a_2 = 1$$

$$\text{Uzunluk: } \{L^0\} = \{L^{a_2}L^{b_2}\} \quad 0 = a_2 + b_2 \quad b_2 = -a_2 \quad b_2 = -1$$

$$\Pi_2 = \frac{w_0 t}{z_0}$$

İkinci bağımsız Π :

$$\Pi_3 = gw_0^{a_3}z_0^{b_3}$$

$$\Pi_3 \text{'ün boyutları: } \{\Pi_3\} = \{L^0t^0\} = \{gw_0^{a_3}z_0^{b_3}\} = \{L^1t^{-2}(L^1t^{-1})^{a_3}L^{b_3}\}$$

Üsler eşitlenirse,

Zaman: $\{t^0\} = \{t^{-2}t^{-a_3}\} \quad 0 = -2 - a_3 \quad a_3 = -2$

Uzunluk: $\{L^0\} = \{L^1L^{a_3}L^{b_3}\} \quad 0 = 1 + a_3 + b_3 \quad b_3 = -1 - a_3 \quad b_3 = 1$

$$\Pi_3 = \frac{gz_0}{w_0^2}$$

Değiştirilmiş Π_3 : $\Pi_{3, \text{değiştirilmiş}} = \left(\frac{gz_0}{w_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{w_0}{\sqrt{gz_0}} = Fr$

Çarpma: Üsler toplanır

$$x^a x^b x^{2c} = x^{a+b+2c}$$

Bölme: Üsler çıkartılır

$$\frac{x^a}{x^b} \times \frac{1}{x^{2c}} = x^{a-b-2c}$$

Çarpma ve bölme işlemlerinde üslerin toplanması ve çıkarılması kuralı.

Günün ipucu

Çoğu akış probleminde tekrarlayan parametreler için akıllıca bir seçim uzunluk, hız ve kütle veya yoğunluktur.

Boyutsuz Π gruplarının her birinde görülebildiklerinden ortak parametreleri tekrarlayan parametreler olarak seçmek akıllıca olacaktır.

$$\{\Pi_1\} = \{m^0 L^0 t^0 T^0 I^0 C^0 N^0\} = \{1\}$$

$$\{\Pi_2\} = \{m^0 L^0 t^0 T^0 I^0 C^0 N^0\} = \{1\}$$

.

.

.

$$\{\Pi_k\} = \{m^0 L^0 t^0 T^0 I^0 C^0 N^0\} = \{1\}$$

Yedi ana boyutun tamamının üsleri sıfır olmaya *zorlandığı* için tekrarlayan değişkenler yönteminden elde edilen tüm Π grupları boyutsuzdur.

Berk, Başardın!
Adın boyutsuz bir parametreye
verildi.



Yaşasın!



Tanınmış boyutsuz parametreler
adlarını çoğunlukla ünlü bir bilim
insanı veya mühendisten alır.

Adım 6

Π 'ler arasındaki ilişki: $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \rightarrow \frac{z}{z_0} = f\left(\frac{w_0 t}{z_0}, \frac{w_0}{\sqrt{gz_0}}\right)$

Boyut analizinin nihai sonucu: $z^* = f(t^*, Fr)$

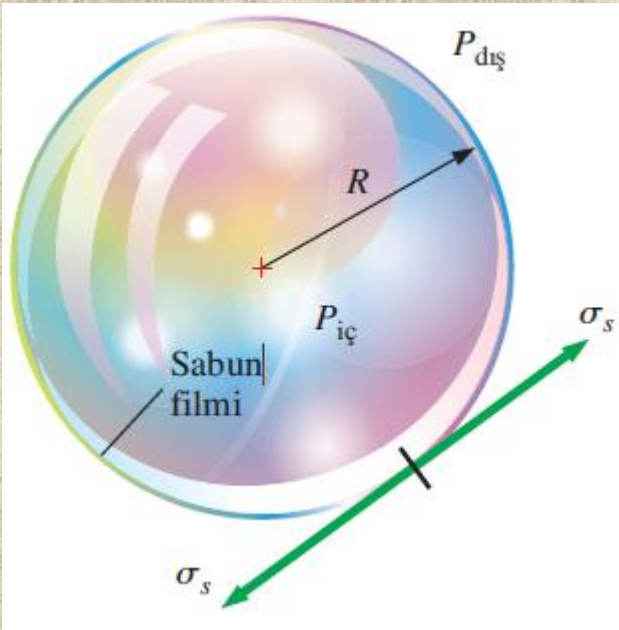
Tekrarlayan değişkenler yöntemi denklemin matematiksel ifadesini veremez.



Cebirsel işlemlerinizi hızlı bir şekilde gözden geçirmeniz yerinde olacaktır.

ÖRNEK 7-7 Sabun Köpüğündeki Basınç

Çocuklar sabun köpüğü ile oynarken siz de köpük yarıçapı ile köpüğün iç basıncı arasındaki ilişkiyi merak ediyorsunuz (Şekil 7-29). Sabun köpüğündeki iç basıncın atmosfer basıncından daha büyük ve bu yüzden köpük yüzeyinin balon gibi gerilme altında olduğunu düşünüyorsunuz. Ayrıca bu problemde yüzey geriliminin etkin olması gerektiğini de biliyorsunuz. Diğer fiziksel konuları bilmeden, boyut analizini kullanarak problemi çözmeye karar veriyorsunuz. Basınç farkı $\Delta P = P_{iç} - P_{dış}$, köpük yarıçapı R ve sabun filminin yüzey gerilimi σ_s arasında bir ilişki kurunuz.



Sabun filmindeki yüzey geriliminden dolayı, sabun köpüğünün iç basıncı kendisini çevreleyen basınçtan daha büyüktür.

ÇÖZÜM Köpüğün içi ile dışındaki hava arasındaki basınç farkı, tekrarlayan değişkenler yöntemi ile analiz edilecektir.

Kabuller 1 Sabun köpüğü havada asılı kalmaktadır ve yerçekimi ihmal edilebilir. 2 Bu problemde diğer değişkenlerin ve sabitlerin önemi yoktur.

Analiz Tekrarlayan değişkenler yöntemini adım adım uygulayalım.

Adım 1 Problemde 3 tane değişken veya sabit vardır; $n = 3$. Bağımlı değişken, bağımsız değişkenlerin ve sabitlerin fonksiyonu olacak şekilde verilir:

İlgili parametrelerin listesi: $\Delta P = f(R, \sigma_s) \quad n = 3$

Adım 2 Her bir parametrenin ana boyutları liste halinde yazılır. Yüzey geriliminin boyutları Örnek 7–1'den, basıncın boyutları ise Örnek 7–2'den elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} \Delta P & R & \sigma_s \\ \{m^1 L^{-1} t^{-2}\} & \{L^1\} & \{m^1 t^{-2}\} \end{array}$$

Adım 3 İlk tahmin olarak j 'yi problemdeki ana boyutların sayısı olan 3 alalım (m , L ve t).

İndirgeme (ilk tahmin): $j = 3$

Eğer j 'nin bu değeri doğru ise, beklenen Π adedi $k = n - j = 3 - 3 = 0$ 'dır. Ancak nasıl olur da sıfır tane Π olur? Bazı şeylerin doğru gitmediği açıktır (Şekil 7–30). Böyle durumlarda öncelikle başa dönerek problemde bazı değişkenleri veya sabitleri göz ardı edip etmediğimizden emin olmalıyız. Bu problemde basınç farkının sadece köpük yarıçapı ve yüzey gerilimine bağlı olduğundan emin olduğumuz için j 'yi bir azaltırız,

İndirgeme (ikinci tahmin): $j = 2$

Eğer j 'nin bu değeri doğru ise, $k = n - j = 3 - 2 = 1$ olur. Buna göre, sıfır Π 'den fiziksel olarak daha gerçekçi bir şekilde *bir* Π sayısı bekleriz.

Peki ya

$k = n - j = 0$ çıkarsa ne yapacağız?

Böyle bir durumda aşağıdakileri deneyin:

- Parametre listenizi kontrol edin.
- Cebirsel işlemlerinizi kontrol edin.
- Bunlarda sorun yoksa j 'yi azaltın.

Tekrarlayan
değişkenler

yönteminin sıfır tane Π verdiği görülürse, bu ya bir yerde hata yaptığımız ya da j 'yi bir azaltıp yeni baştan başlamanız gerektiği anlamına gelir.

Adım 4 $j = 2$ olduğu için iki adet tekrarlayan parametre seçilmesi gereklidir. Tablo 7–3'teki kuralların takip edilmesiyle, ΔP bağımlı değişken olduğu için, tek seçenek olarak R ve σ_s kalır.

Adım 5 Bağımlı Π 'yi elde etmek için, seçilen tekrarlayan parametreler ΔP bağımlı değişkeni ile çarpım haline getirilir.

