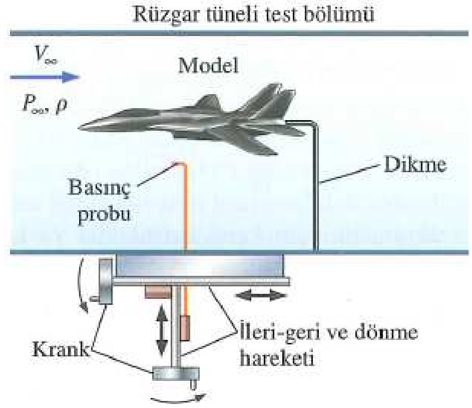
AKM 204-Bölüm 7-Uygulama Soru ve Çözümleri

1. Şekildeki rüzgar tüneli, bir uçak üzerinden akan havadaki basınç dağılımını ölçmek için kullanılmaktadır. Rüzgar tünelindeki hava hızı sıkıştırabilme etkisi ihmal edilebilecek ölçüde düşüktür. Bölüm 5'te açıklandığı gibi Bernoulli denklemi böyle bir akış durumunda uçağın ve rüzgar tünelinin duvar yüzeylerine çok yakın olan bölgeler ile modelin arkasındaki art izi bölgesi dışındaki her yerde geçerlidir. Modelden çok uzakta hava V_∞ hızı ve P_∞ basıncı ile akmaktadır ve hava yoğunluğu ρ yaklaşık olarak sabit kalmaktadır. Hava akışlarında yerçekimi etkisi genellikle ihmal edilebilir. Buna göre Bernoulli denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:



$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$$

Bu denklemi boyutsuzlaştırınız ve Bernoulli denkleminin geçerli olduğu akışın herhangi bir noktasındaki **basınç katsayısı C_p** için bir ifade oluşturunuz. C_p aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

Kabuller:

1. Akış sıkıştırılamazdır.

2. Bernoulli denklemindeki yerçekimi terimleri, diğer terimlere kıyasla ihmal edilebilir düzeydedir.

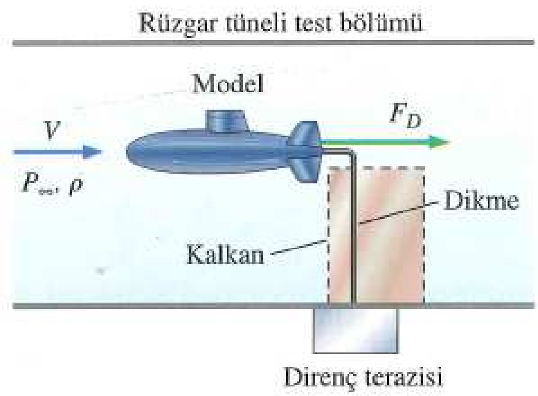
Çözüm: Bernoulli denklemini her bir terimi dinamik basınç ile bölerek boyutsuzlaştırıyoruz.

Dinamik basınç: $\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2$

Boyutsuzlaştırma: $\frac{P}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2} + \frac{V^2}{V_\infty{}^2} = \frac{P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty{}^2} + 1$

Düzenlersek; $C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty{}^2}$

2. Bir grup öğrenci tasarım yarışmasında insan gücüyle çalışan denizaltı tasarlayacaktır. Prototip denizaltının toplam uzunluğu 4.85 m olup, öğrenciler bunun suya tamamen dalmış halde 0.440 m/s'lik bir hız ile hareket edebileceğini umuyorlar. Akışkan T= 15°C'de tatlı sudur (göl suyu). Tasarım grubu, üniversitelerinin rüzgar tünelinde test etmek üzere denizaltının 1/5 ölçekli modelini yapıyor. Direnç terazisi dikmesini çevreleyen bir kalkan vardır. Böylece dikmenin aerodinamik direnci, ölçülen direnci etkilememektedir. Rüzgar tünelindeki hava 25°C'de ve 1 atm standart atmosfer basıncındadır. Benzerliği elde edebilmek için öğrenciler rüzgar tünelini hangi hava hızında çalıştırmalıdırlar?



