

AKM 205 – BÖLÜM 7 - UYGULAMA SORU VE ÇÖZÜMLERİ

Doç.Dr. Ali Can Takinacı

Ar.Gör. Yük. Müh. Murat Özbulut

1. Askeri amaçlı hafif bir paraşüt tasarlanmaktadır. Çapı 7.3 m, deney yükü, paraşüt ve donanım ağırlığı 1023 N'dur. Bu ağırlık için paraşütün tasarımında esas alınan *limit iniş hızı* $V_t = 6.1$ m/s'dir. Rüzgar tüneline 1/12 ölçekli model test edilecek olup tüneline sıcaklığı ve basıncı prototipininkiyle aynıdır. (15.5°C ve standart atmosferik basınç) (a) Prototipin direnç katsayısını hesaplayınız. (İpucu: Limit iniş hızında ağırlık, aerodinamik direnç ile dengelenir) (b) Dinamik benzerliği elde etmek için rüzgar tüneli hangi hızda çalıştırılmalıdır? (c) Rüzgar tüneline model paraşütün aerodinamik direncini hesaplayınız.

Çözüm: 15.5°C ve standart atmosferik basınçta havanın yoğunluğu 1.22 kg/m^3 viskozitesi $8.16 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms}$ alınacaktır. Direnç katsayısı:

$$C_D = \frac{F_{D,p}}{\frac{1}{2} \rho_p V_p^2 A_p}$$
$$C_D = \frac{1023}{0.5 * 1.22 * 6.1^2 (\pi 7.3^2)/4} = 1.07$$

(b) Model ve prototipi eşleştirmek için Reynolds benzerliğini kuralıyız:

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = Re_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

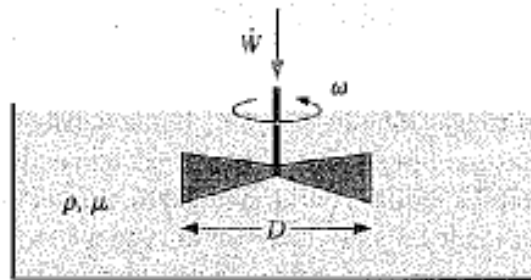
Buradan model hızını çekersek:

$$V_m = V_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{L_p}{L_m} \right)$$

$$V_m = 6.1 * 1 * 1 * 12 = 73.2 \text{ m/s}$$

(c) Akışkan aynı olduğu ve dinamik benzerlik kurulduğu için model ile prototipin direnç kuvveti aynıdır.

2. Büyük bir tanktaki kimyasal maddeyi karıştırmak için bir karıştırıcı kullanılmaktadır. Karıştırıcının kanatlarına verilen mil gücü $\dot{W}$; karıştırıcı çapı D , sıvı yoğunluğu ρ , sıvı viskozitesi μ ve dönen kanatların açısal hızı ω 'nın bir fonksiyonudur. Bu parametreler arasında boyutsuz bir ilişki oluşturmak için tekrarlayan değişkenler yöntemini kullanınız. Tüm işlemlerinizi gösteriniz ve gerektiğinde değişiklik yapmak için π gruplarınızı tespit ettiğinizden emin olunuz.



Çözüm: Problemde 5 parametre verilmiştir ve bu parametreleri kullanarak boyut analizi yapacağız:

$$\dot{W} = f(\omega, \rho, \mu, D) \quad n = 5$$

$\dot{W}$	ω	ρ	μ	D
$\{m^1 L^2 t^{-3}\}$	$\{t^{-1}\}$	$\{m^1 L^{-3}\}$	$\{m^1 L^{-1} t^{-1}\}$	$\{L^1\}$