Bağımlı Π :
$$\Pi_1 = \Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1} \quad (1)$$

İkinci adımdaki ana boyutlar Denklem 1'e uygulanır ve Π boyutsuz olmaya zorlanırsa,

Π_1 'nin boyutları:

$$\{\Pi_1\} = \{m^0 L^0 t^0\} = \{\Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1}\} = \{(m^1 L^{-1} t^{-2}) L^{a_1} (m^1 t^{-2})^{b_1}\}$$

a_1 ve b_1 'i elde etmek için üslerdeki her bir ana boyut birbirine eşitlenirse:

Zaman: $\{t^0\} = \{t^{-2} t^{-2b_1}\} \quad 0 = -2 - 2b_1 \quad b_1 = -1$

Kütle: $\{m^0\} = \{m^1 m^{b_1}\} \quad 0 = 1 + b_1 \quad b_1 = -1$

Uzunluk: $\{L^0\} = \{L^{-1} L^{a_1}\} \quad 0 = -1 + a_1 \quad a_1 = 1$

Neyse ki ilk iki sonuç birbiriyle uyumludur ve buradan Denklem 1,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} \quad (2)$$

sonucunu verir. Tablo 7–5'ten, Denklem 2'ye en çok benzeyen tanınmış boyutsuz parametrenin $[(\rho V^2) \times \text{uzunluk/yüzey gerilimi}]$ olarak tanımlanan **Weber sayısı** olduğu görülmektedir. ($(\rho V^2$ 'nin basınç boyutunda olduğuna dikkat ediniz.) Elde edilen Π üzerinde herhangi bir değişiklik yapmaya gerek yoktur.

Adım 6 Nihai fonksiyonel ilişkinin belirlenmesi. Elimizdeki problemde *herhangi bir şeyin* fonksiyonu olmayan sadece bir Π vardır. Bu ise sadece Π 'nin bir sabit olması ile mümkündür. Denklem 2 Denklem 7–11'de verilen fonksiyonel forma sokulursa:

Π 'ler arasındaki ilişki:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} = f(\text{hiçbir şey}) = \text{sabit} \quad \rightarrow \quad \Delta P = \text{sabit} \quad \frac{\sigma_s}{R} \quad (3)$$

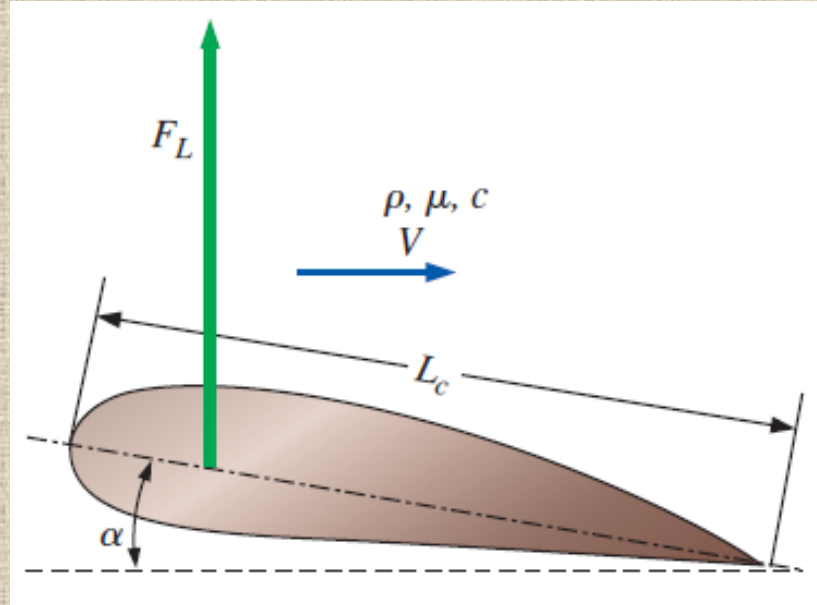
İrdeleme Bu örnek, problemin fiziği hakkında fazla bir şey bilmeksizin boyut analizi ile *eğilimlerin* nasıl kestirilebileceğini göstermektedir. Örneğin elde ettiğimiz sonuçtan sabun köpüğü yarıçapının iki katına çıkması ile basınç farkının yarıya ineceğini biliyoruz. Benzer şekilde yüzey gerilimi ile basınç farkı ΔP arasında lineer bir ilişki olduğu görülmektedir. Boyut analizi ile Denklem 3'teki sabitin değeri belirlenemez. İlave bir analiz (veya bir deney) ile bu sabitin 4 olduğu gösterilebilir (bkz. Bölüm 2).

ÖRNEK 7-8

Bir Kanat Üzerindeki Kaldırma Kuvveti

Havacılık mühendislerinden oluşan bir ekip uçak tasarlıyor ve tasarladıkları yeni kanadın oluşturacağı kaldırma kuvvetini hesaplamak istiyor (Şekil 7-31). Kanadın kiriş uzunluğu $L_c = 1.12$ m ve üst bakış alanı $A = 10.7$ m²'dir (kanada hücum açısı sıfır iken üstten bakıldığında görülen alan). Prototip $T = 25$ °C sıcaklığındaki yere yakın bölgeden $V = 52.0$ m/s hızında uçacaktır. Rüzgar tüneli en fazla 5 atm basınca kadar basınçlandırılabilir. Basıncılı rüzgar tünelinde test etmek üzere kanadın 1/10 ölçekli modeli yapılmıştır. Dinamik benzerliği sağlamak için rüzgar tüneli hangi hız ve basınçta çalıştırılmalıdır?

Yoğunluğu ρ , viskozitesi μ , ses hızı c , hücum açısı α , serbest-akım hızı V olan akışın içinde kiriş uzunluğu L_c olan bir kanat üzerine etkiyen kaldırma kuvveti. Hücum açısı α serbest-akımın geliş yönüne göre ölçülmüştür.



ÇÖZÜM Dinamik benzerliği sağlamak için rüzgar tünelinin hangi hız ve basınçta çalıştırılması gerektiğini hesaplayacağız.

Kabuller 1 Prototip kanat standart atmosfer basıncında havada uçmaktadır.
2 Model prototipe geometrik olarak benzemektedir.

Analiz Öncelikle boyutsuz parametreleri elde etmek için tekrarlayan değişkenler yöntemi adım adım uygulanır. Sonra prototip ile model arasında bağımlı Π 'ler birbirlerine eşleştirilir.

Adım 1 Bu problemde yedi parametre (değişkenler ve sabitler) vardır. Bağımlı değişkenler bağımsız parametrelerin fonksiyonu olacak şekilde listelenir:

İlgili parametrelerin listesi: $F_L = f(V, L_c, \rho, \mu, c, \alpha) \quad n = 7$

Burada F_L kanat üzerine etkiyen kaldırma kuvveti, V akışkan hızı, L_c giriş uzunluğu, ρ akışkanın yoğunluğu, μ akışkanın viskozitesi, c akışkan içindeki sesin yayılma hızı ve α ise kanadın hücum açısıdır.

Adım 2 Her bir parametrenin ana boyutları listelenir; α açısı boyutsuzdur:

$$\begin{array}{ccccccc} F_L & V & L_c & \rho & \mu & c & \alpha \\ \{m^1 L^1 t^{-2}\} & \{L^1 t^{-1}\} & \{L^1\} & \{m^1 L^{-3}\} & \{m^1 L^{-1} t^{-1}\} & \{L^1 t^{-1}\} & \{1\} \end{array}$$

Adım 3 İlk tahmin olarak j , problemde verilen ana boyutların sayısı (m , L ve t) olan 3'e eşit alınır.

İndirgeme: $j = 3$

Eğer j 'nin bu değeri doğru ise beklenen Π 'lerin sayısı $k = n - j = 7 - 3 = 4$ olur.

Adım 4 $j = 3$ olduğu için üç tane tekrarlayan parametre seçilmesi gerekmektedir. Tablo 7–3'te listelenen kuralları takip ettiğimizde bağımlı değişken olan F_L ve zaten boyutsuz olan α 'yı seçemeyiz. Boyutları aynı olduğu için V ve c 'nin ikisini birden seçemeyiz. μ 'nün tüm Π 'lerde görünmesi istenmez. Bunlardan dolayı, tekrarlayan parametreler için uygun seçenekler ya V , L_c ve ρ ya da c , L_c ve ρ 'dur. Bunlardan birincisi daha iyi bir seçenektir, çünkü ses hızı Tablo 7–5'te verilen tanınmış boyutsuz parametrelerin sadece birinde vardır. Bunun yanında hız ölçeği daha “yaygındır” ve boyutsuz parametrelerin birçoğunda görülür (Şekil 7–32).

Tekrarlayan parametreler: V, L_c ve ρ

Adım 5 Bağımlı Π oluşturulur:

$$\Pi_1 = F_L V^{a_1} L_c^{b_1} \rho^{c_1} \rightarrow \{\Pi_1\} = \{(m^1 L^1 t^{-2})(L^1 t^{-1})^{a_1} (L^1)^{b_1} (m^1 L^{-3})^{c_1}\}$$

Π 'lerin boyutsuz olmaya zorlanması ile üsler hesaplanır (cebirsal işlemler gösterilmemiştir). Bunun sonucunda $a_1 = -2$, $b_1 = -2$ ve $c_1 = -1$ elde ederiz. Buradan bağımlı Π aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Pi_1 = \frac{F_L}{\rho V^2 L_c^2}$$

Tablo 7–5'ten Π 'mize en çok benzeyen tanınmış boyutsuz parametre, giriş uzunluğunun karesinden ziyade paydasında 1/2 olan üst bakış alanı A 'ya göre tanımlanmış **kaldırma katsayısı**dır. Buna göre, bu Π üzerinde Tablo 7–4'teki kurallara göre işlem yapabiliriz ve aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\text{Değiştirilmiş } \Pi_1: \quad \Pi_{1, \text{değiştirilmiş}} = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} = \text{Kaldırma katsayısı} = C_L$$

UYARI!