Kabuller:

1. Havanın sıkıştırılabilirliği ihmal edilmiştir.

2. Rüzgar tünelinin duvarları modelden yeterince uzak olduğu için modelin aerodinamik direncinde duvar etkisi yoktur.

3. Model, prototiple geometrik benzerdir.

Özellikler:

T=15°C sıcaklıkta ve atmosferik basınçta suyun yoğunluğu ρ = 999.1 kg/m^3 ve viskozitesi μ= 1.138x10^{-3} kg/ms

T=25°C sıcaklıkta ve atmosferik basınçta havanın yoğunluğu ρ =1.184 kg/m^3 ve viskozitesi μ=1.849x10^{-5} kg/ms

Çözüm:

Model ve prototip arasında benzerlik, modelin ve prototipin Reynolds sayıları eşit olduğunda sağlanır.

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \mathrm{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

$$V_m = V_p\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{L_p}{L_m}\right) = (0.440 m/s)\left(\frac{1.849\text{x}10^{-5}\, kg/ms}{1.138x10^{-3}\, kg/ms}\right)\left(\frac{999.1 kg/m^3}{1.184 kg/m^3}\right)(5) = 30.2 m/s$$

Kontrol:

Verilen hava sıcaklığında, ses hızı 346m/s'dir. Bu durumda rüzgar tünelindeki Mach sayısı Ma=30.2/346=0.0873'tür. Yani, yapmış olduğumuz sıkıştırılamazlık kabulü doğru bir yaklaşım olmuştur.

3. Askeri amaçlı hafif bir paraşüt tasarlanmaktadır. Çapı 7.3 m olan paraşütün deney yükü, paraşüt ve teçhizatının toplam ağırlığı 1023 N'dur. Bu ağırlık için paraşütün tasarımında esas alınan *limit iniş hızı* V_t = 6.1 m/s'dir. Rüzgar tünelinde 1/12 ölçekli model test edilecek olup tünelin sıcaklığı ve basıncı prototipininkiyle aynıdır. (15.5˚C ve standart atmosferik basınç) **(a)** Prototipin direnç katsayısını hesaplayınız. (İpucu: Limit iniş hızında ağırlık, aerodinamik direnç ile dengelenir) **(b)** Dinamik benzerliği elde etmek için rüzgar tüneli hangi hızda çalıştırılmalıdır? **(c)** Rüzgar tünelindeki model paraşütün aerodinamik direncini hesaplayınız.

Çözüm: 15.5˚C ve standart atmosferik basınçta havanın yoğunluğu 1.22 kg/m^3 viskozitesi 8.16*10^{-6} kg/ms alınacaktır. Direnç katsayısı:

$$C_D = \frac{F_{D,\mathrm{p}}}{\frac{1}{2}\rho_\mathrm{p} V_\mathrm{p}^{\,2} A_\mathrm{p}}$$

$$\mathrm{C_D} = \frac{1023\ \mathrm{N}}{\frac{1}{2} * 1.22\,\mathrm{kg/m^3} * (6.1\,\mathrm{m/s})^2 * \frac{\pi * (7.3\ \mathrm{m})^2}{4}} = 1.07$$

(b) Model ve prototipin eşleştirilmesi için Reynolds benzerliği kurulmalıdır:

$$\mathrm{Re_m} = \frac{\rho_\mathrm{m} V_\mathrm{m} L_\mathrm{m}}{\mu_\mathrm{m}} = \mathrm{Re_p} = \frac{\rho_\mathrm{p} V_\mathrm{p} L_\mathrm{p}}{\mu_\mathrm{p}}$$

Buradan model hızı:

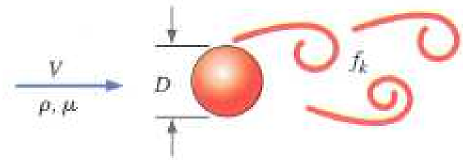
$$V_\mathrm{m} = V_\mathrm{p}\left(\frac{\mu_\mathrm{m}}{\mu_\mathrm{p}}\right)\left(\frac{\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{m}}\right)\left(\frac{L_\mathrm{p}}{L_\mathrm{m}}\right)$$

$$V_m = 6.1\,\mathrm{m/s} * 1 * 1 * 12 = 73.2\ \mathrm{m/s}$$

(c) Akışkan aynı olduğu ve dinamik benzerlik kurulduğu için model ile prototipin direnç kuvveti aynıdır.