İlk tahmin olarak $j = 3$ alalım. Eğer bu tahmin doğruysa beklenen π grubu sayısı:

$$k = n - j = 5 - 3 = 2$$

Şimdi 3 adet tekrarlanan parametre bulmalıyız. Bu parametreleri ρ , ω ve D olarak seçelim. Bağımlı π grubu:

$$\Pi_1 = \dot{W} \omega^{a_1} \rho^{b_1} D^{c_1} \quad \{\Pi_1\} = \left\{ (m^1 L^2 t^{-3}) (t^{-1})^{a_1} (m^1 L^{-3})^{b_1} (L^1)^{c_1} \right\}$$

$$mass: \quad \{m^0\} = \{m^1 m^{b_1}\} \quad 0 = 1 + b_1 \quad b_1 = -1$$

$$time: \quad \{t^0\} = \{t^{-3} t^{-a_1}\} \quad 0 = -3 - a_1 \quad a_1 = -3$$

$$length: \quad \{L^0\} = \{L^2 L^{-3b_1} L^{c_1}\} \quad 0 = 2 - 3b_1 + c_1 \quad c_1 = -5$$

$$\Pi_1 = \frac{\dot{W}}{\rho D^5 \omega^3} = N_P$$

İkinci π grubu, problemdeki tek bağımsız parametreyi kullanarak oluşturulur:

$$\Pi_2 = \mu \omega^{a_2} \rho^{b_2} D^{c_2} \quad \{\Pi_2\} = \left\{ (m^1 L^{-1} t^{-1}) (t^{-1})^{a_2} (m^1 L^{-3})^{b_2} (L^1)^{c_2} \right\}$$

$$mass: \quad \{m^0\} = \{m^1 m^{b_2}\} \quad 0 = 1 + b_2 \quad b_2 = -1$$

$$time: \quad \{t^0\} = \{t^{-1} t^{-a_2}\} \quad 0 = -1 - a_2 \quad a_2 = -1$$

$$length: \quad \{L^0\} = \{L^{-1} L^{-3b_2} L^{c_2}\} \quad \begin{aligned} 0 &= -1 - 3b_2 + c_2 \\ 0 &= -1 + 3 + c_2 \end{aligned} \quad c_2 = -2$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho D^2 \omega}$$

$D\omega$ kanatların ucundaki teğetsel hız olduğundan Π_2 grubu Reynolds sayısının tersi olur.

$$\Pi_2 = \frac{\rho D^2 \omega}{\mu} = \frac{\rho (D\omega) D}{\mu} = \text{Reynolds number} = \text{Re}$$

Böylece Π 'ler arasındaki bağıntı:

$$N_p = f(\text{Re})$$

3. Sığ su dalgaları içeren bir problemde hem Froude sayısı hem de Reynolds sayısının ilgili boyutsuz parametreler olduğunu boyut analizini kullanarak gösteriniz. Sıvı yüzeyindeki dalgaların hızı c ; derinlik h , yerçekimi ivmesi g , akışkan yoğunluğu ρ ve akışkan viskozitesi μ 'nün bir fonksiyonudur. Parametreleri aşağıdaki gibi elde etmek için Π 'leriniz üzerinde gerekli manipülasyonları yapınız:

$$\text{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}} = f(\text{Re}) \quad \text{burada} \quad \text{Re} = \frac{\rho c h}{\mu} \text{ dir.}$$

İlgili parametreler:

$$\begin{array}{ccccc} c & h & \rho & \mu & g \\ \{L^1 t^{-1}\} & \{L^1\} & \{m^1 L^{-3}\} & \{m^1 L^{-1} t^{-1}\} & \{L^1 t^{-2}\} \end{array} \quad c = f(h, \rho, \mu, g) \quad n = 5$$

İlk tahmin olarak $j = 3$ alalım. Eğer bu tahmin doğruysa beklenen Π grubu sayısı:

$$k = n - j = 5 - 3 = 2$$

Şimdi 3 adet tekrarlanan parametre bulmalıyız. Bu parametreleri ρ , h ve g olarak seçelim. Bağımlı Π grubu:

$$\Pi_1 = \text{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}}$$

$$\Pi_2 = \mu h^a \rho^b g^c \quad \{\Pi_2\} = \left\{ (m^1 L^{-1} t^{-1}) (L^1)^a (m^1 L^{-3})^b (L^1 t^{-2})^c \right\}$$