TEKRARLAYAN PARAMETRELERİNİZİ DİKKATLİCE SEÇİNİZ

Tekrarlayan değişkenler yöntemindeki en zor kısım tekrarlayan parametrelerin seçimidir. Ancak bol bol uygulama yaparak bu parametreleri akıllıca seçmeyi öğrenebilirsiniz.

Benzer şekilde ilk bağımsız Π aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} L_c^{b_2} \rho^{c_2} \rightarrow \{\Pi_2\} = \{(m^1 L^{-1} t^{-1})(L^1 t^{-1})^{a_2} (L^1)^{b_2} (m^1 L^{-3})^{c_2}\}$$

Buradan $a_2 = -1$, $b_2 = -1$ ve $c_2 = -1$ elde edilir. Böylece,

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L_c}$$

olarak bulunur. Bu Π 'yi Reynolds sayısının tersi olarak biliyoruz. Tersini aldıktan sonra

Değiştirilmiş Π_2 : $\Pi_{2, \text{değiştirilmiş}} = \frac{\rho V L_c}{\mu} = \text{Reynolds sayısı} = \text{Re}$

elde edilir. Üçüncü Π ses hızı ile oluşturulur, ara işlemler size bırakılmıştır. Sonuç,

$$\Pi_3 = \frac{V}{c} = \text{Mach sayısı} = \text{Ma}$$

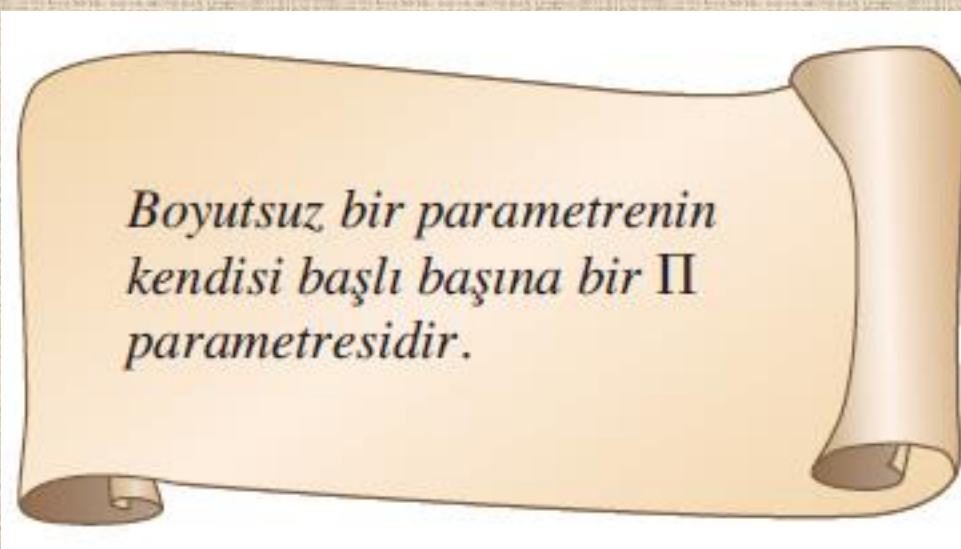
olarak bulunur. Son olarak, hücum açısı α zaten boyutsuz olduğu için kendisi başlı başına boyutsuz bir Π grubudur (Şekil 7-33). Cebirsel işlemler yapılırsa tüm üslerin sıfır olduğu görülür. Buna göre

$$\Pi_4 = \alpha = \text{Hücum açısı}$$

olarak bulunur.

Adım 6 Nihai fonksiyonel ilişkiyi yazalım:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} = f(\text{Re}, \text{Ma}, \alpha) \quad (1)$$



Boyutsuz bir parametrenin kendisi başlı başına bir Π parametresidir.

Boyutsuz bir parametrenin (açı gibi) kendisi başlı başına bir Π terimidir

Dinamik benzerliğin sağlanması için Denklem 7–12’den biliyoruz ki, Denklem 1’deki bağımlı boyutsuz parametrelerin üçünün de model ve prototip arasında eşleştirilmesi gereklidir. Doğal olarak hücum açısını eşleştirmek çok kolay olmakla birlikte, Reynolds sayısı ve Mach sayısını aynı anda eşleştirmek hiç de kolay değildir. Örneğin eğer rüzgar tüneli prototip ile aynı sıcaklık ve basınçta çalıştırılırsa (model üzerinde akan havanın ρ , μ ve c ’si prototip üzerinde akan havanıninkilerle aynı olursa), rüzgar tünelineki hava hızını prototip üzerinden geçen hava hızından 10 kat fazla yaparak Reynolds sayısı benzerliği elde edilebilir (model 1/10 ölçekli olduğu için). Ancak bu durumda model ve prototip Mach sayıları arasında 10 kat fark olacaktır. 25 °C’de hava içerisindeki ses hızı c yaklaşık olarak 346 m/s’dir, bu durumda prototip uçak kanadının Mach sayısı $Ma_p = 52.0/346 = 0.150$ (sesaltı akış) olur. Öte yandan Reynolds sayısı benzerliği için gerekli rüzgar tüneli hızında model Mach sayısı $Ma_m = 1.50$ olur ve bu da sesüstü bir akıştır! Akış fiziği, sesaltı şartlardan sesüstü şartlara geçildiğinde büyük değişiklik gösterdiğinden bu durum kabul edilemez. Diğer taraftan model ve prototip Mach sayılarını eşleştirmek istersek modelin Reynolds sayısı 10’da birine inecektir.

Peki ne yapmalıyız? Yaygın bir pratik kural olarak Mach sayısının 0.3’ten küçük olduğu durumlarda (bu örnekte olduğu gibi) sıkıştırılabilirlik etkisi uygulamada ihmal edilebilir. Bundan dolayı Ma_m 0.3’ün altında tutulduğu sürece Mach sayısını tam olarak eşleştirmek gerekmez ve sadece Reynolds sayısı eşleştirilerek yaklaşık dinamik benzerlik elde edilebilir. Bu aşamada yeni problem Mach sayısını düşük tutarken Re sayısının nasıl eşleştirilebileceğidir. Burada rüzgar tünelinin basınçlandırma özelliği işin içine girer. Sabit sıcaklıkta yoğunluk basınç ile doğru orantılıdır, ancak viskozite ve ses hızı basınçla çok az değişir. Eğer rüzgar tünelinin basıncı 10 atm’e çıkarılırsa,

model ve prototip hava hızları aynı olabilir. Böylece Re ve Ma 'nın her ikisinde de neredeyse mükemmel bir eşleşme elde edilir. Öte yandan 5 atm'lik maksimum rüzgar tüneli basıncında gereken rüzgar tüneli hızı, prototipinkinin iki katı, yani 104 m/s olacaktır. Böylece rüzgar tünelindeki modelin Mach sayısı $Ma_m = 104/346 = 0.301$ olacaktır—pratik kuralımıza göre yaklaşık olarak sıkıştırılabilirlik sınırında. Özetle rüzgar tüneli yaklaşık olarak **100 m/s, 5 atm ve 25°C**'de çalıştırılmalıdır.

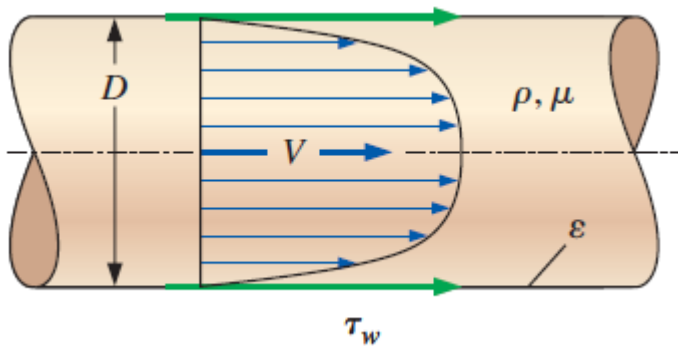
İrdeleme Bu örnek boyut analizinin sinir bozucu sınırlamalarından birini göstermektedir. Yani *model testinde tüm bağımlı Π 'leri her zaman aynı anda eşleştiremeyebilirsiniz*. Yalnızca en önemli Π 'lerin eşleşmesi üzerinde uzlaşma sağlanmalıdır. Akışkanlar mekaniği uygulamalarının birçoğunda Reynolds sayısı, yeteri kadar yüksek olmak kaydıyla dinamik benzerlik için kritik değildir. Eğer örneğin, Mach sayısı 0.3'ten önemli oranda büyükse, daha doğru sonuçlar için Reynolds sayısından ziyade Mach sayısını hassas bir şekilde eşleştirmek akıllıca bir hareket olacaktır. Bunun yanında modeli test etmek için başka bir gaz kullanılırsa, özgül ısı oranını da (k) eşleştirmemiz gerekir, çünkü sıkıştırılabilir akış davranışı kuvvetli bir şekilde k 'ya bağlıdır (Bölüm 12). Böyle model denemeleriyle ilgili problemleri Bölüm 7–5'te ayrıntılı olarak ele alacağız.

Örnek 7–5 ve Örnek 7–6'ya tekrar dönerek prototip otomobilin hızının 80 km/h ve rüzgar tüneli hızının 354 km/h olduğunu hatırlayalım. Bu hız 25°C'de, prototip Mach sayısı $Ma_p = 0.065$ 'e karşılık gelir ve 5°C'de rüzgar tünelinin Mach sayısı 0.29'dur ki bu da sıkıştırılabilirlik sınırındadır. Sonuçta ilave bir Π olarak Mach sayısını oluşturacak olan ses hızını boyut analizimize dahil etmiş oluyoruz. Mach sayısını düşük tutarken Reynolds sayısını eşleştirmenin başka bir yolu, çok yüksek hızlarda bile neredeyse sıkıştırılmaz olduklarından akışkan olarak bir sıvı (örneğin su) kullanmaktır.