4. Bir silindir üzerinden üniform bir akışta aşağıakımda periyodik Karman vorteks caddesi oluşur. Tekrarlayan değişkenler yöntemini kullanarak Karman vorteks kopma frekansı f_k için serbest akış hızı V, akışkan yoğunluğu ρ, akışkan viskozitesi μ ve silindir çapı D'nin fonksiyonu olarak boyutsuz bir ilişki oluşturunuz.

Çözüm:



Adım 1: İlgili parametreler: $f_k = f(V, \rho, \mu, D)$ n=5

Adım 2: Parametrelerin ana boyutları:

f_k	V	ρ	μ	D
$\{t^{-1}\}$	$\{L^1 t^{-1}\}$	$\{m^1 L^{-3}\}$	$\{m^1 L^{-1} t^{-1}\}$	$\{L^1\}$

Adım 3: İlk tahmin olarak j, problemde verilen ana boyutların sayısı (m, L, t) olan 3'e eşit alınır. j=3

Π'lerin sayısı k=n-j → k=5-3=2

Adım 4: j=3 olduğu için 3 tane tekrarlayan parametre seçmemiz gerekmektedir.

Tekrarlayan parametreler: V, ρ ve D

Adım 5: Bağımlı Π oluşturulur.

$$\Pi_1 = f_k V^{a_1} \rho^{b_1} D^{c_1} \qquad \{\Pi_1\} = \left\{ (t^{-1})(L^1 t^{-1})^{a_1} (m^1 L^{-3})^{b_1} (L^1)^{c_1} \right\}$$

mass:	$\{m^0\} = \{m^{b_1}\}$	$0 = b_1$	$b_1 = 0$
time:	$\{t^0\} = \{t^{-1} t^{-a_1}\}$	$0 = -1 - a_1$	$a_1 = -1$
length:	$\{L^0\} = \{L^{a_1} L^{-3b_1} L^{c_1}\}$	$0 = a_1 - 3b_1 + c_1$	$c_1 = 1$

$$\Pi_1 = \frac{f_k D}{V} = \mathrm{St}$$

(Strouhal sayısı)

İkinci Π (bu problemdeki tek bağımsız Π) oluşturulur.

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} \rho^{b_2} D^{c_2} \qquad \{\Pi_2\} = \left\{ (m^1 L^{-1} t^{-1})(L^1 t^{-1})^{a_2} (m^1 L^{-3})^{b_2} (L^1)^{c_2} \right\}$$

mass:	$\{m^0\} = \{m^1 m^{b_2}\}$	$0 = 1 + b_2$	$b_2 = -1$
time:	$\{t^0\} = \{t^{-1} t^{-a_2}\}$	$0 = -1 - a_2$	$a_2 = -1$
length:	$\{L^0\} = \{L^{-1} L^{a_2} L^{-3b_2} L^{c_2}\}$	$0 = -1 + a_2 - 3b_2 + c_2$ $0 = -1 - 1 + 3 + c_2$	$c_2 = -1$

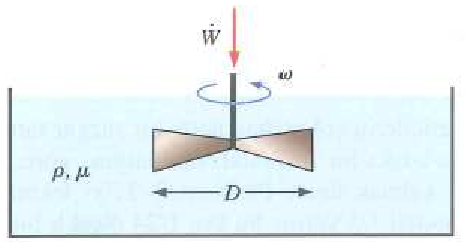
$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

Bu ifade biraz daha düzenlenirse Re sayısı elde edilir:

$$\Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{Reynolds number} = \mathrm{Re}$$

Adım 6: Π'ler arasındaki son ilişki şu şekilde yazılır: **St=f(Re)**

5. Büyük bir tank içerisindeki kimyasal maddeleri karıştırmak için bir karıştırıcı kullanılmaktadır. Karıştırıcının kanatlarına aktarılan mil gücü $\dot{W}$; karıştırıcı çapı D, sıvı yoğunluğu ρ, sıvı viskozitesi μ ve kanat açısal hızı ω'nın bir fonksiyonudur. Tekrarlayan değişkenler yöntemini kullanarak bu parametreler arasında boyutsuz bir ilişki bulunuz. Tüm işlemlerinizi gösteriniz ve gerektiğinde değişiklik yaparak Π gruplarınızı tespit ediniz.