$$\text{mass:} \quad \{m^0\} = \{m^1 m^b\} \quad 0 = 1 + b \quad b = -1$$

$$\text{time:} \quad \{t^0\} = \{t^{-1} t^{-2c}\} \quad 0 = -1 - 2c \quad c = -\frac{1}{2}$$

$$\text{length:} \quad \{L^0\} = \{L^{-1} L^a L^{-3b} L^c\} \quad \begin{array}{l} 0 = -1 + a - 3b + c \\ 0 = -1 + a + 3 - \frac{1}{2} \end{array} \quad a = -\frac{3}{2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho h^{\frac{3}{2}} \sqrt{g}}$$

Bu Π grubunu ters çevirip ilk Π ile çarparsak Re sayısını elde ederiz:

$$\Pi_2 = \text{Re} = \frac{\rho ch}{\mu}$$

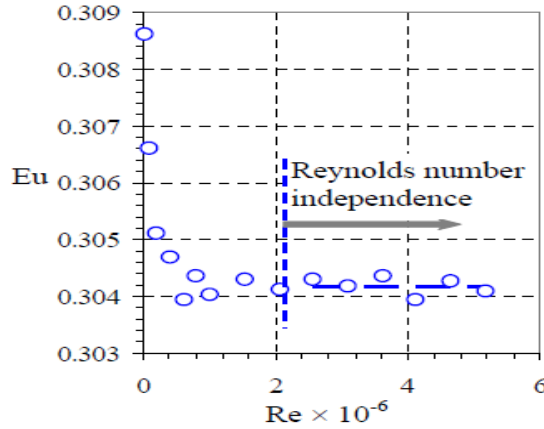
4. Sıcaklığı 20°C olan su uzun düzgün bir boru içinden akmaktadır. Borunun $L = 1.3$ m'lik kısmı boyunca olan basınç düşüşü, borudaki ortalama hız V 'nin fonksiyonu olarak ölçülmüştür. Borunun iç çapı $D = 10.4$ cm'dir. (a) Verileri boyutsuzlaştırınız ve Euler sayısını Reynolds sayısının fonksiyonu olarak çiziniz. Deney, Reynolds sayısı bağımsızlığını elde etmek için yeteri kadar yüksek hızda yapılmış mıdır? (b) 80 m/s'lik bir ortalama hızda oluşan basınç düşüşünü kestirmek için deneysel verilere ekstrepolasyon uygulayınız.

$V, \text{m/s}$	$\Delta P, \text{N/m}^2$
0.5	77
1	306
2	1218
4	4865
6	10920
8	19440
10	30340
15	68330
20	121400
25	189800
30	273200
35	372100
40	485300
45	614900
50	758700

Çözüm: 20°C ve atmosferik basınçta suyun yoğunluğu 998 kg/m^3 ve viskozitesi $1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$ 'dir. Tablodaki en yüksek hız için Reynolds ve Euler sayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(998.0 \text{ kg/m}^3)(50 \text{ m/s})(0.104 \text{ m})}{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 5.18 \times 10^6$$

$$\text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{758,700 \text{ N/m}^2}{(998.0 \text{ kg/m}^3)(50 \text{ m/s})^2} \left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{N}} \right) = 0.304$$



(b) Yüksek hızlar için Euler sayısının sabit kaldığını varsayarak ΔP değerini ekstrepolasyon ile hesaplayabiliriz:

$$\Delta P = Eu \times \rho V^2 = 0.3042 (998.0 \text{ kg/m}^3) (80 \text{ m/s})^2 \left(\frac{\text{s}^2 \text{N}}{\text{kg m}} \right) = 1,940,000 \text{ N/m}^2$$