ÖRNEK 7-9

Bir Boru İçerisindeki Akışta Sürtünme Kaybı

Yoğunluğu ρ , viskozitesi μ olan sıkıştırılamaz bir akışkanın çapı D olan uzun ve yatay dairesel bir borudaki akışını göz önüne alınız. Akışa ait hız profili Şekil 7-34'te gösterilmiştir. Boru kesitindeki ortalama hız V olup kütlelenin korunumundan dolayı boru boyunca sabittir. Yeterince uzun bir borudaki akışta, boru girişinden itibaren belirli bir mesafede akış hidrodinamik açıdan **tam gelişmiş** hale gelir. Tam gelişmiş bir akışta hız profili boru boyunca değişmez. Şekilde gösterildiği gibi akışkan ve boru çeperi arasındaki sürtünme kuvvetlerinden dolayı boru iç çeperinde kayma gerilmesi τ_w oluşur. Kayma gerilmesi de tam gelişmiş akış koşullarında boru boyunca sabittir. Borunun iç çeperi boyunca sabit bir ortalama pürüz yüksekliği ε kabul edilmektedir. Aslında boru boyunca sabit *olmayan* tek parametre basınçtır. Sürtünmeyi yenmesi için akışkanı itmesi gereken basınç, boru boyunca (lineer olarak) azalmalıdır. Kayma gerilmesi τ_w ile problemdeki diğer parametreler arasında boyutsuz bir ilişki oluşturunuz.



Boru iç çeperindeki sürtünme. Boru çeperindeki kayma gerilmesi τ_w ; ortalama akışkan hızı V , ortalama çeper pürüz yüksekliği ε , akışkan yoğunluğu ρ , akışkan viskozitesi μ ve boru iç çapı D 'nin bir fonksiyonudur.

ÇÖZÜM Kayma gerilmesi ile diğer parametreler arasında boyutsuz bir ilişki oluşturacağız.

Kabuller 1 Akış hidrodinamik olarak tam gelişmiştir. 2 Akışkan sıkıştırılmazdır. 3 Problemde bahsedilmeyen diğer parametreler önemli değildir.

Analiz Boyutsuz parametreleri elde etmek için tekrarlayan değişkenler yöntemi adım adım uygulanacaktır.

Adım 1 1 Problemde 6 adet değişken ve sabit vardır; $n = 6$. Bağımlı değişken, bağımsız değişkenlerin ve sabitlerin fonksiyonu olacak şekilde verilir:

İlgili parametrelerin listesi: $\tau_w = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D) \quad n = 6$

Adım 2 Her bir parametrenin ana boyutları liste halinde yazılır. Kayma gerilmesinin birim alana etkiyen kuvvet olduğuna ve basınç ile aynı boyutlara sahip olduğuna dikkat ediniz.

τ_w	V	ε	ρ	μ	D
$\{m^1L^{-1}t^{-2}\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1\}$

Adım 3 İlk tahmin olarak j 'yi problemdeki ana boyutların sayısı olan 3 alalım (m , L ve t).

İndirgeme: $j = 3$

Eğer j 'nin bu değeri doğru ise, beklenen Π adedi $k = n - j = 6 - 3 = 3$ olur.

Adım 4 $j = 3$ olduğu için üç adet tekrarlayan parametre seçilmesi gereklidir. Tablo 7-3'te de verilen kurallara göre, bağımlı değişken olan τ_w 'yi seçemeyiz. Boyutları aynı olduğu için ε ve D 'nin her ikisini birden seçemeyiz. μ veya ε 'un bütün Π 'lerde görünmesi istenmez. Sonuç olarak, tekrarlayan parametreler için en iyi seçenek V , D ve ρ 'dur.

Tekrarlayan parametreler: V, D ve ρ

Adım 5 Bağımlı Π oluşturulur:

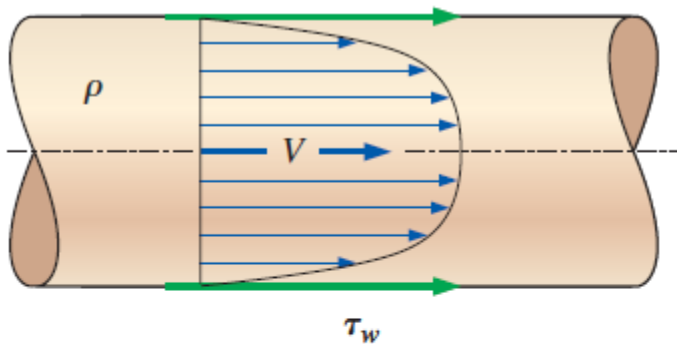
$$\Pi_1 = \tau_w V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \rightarrow \{\Pi_1\} = \{(m^1 L^{-1} t^{-2})(L^1 t^{-1})^{a_1} (L^1)^{b_1} (m^1 L^{-3})^{c_1}\}$$

Buradan $a_1 = -2$, $b_1 = 0$ ve $c_1 = -1$ elde ederiz. Böylece bağımlı Π ,

$$\Pi_1 = \frac{\tau_w}{\rho V^2}$$

olarak bulunur. Tablo 7-5'ten yukarıdaki Π_1 'e en çok benzeyen tanınmış boyutsuz parametre, payında 8 çarpanı ile tanımlanan **Darcy sürtünme faktörü** (Şekil 7-35). Tablo 7-4'te verilen kuralları göz önüne alarak bunun üzerinde değişiklik yapabiliriz.

$$\text{Değiştirilmiş } \Pi_1: \Pi_{1, \text{değiştirilmiş}} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \text{Darcy sürtünme faktörü} = f$$



Darcy sürtünme faktörü:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$$

Fanning sürtünme faktörü:

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho V^2}$$

Boru akışları için en çok kullanılan sürtünme faktörü *Darcy sürtünme faktörü* olmasına rağmen, daha az kullanılan ve *Fanning sürtünme faktörü* olarak adlandırılan alternative bir tanımlama daha vardır. Bu ikisi arasındaki ilişki $f = 4C_f$ olarak verilir.

Benzer şekilde, aşağıda verilen iki tane daha bağımsız Π oluşturulur (ara işlemler size bırakılmıştır):

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \rightarrow \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{Reynolds sayısı} = \text{Re}$$

$$\Pi_3 = \varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3} \rightarrow \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \text{Bağıl pürüzlülük}$$

Adım 6 Nihai fonksiyonel ilişkiyi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (1)$$

İrdeleme Bu sonuç hem laminar hem de türbülanslı tam gelişmiş boru akışı için geçerlidir. Fakat laminar boru akışında, ikinci bağımsız Π (bağıl pürüzlülük ε/D) türbülanslı boru akışında olduğu kadar önemli değildir. Bu problem geometrik benzerlik ile boyut analizi arasındaki ilginç bir bağlantıyı göstermektedir. ε/D 'yi eşleştirmek gereklidir, çünkü bu değer problemde bağımsız Π 'dir. Başka bir açıdan bakılırsa, pürüzlülüğü geometrik benzerlik olarak göz önüne almak, iki boru arasında *geometrik benzerliği* sağlamak için ε/D 'yi de eşleştirmeyi gerektirir

Örnek 7–9'daki Denklem 1'in geçerliliğini doğrulamak için, fiziksel olarak farklı ancak dinamik olarak benzer iki boru akışında hız profillerini ve çeper kayma gerilmelerini belirlemek üzere **hesaplamalı akışkanlar dinamiğini (HAD)** kullanalım:

- İç çapı 0.3048 m ve ortalama pürüz yüksekliği 0.3048 mm olan bir boruda 300 K'de 4.42 m/s ortalama hız ile akan **hava**.
- İç çapı 0.03 m ve ortalama pürüz yüksekliği 0.03 mm olan bir boruda 300 K'de 3.09 m/s ortalama hız ile akan **su**.

Her iki boru da dairesel olduğundan geometric olarak benzer oldukları açıktır.

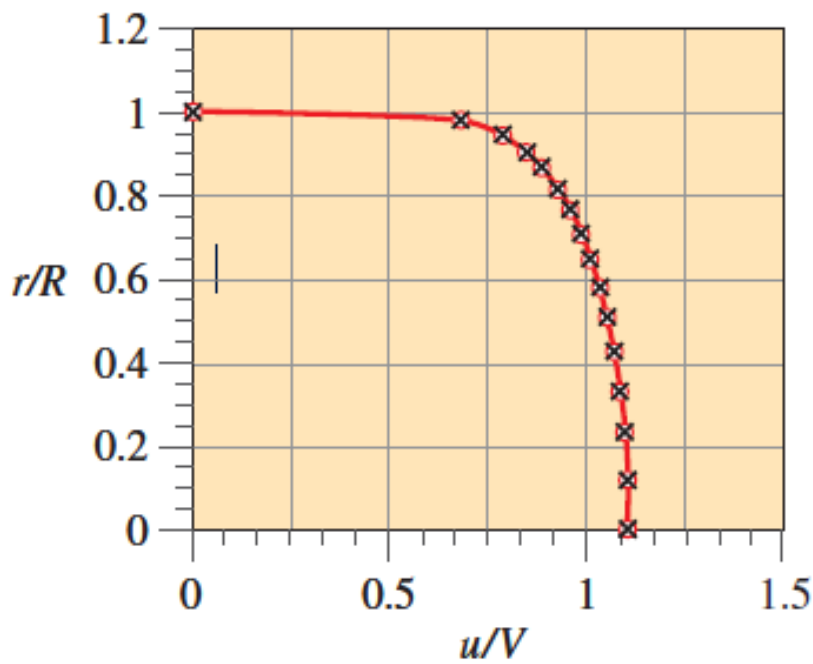
Bağıl pürüzlülükler aynıdır (her iki durumda da $\varepsilon/D = 0.0010$).