Çözüm: Problemde 5 parametre verilmiştir ve bu parametreleri kullanarak boyut analizi yapacağız:

$$\dot{W} = f\left(\omega, \rho, \mu, D\right) \qquad n = 5$$

$\dot{W}$	ω	ρ	μ	D
$\{m^1L^2t^{-3}\}$	$\{t^{-1}\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1\}$

İlk tahmin olarak j = 3 alalım. Eğer bu tahmin doğruysa beklenen π grubu sayısı:

$$k = n - j = 5 - 3 = 2$$

Şimdi 3 adet tekrarlanan parametre bulmalıyız. Bu parametreleri ρ, ω ve D olarak seçelim. Bağımlı Π grubu:

$$\Pi_1 = \dot{W}\omega^{a_1}\rho^{b_1}D^{c_1} \qquad \{\Pi_1\} = \left\{\left(m^1L^2t^{-3}\right)\left(t^{-1}\right)^{a_1}\left(m^1L^{-3}\right)^{b_1}\left(L^1\right)^{c_1}\right\}$$

mass: $\quad \{m^0\} = \{m^1 m^{b_1}\} \qquad 0 = 1 + b_1 \qquad b_1 = -1$

time: $\quad \{t^0\} = \{t^{-3}t^{-a_1}\} \qquad 0 = -3 - a_1 \qquad a_1 = -3$

length: $\quad \{L^0\} = \{L^2L^{-3b_1}L^{c_1}\} \qquad 0 = 2 - 3b_1 + c_1 \qquad c_1 = -5$

$$\Pi_1 = \frac{\dot{W}}{\rho D^5\omega^3} = N_P$$

İkinci Π grubu, problemdeki tek bağımsız parametreyi kullanarak oluşturulur:

$$\Pi_2 = \mu\omega^{a_2}\rho^{b_2}D^{c_2} \qquad \{\Pi_2\} = \left\{\left(\mathrm{m^1L^{-1}t^{-1}}\right)\left(\mathrm{t^{-1}}\right)^{a_2}\left(\mathrm{m^1L^{-3}}\right)^{b_2}\left(\mathrm{L^1}\right)^{c_2}\right\}$$

mass: $\{\mathrm{m^0}\} = \{\mathrm{m^1m^{b_2}}\}$ $\qquad 0 = 1 + b_2 \qquad b_2 = -1$

time: $\{\mathrm{t^0}\} = \{\mathrm{t^{-1}t^{-a_2}}\}$ $\qquad 0 = -1 - a_2 \qquad a_2 = -1$

length: $\{\mathrm{L^0}\} = \{\mathrm{L^{-1}L^{-3b_2}L^{c_2}}\}$ $\qquad 0 = -1 - 3b_2 + c_2$, $\; 0 = -1 + 3 + c_2 \qquad c_2 = -2$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho D^2\omega}$$

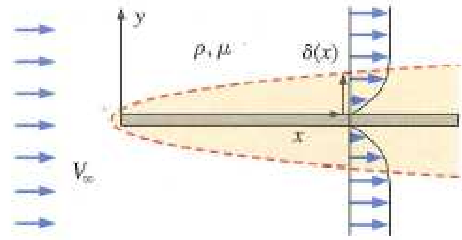
Dω kanatların ucundaki teğetsel hız olduğundan Π_2 grubu Reynolds sayısının tersi olur.

$$\Pi_2 = \frac{\rho D^2\omega}{\mu} = \frac{\rho(D\omega)D}{\mu} = \text{Reynolds number} = \mathrm{Re}$$

Böylece Π grupları arasındaki bağıntı:

$$\boxed{N_P = f(\mathrm{Re})}$$

6. Sınır tabaka, viskoz kuvvetlerin önemli olduğu ve içerisindeki akışın dönümlü olduğu ince bir bölgedir (çoğunlukla çeper boyuncadır). İnce düz bir levha boyunca gelişen bir sınır tabakayı düşününüz. Akış daimidir. Tekrarlayan değişkenler yöntemini kullanarak herhangi bir aşağıakım mesafesindeki sınır tabaka kalınlığı δ için; aşağıakım uzaklığı x, serbest akım hızı V_∞, akışkan özellikleri ρ (yoğunluk) ve μ'nün (viskozite) fonksiyonu olarak boyutsuz bir ilişki bulunuz.