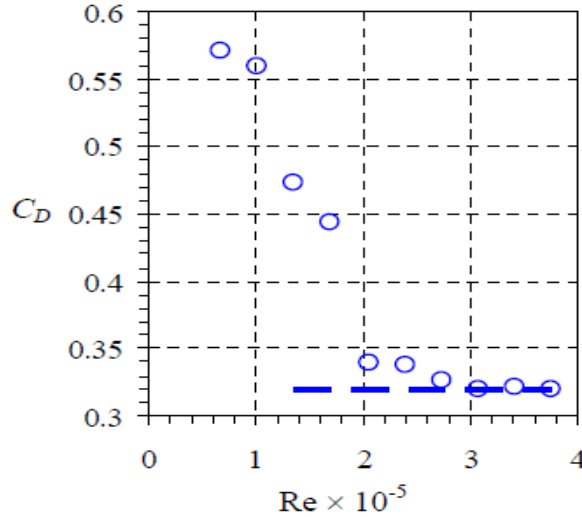
5. Rüzgar tüneline yeni bir spor arabanın 1/16 ölçekli modeli test edilmektedir. Prototip araba 4.37 m uzunluğunda, 1.30 m yüksekliğinde ve 1.69 m genişliğindedir. Testler sırasında, test bölümü boyunca hava hızını sürekli olarak eşleştirmek için, hareketli zemin bandının hızı ayarlanmaktadır. Aerodinamik direnç kuvveti F_D ; rüzgar tüneli hızın fonksiyonu olarak ölçülmüş olup deney sonuçları aşağıda verilmiştir. Direnç katsayısı C_D 'yi Reynolds sayısı cinsinden grafik çizerek gösteriniz, C_D 'nin hesaplanmasında kullanılan alan, model arabanın ön bakış alanıdır. (A = genişlik x yükseklik kabul ediniz) ve Re hesaplanmasında kullanılan uzunluk ölçeği arabanın genişliği W 'dur. Dinamik benzerlik sağlanmış mıdır? Rüzgar tüneli testinde Reynolds sayısı bağımsızlığına ulaşılmış mıdır? Karayolunda 29 m/s'lik hızla yol alan prototip araba üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetini belirleyiniz. Hem rüzgar tüneli havasının hem de prototip araba üzerinde akan havanın sıcaklığını 25°C ve basıncını atmosferik basınç kabul ediniz.

$V, \text{ m/s}$	$F_D, \text{ N}$
10	0.29
15	0.64
20	0.96
25	1.41
30	1.55
35	2.10
40	2.65
45	3.28
50	4.07
55	4.91

25°C ve atmosferik basınçta suyun yoğunluğu 1.184 kg/m³ ve viskozitesi 1.002x10⁻³ kg/ms'dir. Tabloda verilen en yüksek hız için direnç katsayısı ve Reynolds sayısı:

$$C_{D,m} = \frac{F_{D,m}}{\frac{1}{2} \rho_m V_m^2 A_m} = \frac{4.91 \text{ N}}{\frac{1}{2} (1.184 \text{ kg/m}^3) (55 \text{ m/s})^2 \frac{(1.69 \text{ m})(1.30 \text{ m})}{16^2}} \left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{ N}} \right) = 0.319$$

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m W_m}{\mu_m} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3) (55 \text{ m/s}) \left(\frac{1.69}{16} \text{ m} \right)}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 3.72 \times 10^5$$



Model ile prototip arasında kinematik benzerlik sağlanmasına rağmen dinamik benzerlik sağlanamamıştır. Çünkü prototipin Reynolds sayısı:

$$Re_p = \frac{\rho_p V_p W_p}{\mu_p} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3) (29 \text{ m/s}) (1.69 \text{ m})}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 3.14 \times 10^6$$

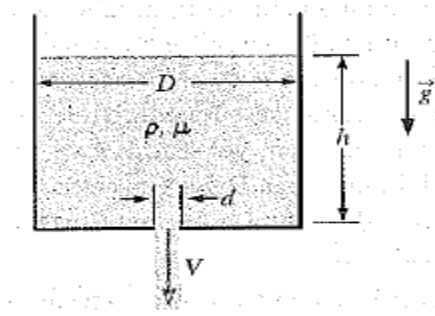
Görüldüğü gibi prototipin Re sayısı modelin Re sayısından yaklaşık olarak 8 kat daha büyüktür. Dolayısıyla dinamik benzerlik kurulamamıştır.