Ayrıca *dinamik olarak* benzer olabilmeleri için ortalama hız ve çap değerleri dikkatlice seçilmiştir.

Böylece iki akış arasında diğer bağımsız Π de (Reynolds sayısı) eşleştirilmiştir.

$$Re_{\text{hava}} = \frac{\rho_{\text{hava}} V_{\text{hava}} D_{\text{hava}}}{\mu_{\text{hava}}} = \frac{(1.225 \text{ kg/m}^3)(4.42 \text{ m/s})(0.3048 \text{ m})}{1.789 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 9.22 \times 10^4$$

$$Re_{\text{su}} = \frac{\rho_{\text{su}} V_{\text{su}} D_{\text{su}}}{\mu_{\text{su}}} = \frac{(998.2 \text{ kg/m}^3)(3.09 \text{ m/s})(0.0300 \text{ m})}{0.001003 \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 9.22 \times 10^4$$



Boru içindeki tam gelişmiş türbülanslı akışa ait *normalleştirilmiş* aksenal hız profilinin HAD kullanılarak belirlenmesi; hava (daire) ve suyun (çarpı) hız profilleri aynı grafik üzerinde gösterilmiştir.

İçinden hava ve su akan borulardaki tam gelişmiş akış için HAD* ile hesaplanan çeper kayma gerilmeleri ve boyutsuz çeper kayma gerilmelerinin karşılaştırılması.

Parametre	Hava Akışı	Su Akışı
Çeper kayma gerilmesi	$\tau_{w, \text{hava}} = 0.0557 \text{ N/m}^2$	$\tau_{w, \text{su}} = 22.2 \text{ N/m}^2$
Boyutsuz çeper kayma gerilmesi (Darcy sürtünme faktörü)	$f_{\text{hava}} = \frac{8\tau_{w, \text{hava}}}{\rho_{\text{hava}} V_{\text{hava}}^2} = 0.0186$	$f_{\text{su}} = \frac{8\tau_{w, \text{su}}}{\rho_{\text{su}} V_{\text{su}}^2} = 0.0186$

* Veriler, duvar fonksiyonlu standart k-ε türbülans modeli kullanılarak ANSYS-FLUENT ile elde edilmiştir.

7–5 ■ DENEYSEL TEST YAPMA, MODELLEME VE TAM OLMAYAN BENZERLİK

Boyut analizinin en faydalı uygulamalarından biri de fiziksel ve/veya sayısal deneylerin tasarlanması ve sonuçlarının raporlanmasıdır.

Bu kısımda bu uygulamaların her ikisi de verilerek tam dinamik benzerliğin elde edilemeyeceği durumlara işaret edilecektir.

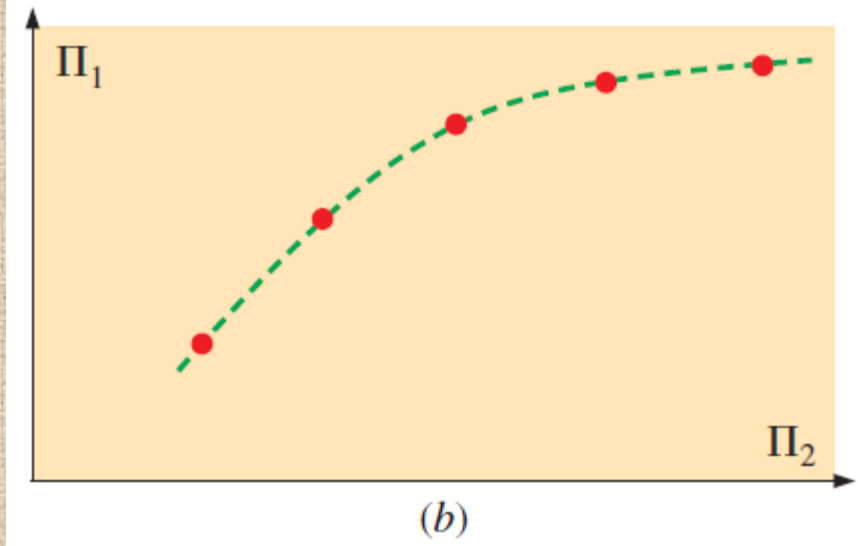
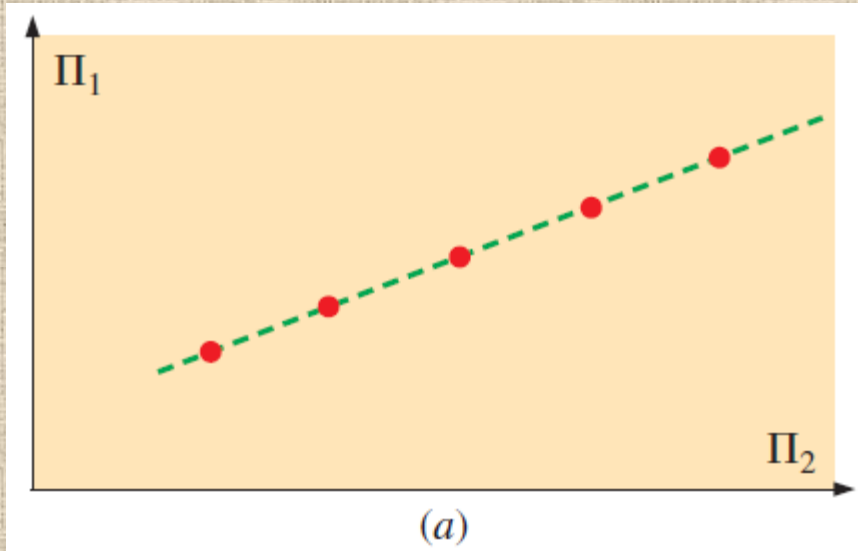
Bir Deneyin Kurulumu ve Deneysel Verilerin Korelasyonu

Genel bir örnek olması açısından biri *bağımlı* parametre olmak üzere toplam beş parametrenin olduğu bir problem ele alalım.

Dört bağımsız parametrenin her birinin beş seviyeli **tam faktöriyel** testi toplam $5^4 = 625$ deney gerektirir.

Ancak problemde üç ana boyutun verildiğini kabul ederek parametre sayısını beşten ikiye ($k = 5 - 3 = 2$ tane boyutsuz Π grubu), yani bağımsız parametrelerin sayısını dörtten bire indirebiliriz.

Böylece aynı çözüm için (her bir bağımsız parametrenin beş test seviyesi) sadece $5^1 = 5$ deney yapmamız gerekecektir.



İki- Π problemi için bağımlı boyutsuz parametre (Π_1), bağımsız boyutsuz parametrenin (Π_2) fonksiyonu olarak çizilir. Ortaya çıkan grafik (a) lineer veya (b) eğrisel olabilir. Her iki durumda Π 'ler arasındaki ilişkiyi belirlemek için regresyon analizi veya eğri uydurma teknikleri kullanılabilir.

Eğer problemde ikiden fazla Π varsa (üç- Π veya dört- Π 'li problem vs.) bağımlı Π ile bağımsız Π 'ler arasındaki ilişkiyi bulmak için test matrisi oluşturmamız gerekir. Çoğu zaman bağımlı Π 'lerin bir veya daha fazlasının etkilerinin ihmal edilebilir olduğu görülür. Bundan dolayı bunlar boyutsuz parametre listesinden çıkarılabilir.

Tam Olmayan Benzerlik

Tekrarlayan değişkenler yöntemini uygulayarak boyutsuz Π gruplarının sadece kağıt-kalem kullanılarak kolayca elde edilebildiği birkaç örnek verdik.

Aslında yeteri kadar uygulama yaptıktan sonra Π 'leri bazen aklınızdan, bazen de bir müsvette kağıdına yapacağınız basit işlemler ile kolayca bulabilirsiniz.

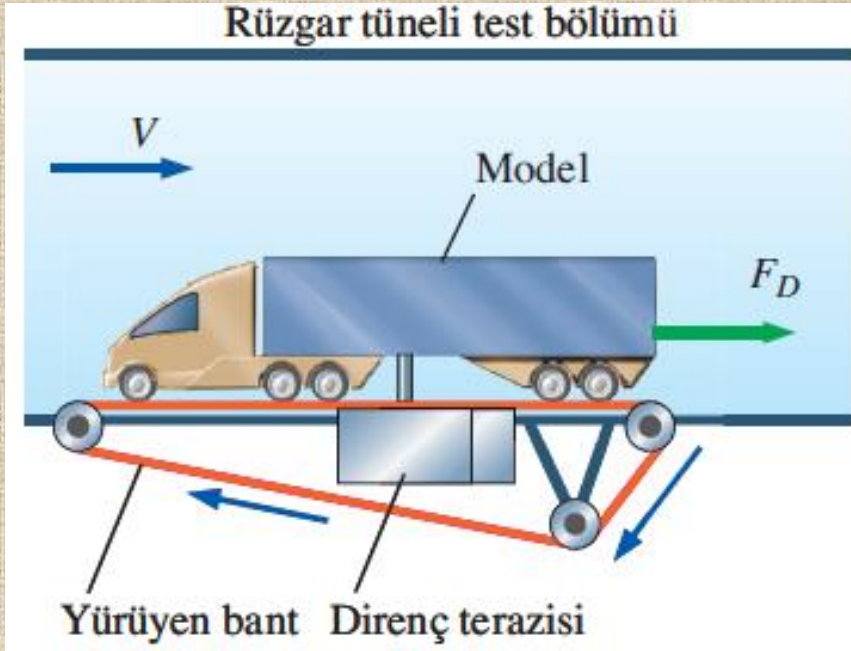
Ne yazık ki boyut analizinin sonuçlarını deneysel verilere uygulama yoluna gittiğimizde sık sık başka bir durum ile karşılaşırız.

Buradaki problem şudur: Geometrik benzerliği elde etmek için çok dikkatli davranmış olsak bile, modelin tüm Π 'lerini prototipte bunlara karşılık gelen Π 'lerle eşleştirmek her zaman mümkün olmayabilir.

Bu duruma **tam olmayan benzerlik** denir.

Neyse ki bazı tam olmayan benzerlik durumlarında tam-ölçekli prototip verilerini tahmin etmek için model test verilerinin ekstrapolasyonu yapılabilir.

Rüzgar Tüneli Testi



Zemin düzleminde *direnç terazisi* ve *yürüyen bant* bulunan bir rüzgar tünelindeki TIR modeline etkiyen aerodinamik direnç kuvvetinin ölçümü.

Tam olmayan benzerliği, rüzgar tüneline yerleştirilen tır modeline etkiyen aerodinamik direnç kuvvetinin ölçülmesi probleminde açıklayalım.

1/16 ölçekli.

Model prototipe geometrik olarak benzemektedir.

Tır modelinin uzunluğu 0.991 m'dir. Tır modeli, maksimum hızı 70 m/s olan bir rüzgar tünelinde test edilecektir.

Rüzgar tünelinin test bölümünün yüksekliği 1.0 m ve genişliği 1.2 m'dir.

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = Re_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

$$V_m = V_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{L_p}{L_m} \right) = (26.8 \text{ m/s})(1)(1) \left(\frac{16}{1} \right) = 429 \text{ m/s}$$

Modelin Reynolds sayısı ile prototipin Reynolds sayısını, bu model ve rüzgar tüneli imkanlarıyla eşleştirmek mümkün görünmüyor.

Peki bu durumda ne yapılabilir? Hala birkaç seçeneğimiz daha var:

(1) Daha büyük rüzgar tüneli kullanmak. Otomobil imalatçıları çok büyük rüzgar tünelleri kullanırlar ve genellikle otomobiller için $3/8$ ölçekli, kamyon ve otobüsler için ise $1/8$ ölçekli modelleri test ederler.

(2) Model testleri için farklı bir akışkan kullanabiliriz. Örneğin su tünelleri, aynı ebattaki rüzgar tünellerinde elde edilebilecek Reynolds sayılarının çok daha üzerine çıkabilir ancak su tünellerinin inşa edilmesi ve çalıştırılması çok daha masraflıdır

(3) Ulaşılabilen maksimum Reynolds sayısını arttırmak için rüzgar tüneline basıncı arttırabilir ve/veya hava sıcaklığını değiştirebiliriz.

(4) Eğer yukarıdaki yöntemler yetersiz kalırsa, rüzgar tüneli, maksimum hız civarındaki birkaç hız değerinde çalıştırılabilir ve bulunan sonuçlar tam ölçekli Reynolds sayılarına ekstrapolasyon için kullanılabilir.

Neyse ki çoğu rüzgar tüneli testleri için son seçenek önemli bir hata oluşturmaksızın uygulanabilir.

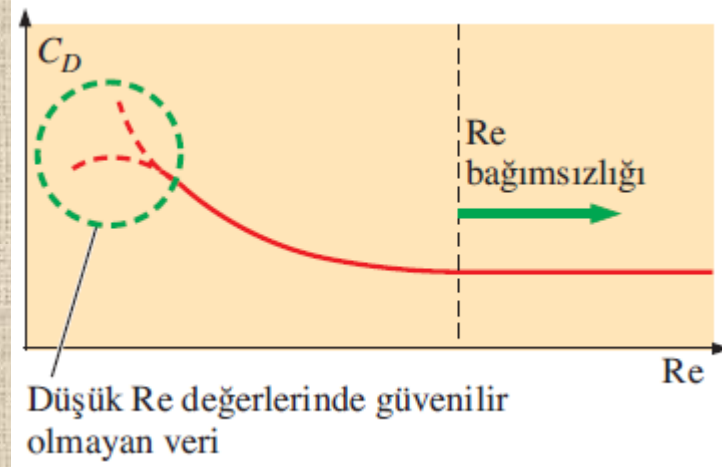


(a)



(b)

(a) Langley tam ölçekli rüzgar tüneli (LTRT) tam ölçekli taşıtların test edilebileceği kadar büyüktür. (b) aynı ölçek ve model hızı için su tünellerinde rüzgar tünellerine göre daha yüksek Reynolds sayısı elde edilir.



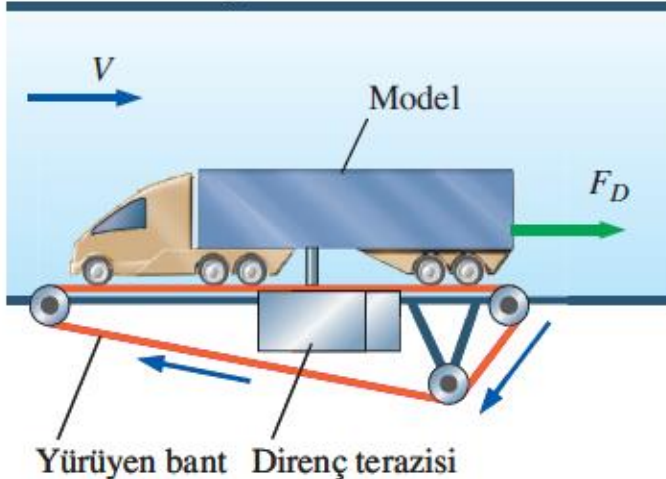
Birçok cisim için direnç katsayısı Reynolds sayısının bir eşik değerinden sonra değişmez. İşleri kolaylaştıran bu duruma **Reynolds sayısı** bağımsızlığı denir. Bu durum deney imkanlarımızın dışındaki bölgelere ait sonuçların, prototip Reynolds sayısına ekstrapolasyon yapılarak bulunmasına olanak sağlar.

ÖRNEK 7-10

Tır Modeline Ait Rüzgar Tüneli Ölçümleri

Şekil 7-38'de gösterildiği gibi rüzgar tünelinde 1/16 ölçekli bir tır modeli test edilmektedir. Tır modelin uzunluğu 0.991 m, yüksekliği 0.257 m ve genişliği 0.159 m'dir. Testler sırasında yürüyen zemin bandının hızı test bölgesinde hareket eden havanın hızı ile aynı olacak şekilde ayarlanmaktadır. Aerodinamik direnç kuvveti F_D rüzgar tüneli hızına bağlı olarak ölçülmüş ve deney sonuçları Tablo 7-1'de verilmiştir. Direnç katsayısı C_D 'yi Reynolds sayısına bağlı olarak çiziniz. Burada C_D 'nin hesaplanması için kullanılan alan, tır modelinin ön bakış alanıdır (modelin yukarıya doğru akış yönünden bakıldığında görülen alan) ve Re 'nin hesaplanması için kullanılan uzunluk ölçeği tırın genişliği W 'dur. Buna göre dinamik benzerlik elde edilmiş midir? Rüzgar tüneli testinde Reynolds sayısının bağımsızlığı sağlanmış mıdır? Otoyolda 26.8 m/s hızla giden prototip tırın üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetini hesaplayınız. Prototip otomobil üzerinde ve rüzgar tünelinde akan havanın 25 °C'de ve standart atmosfer basıncında olduğunu kabul ediniz.

Rüzgar tüneli test bölümü



Zemin düzleminde *direnç terazisi* ve *yürüyen bant* bulunan bir rüzgar tünelindeki tır modeline etkiyen aerodinamik direnç kuvvetinin ölçümü.

Özellikler Atmosfer basıncında ve $T = 25^\circ\text{C}$ 'deki hava için $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$ ve $\mu = 1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ 'dir.