Re sayısından bağımsızlığına 3×10^5 değerinden sonra ulaşılmıştır ve bu değerden sonra C_D katsayısı yaklaşık olarak 0.32 olarak kalmaktadır. Böylece prototip üzerindeki aerodinamik direnç kuvveti:

$$F_{D,p} = \frac{1}{2} \rho_p V_p^2 A_p C_{D,p}$$

$$= \frac{1}{2} (1.184 \text{ kg/m}^3) (29 \text{ m/s})^2 (1.69 \text{ m})(1.30 \text{ m}) 0.32 \left(\frac{\text{s}^2 \text{ N}}{\text{kg m}} \right) = 350 \text{ N}$$

6. Yoğunluğu ρ viskozitesi μ olan bir sıvı, çapı D olan tankın tabanında yer alan d çapındaki bir delikten yerçekiminin etkisi ile akmaktadır. Deneyin başlangıcında, sıvı yüzeyinin yüksekliği tankın tabanından itibaren şekilde çizildiği gibi h kadardır. Ayrıca sıvı, çizimde gösterildiği gibi tanktan tam aşağıya doğru, jet halinde V ortalama hızı ile boşalmaktadır. Problemdeki diğer parametrelerin fonksiyonu olarak V için boyut analizini kullanarak boyutsuz bir ilişki kurunuz. Sonucunuzda ortaya çıkan tanınmış boyutsuz parametrelerin her birini tespit ediniz. (İpucu: Bu problemde üç tane uzunluk ölçeği vardır: Tutarlılık bakımından uzun ölçeği olarak h 'yi seçiniz.)



Çözüm: Problemden 7 tane parametre bulunmaktadır.

$$V = f(d, D, \rho, \mu, h, g) \quad n = 7$$

V	d	D	ρ	μ	h	g
$\{L^1 t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1 L^{-3}\}$	$\{m^1 L^{-1} t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1 t^{-2}\}$

İlk tahmin olarak $j = 3$ olarak alalım (m, L ve t boyutlarını göz önünde bulundurarak)

Beklenen π sayısı:

$$k = n - j = 7 - 3 = 4$$

Tekrarlanan parametreleri h, g ve ρ olarak seçelim. Bağımlı π 'leri aşağıdaki gibi seçelim:

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad \Pi_2 = \frac{d}{h} \quad \Pi_3 = \frac{D}{h}$$

Son π ifadesi viskozite ile birlikte oluşturulur:

$$\Pi_4 = \mu h^{a_4} \rho^{b_4} g^{c_4} \quad \{\Pi_4\} = \left\{ (m^1 L^{-1} t^{-1}) (L^1)^{a_4} (m^1 L^{-3})^{b_4} (L^1 t^{-2})^{c_4} \right\}$$

$$\text{mass:} \quad \{m^0\} = \{m^1 m^{b_4}\} \quad 0 = 1 + b_4 \quad b_4 = -1$$

$$\text{time:} \quad \{t^0\} = \{t^{-1} t^{-2c_4}\} \quad 0 = -1 - 2c_4 \quad c_4 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{length:} \quad \{L^0\} = \{L^{-1} L^{a_4} L^{-3b_4} L^{c_4}\} \quad \begin{aligned} 0 &= -1 + a_4 - 3b_4 + c_4 \\ 0 &= -1 + a_4 + 3 - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad a_4 = -\frac{3}{2}$$

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{\rho h^{\frac{3}{2}} \sqrt{g}}$$

Bu ifadeyi biraz daha düzenlersek:

$$\Pi_4 = \frac{\rho h \sqrt{gh}}{\mu}$$

Son olarak π ifadeleri arasındaki ilişkiyi yazalım:

$$\frac{V}{\sqrt{gh}} = f\left(\frac{d}{h}, \frac{D}{h}, \frac{\rho h \sqrt{gh}}{\mu}\right)$$