Analiz Tablo 7-7'de listelenen son veri noktası için (en yüksek rüzgar tüneli hızı) C_D ve Re 'yi hesaplayalım:

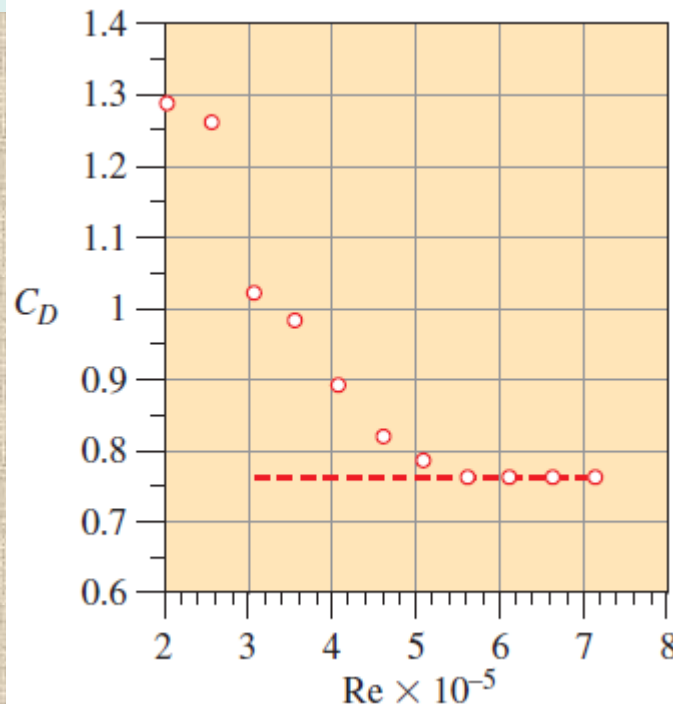
$$C_{D,m} = \frac{F_{D,m}}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 A_m} = \frac{89.9 \text{ N}}{\frac{1}{2}(1.184 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s})^2(0.159 \text{ m})(0.257 \text{ m})} \left(\frac{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right)$$
$$= 0.758$$

ve

$$\text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m W_m}{\mu_m} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s})(0.159 \text{ m})}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 7.13 \times 10^5 \quad (1)$$

Rüzgar tüneli verileri: Tır modeli üzerine etkiyen aerodinamik direnç kuvvetinin rüzgar tüneli hızına bağlı değişimi.

$V, \text{ m/s}$	$F_D, \text{ N}$
20	12.4
25	19.0
30	22.1
35	29.0
40	34.3
45	39.9
50	47.2
55	55.5
60	66.0
65	77.6
70	89.9



Aerodinamik direnç katsayısının Reynolds sayısına bağlı olarak değişimi. Değerler TIR modeli üzerinden alınan rüzgar tüneli test verilerinden hesaplanmıştır.

Bu işlemleri Tablo 7–7'deki tüm veri noktaları için tekrarlayıp $C_D - Re$ değişimini Şekil 7–41'de gösterildiği gibi çizebiliriz.

Peki dinamik benzerliği elde etmiş olduk mu? Model ve prototip arasında *geometrik* benzerlik vardır ancak prototip tırın Reynolds sayısı,

$$Re_p = \frac{\rho_p V_p W_p}{\mu_p} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3)(26.8 \text{ m/s})[16(0.159 \text{ m})]}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 4.37 \times 10^6 \quad (2)$$

olup prototipin genişliği modelin genişliğinin 16 katı olarak belirtilmiştir. Denklem 1 ve 2 karşılaştırıldığında, prototip tırın Reynolds sayısının modelin Reynolds sayısının altı katından daha büyük olduğu görülmektedir. Problemdeki bağımsız Π 'leri eşleştiremediğimiz için **dinamik benzerlik elde edilememiştir**.

Acaba Reynolds sayısı bağımsızlığı elde edilmiş midir? Şekil 7–41 incelendiğinde, 5×10^5 'ten biraz daha büyük Re değerinde C_D 'nin 0.76 civarında sabit kaldığı görülmektedir. Buna göre **Reynolds sayısı bağımsızlığı elde edilmiştir**.

Reynolds sayısı bağımsızlığını elde ettiğimize göre, Re tam ölçekli prototipteki değerine arttırılırken C_D 'nin sabit kaldığını kabul ederek, tam ölçekli prototip direnç kuvveti için ekstrapolasyon yapabiliriz:

Prototip üzerinde tahmin edilen aerodinamik direnç kuvveti:

$$\begin{aligned} F_{D,p} &= \frac{1}{2} \rho_p V_p^2 A_p C_{D,p} \\ &= \frac{1}{2} (1.184 \text{ kg/m}^3) (26.8 \text{ m/s})^2 [16^2 (0.159 \text{ m}) (0.257 \text{ m})] (0.76) \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2} \right) \\ &= \mathbf{3400 \text{ N}} \end{aligned}$$

Serbest Yüzeyli Akışlar

Serbest yüzeyli akışların model testleri söz konusu olduğunda (tekne, gemi, sel, nehir akıntıları, su kemerleri, hidroelektrik baraj tahliye kanalları, dalgaların iskeleler ile etkileşimi, toprak erozyonu vb.) model ve prototip arasındaki tam benzerliği zora sokacak problemler baş gösterir.

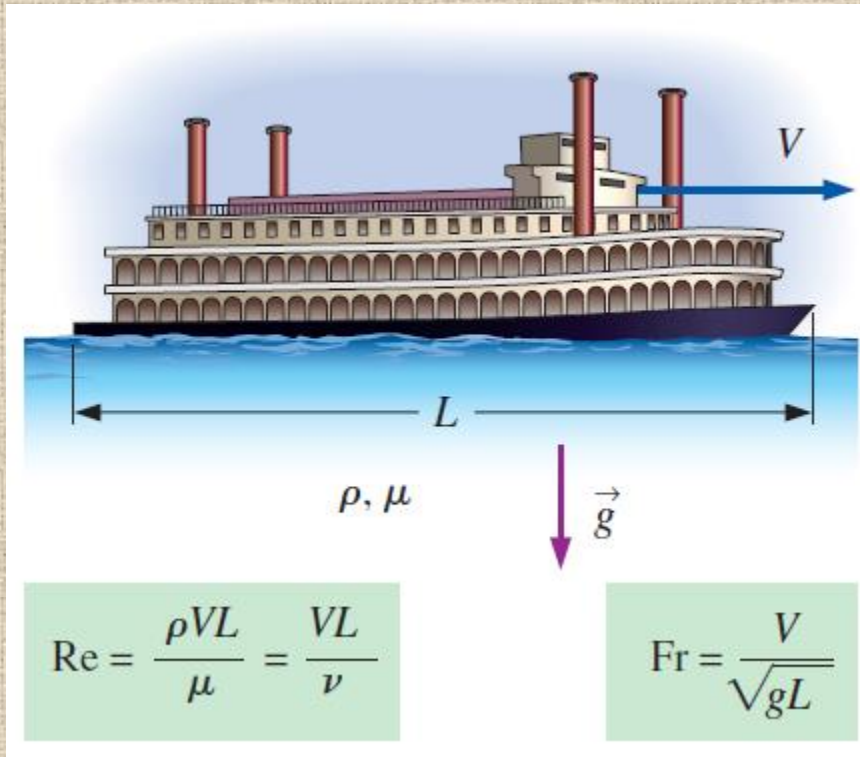
Örneğin seller incelemek amacıyla nehir modeli inşa edilmek istenirse, laboratuvardaki çalışma alanının kısıtlı olmasından dolayı model, prototipten birkaç yüz defa daha küçük olacaktır.

Bu gibi problemlerden kaçmak için araştırmacılar çoğunlukla **çarpıtılmış model** kullanırlar. Bu modelden modelin düşey ölçeği (örneğin nehir derinliği) modelin yatay ölçeğine göre (örneğin, nehir genişliği) daha büyük yapılır.

Buna ek olarak nehir modelinin yatak eğimi, prototipinkinden orantılı bir şekilde daha dik yapılır.

Bu değişiklikler geometric benzerlik eksikliğinden dolayı tam olmayan benzerliğe yol açar.

Bu şartlar altında model testleri yine faydalıdır ancak model verilerini düzgün bir şekilde ölçeklendirmek için başka bir düzenleme (model yüzeylerini kasten pürüzlü hale getirmek gibi), deneysel düzeltmeler ve korelasyonlar gerekir.



Serbest yüzeyli sıvıların söz konusu olduğu çoğu akışlarda Reynolds sayısı ve Froude sayısı önemli iki boyutsuz parametredir. Model ve prototip arasında hem Re hem de Fr 'yi eşleştirmek her zaman mümkün olmadığı için, bazen tam olmayan benzerlik ile yetinmek durumunda kalırız.

$$Re_p = \frac{V_p L_p}{\nu_p} = Re_m = \frac{V_m L_m}{\nu_m}$$

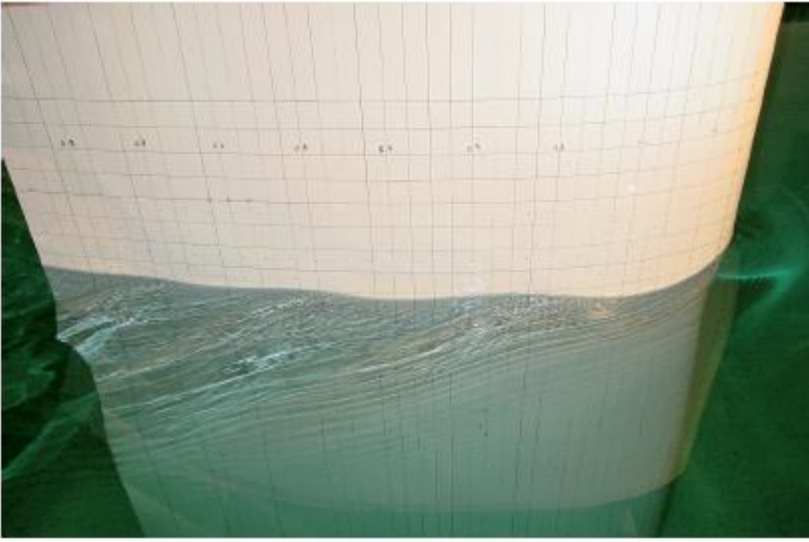
$$Fr_p = \frac{V_p}{\sqrt{g L_p}} = Fr_m = \frac{V_m}{\sqrt{g L_m}}$$

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \frac{V_p}{V_m} = \left(\frac{V_m}{V_p} \right)^2$$

Hem Re hem de Fr 'yi eşleştirmek için gerekli kinematik viskoziteler oranı:

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{3/2}$$

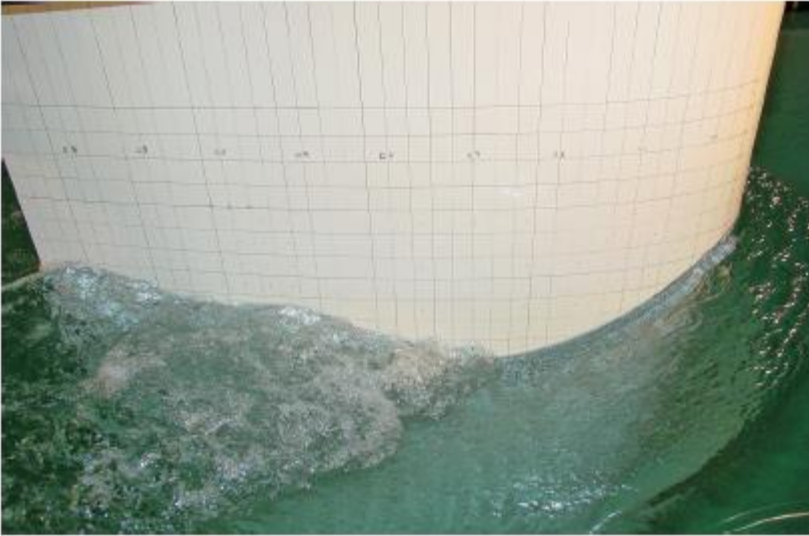
Tam benzerliği elde etmek için kinematik viskozitesi denklemini sağlayan bir sıvı kullanmamız gerekir.



(a)



(c)



(b)

NACA 0024 kanadının model deney tankında test edilmesi (a) $Fr=0.19$, (b) $Fr=0.37$, (c) $Fr=0.55$. Buna benzer testlerde Froude sayısı en önemli boyutsuz parametredir.

ÖRNEK 7-11

Bent ve Nehir Modeli

1990'ların sonunda ABD Ordusu Mühendisler Heyeti, Kentucky bendi ve barajının aşağıakımında Tennessee nehrinin akışını modellemek için bir deney tasarladılar (Şekil 7-44). Laboratuvar yerinin kısıtlamalarından dolayı uzunluk ölçeği $L_m/L_p = 1/100$ olan bir model inşa edilmiştir. Deney için uygun olacak bir sıvı öneriniz.

Düşük bent yaklaşımıyla sefer şartlarını incelemek üzere baraj aşağıakımının 3219 m'lik mesafesi için 1:100 ölçekli bir model inşa edilmiştir. Modelde taşma savağı, güç odası ve mevcut benden ölçekli modelleri bulunmaktadır. Akış seyrine ek olarak bu model, yeni bent ve planlanan demiryolu ve karayolu köprülerinin konumları ile ilgili çevresel konuları da değerlendirmek için kullanılmıştır. Resimdeki görünüş, bent ve baraja doğru yukarıakım tarafından bakılan görünüşdür. Bu ölçekte modeldeki 1 m'lik uzunluk prototipte 1000 m'ye karşılık gelmektedir. Arka planda görülen gerçek boyutlardaki kamyonet, model ölçeği hakkında bir fikir vermektedir.



Özellikler Atmosfer basıncındaki ve $T = 20^{\circ}\text{C}$ 'deki nehir suyunun kinematik viskozitesi $\nu_p = 1.002 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 'dir.

Analiz Denklem 7-24'ten,

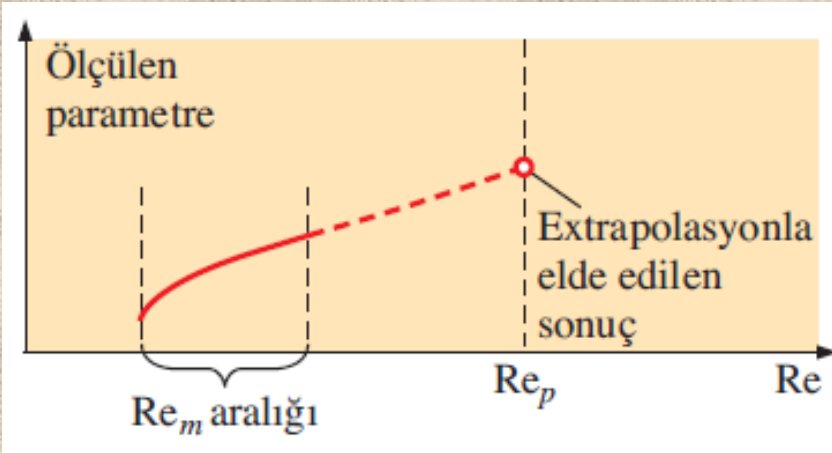
Nehir modelinde kullanılacak sıvı için gerekli kinematik viskozite:

$$\nu_m = \nu_p \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{3/2} = (1.002 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}) \left(\frac{1}{100} \right)^{3/2} = \mathbf{1.00 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}} \quad (1)$$

olarak bulunur. Kinematik viskozitesi $1.00 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir sıvı bulmamız gerekiyor. Kitabın Ekler bölümüne hızlı bir şekilde göz atarsak böyle bir sıvının bulunmadığını görürüz. Sıcak suyun kinematik viskozitesi soğuk suyunkinden düşüktür; ancak sadece üçte biri oranında düşüktür. Sıvı cıvanın kinematik viskozitesi çok düşüktür fakat yine de $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ mertebesinde olduğu için Denklem 1'den iki mertebe daha büyüktür. Sıvı cıva burada işe yarasa da böyle bir testte kullanmak çok pahalı ve tehlikeli olacaktır. Peki ne

yapacağız? Buradan çıkaracağımız sonuç, *hem Froude sayısını hem de Reynolds sayısını eşleştiremeyeceğimize*dir. Diğer bir deyişle bu örnekte model ve prototip arasında tam benzerliği elde etmek imkansızdır. Bunun yerine tam olmayan benzerlik şartları altında elden gelenin en iyisini yapmaya çalışmak gerekir. Böyle testlerde kolaylık bakımından genelde su kullanılır.

İrdeleme Bu tür deneyler için çıkan sonuç Froude sayısını eşleştirmenin Reynolds sayısını eşleştirmekten daha önemli olduğudur. Rüzgar tüneli testlerinde tartışıldığı gibi yeteri kadar yüksek Re değerlerinde Reynolds sayısı bağımsızlığı elde edilir. Reynolds sayısı bağımsızlığı elde edilemese bile, tam ölçekli Reynolds sayısı davranışını tahmin etmek için düşük Reynolds sayısı ile elde ettiğimiz model verilerimizi ekstrapolasyon yapabiliriz (Şekil 7-45). Bu tür ekstrapolasyonun kullanımındaki yüksek güvenilirlik düzeyi, ancak benzer problemlerin ele alındığı birçok laboratuvar deneyiminden sonra elde edilebilir.



Serbest yüzeyli birçok deneyde Froude sayısını ve Reynolds sayısını aynı anda eşleştiremeyiz. Bununla birlikte yüksek Re sayılı prototip davranışını tahmin etmek için çoğu zaman düşük Re sayılı model test verilerini *ekstrapolasyon* yaparız.

Bu bölümü deneyler ve tam olmayan benzerlik ile kapatırken, model botların, trenlerin, uçakların, binaların, canavarların vs. havaya uçurulduğu veya yakıldığı Hollywood filmlerinin yapımında benzerliğin öneminden bahsetmekte fayda vardır.

Film yapımcıları küçük ölçekli yangınları ve patlamaları mümkün olduğu kadar gerçekçi görünür kılmak için dinamik benzerliğe dikkat etmelidirler. Özel efektlerin inandırıcı görünmediği düşük bütçeli bazı filmleri hatırlarsınız.

Bu durum çoğunlukla küçük model ile tam ölçekli prototip arasındaki dinamik benzerliğin eksikliğinden kaynaklanır.

Eğer modelin Froude sayısı ve/veya Reynolds sayısı prototip değerlerinden çok uzaklaşırsa, özel efektler sıradan gözlere bile gerçekçi görünmez.

Bir dahaki sefere film seyrederken benzerliğin dikkate alınmamasından doğan hataları bulmaya çalışın!

Özet

- Boyutlar ve birimler
- Boyutsal homojenlik
 - ✓ Denklemlerin boyutsuzlaştırılması
- Boyut analizi ve benzerlik
- Tekrarlayan değişkenler yöntemi ve Buckingham Pi teoremi
- Deneysel test yapma, modelleme ve tam olmayan benzerlik
 - ✓ Bir deneyim kurulumu ve Deneysel verilerin korelasyonu
 - ✓ Tam olmayan benzerlik
 - ✓ Rüzgar tüneli testi
 - ✓ Serbest yüzeyli akışlar