Çözüm:

Adım 1: Bu problemde 5 parametre vardır.

$$\delta = f(x, V, \rho, \mu) \qquad n = 5$$

Adım 2: Her bir parametrenin ana boyutları:

δ	x	V	ρ	μ
$\{L^1\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1t^{-1}\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$

Adım 3: İlk tahmin olarak j, problemde verilen ana boyutların sayısı (m, L, t) olan 3'e eşit alınır. j=3

Π'lerin sayısı k=n-j→ k=5-3=2

Adım 4: j=3 olduğu için 3 tane tekrarlayan parametre seçmemiz gerekmektedir. Tekrarlayan parametreler: x, ρ ve V

Adım 5: Bağımlı Π oluşturulur. Π_1 bağıntısı kolay elde edilebileceği için hesapları kafamızdan yapabiliriz. d'nin ana boyutları, tekrarlayan parametrelerden x'in ana boyutuyla aynı olduğu için:

$$\pi_1 = \frac{\delta}{x}$$

İkinci Π viskozite ile oluşturulur:

$$\Pi_2 = \mu x^a \rho^b V^c \qquad \{\Pi_2\} = \left\{(m^1L^{-1}t^{-1})(L^1)^a(m^1L^{-3})^b(L^1t^{-1})^c\right\}$$

mass:	$\{m^0\} = \{m^1m^b\}$	$0 = 1 + b$	$b = -1$
time:	$\{t^0\} = \{t^{-1}t^{-c}\}$	$0 = -1 - c$	$c = -1$
length:	$\{L^0\} = \{L^{-1}L^aL^{-3b}L^c\}$	$0 = -1 + a - 3b + c$ $0 = -1 + a + 3 - 1$	$a = -1$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V x}$$

Bu ifade Re sayısının tersidir. Düzenlenmiş hali:

$$\Pi_2 = \mathrm{Re}_x = \frac{\rho V x}{\mu}$$

Adım 6: Π'ler arasındaki ilişki şu şekilde yazılır: $\boxed{\dfrac{\delta}{x} = f(\mathrm{Re}_x)}$

7. D çapındaki bir pervane, yoğunluğu ρ ve viskozitesi μ olan bir sıvının içerisinde ω açısal hızıyla dönmektedir. Dönme momenti T'nin; D, ω, ρ ve μ'nün bir fonksiyonu olduğu belirlenmiştir. Boyut analizini kullanarak boyutsuz bir ilişki oluşturunuz ve elde ettiğiniz boyutsuz parametreleri tanımlayınız. İpucu: Tutarlılık için (ve mümkün olduğu her zaman); uzunluk, yoğunluk ve hızı (ya da açısal hızı) tekrarlayan değişkenler olarak seçmek akıllıca olacaktır.

Çözüm:

Adım 1: Bu problemde 5 parametre vardır.

$$\mathrm{T} = f(\rho, \omega, D, \mu) \qquad n = 5$$

Adım 2: Her bir parametrenin ana boyutları:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{T} & \rho & \omega & D & \mu \\ \{\mathrm{m^1L^2t^{-2}}\} & \{\mathrm{m^1L^{-3}}\} & \{\mathrm{t^{-1}}\} & \{\mathrm{L^1}\} & \{\mathrm{m^1L^{-1}t^{-1}}\} \end{array}$$

Adım 3: İlk tahmin olarak j, problemde verilen ana boyutların sayısı (m, L, t) olan 3'e eşit alınır (j=3). Π'lerin sayısı k=n-j→ k=5-3=2

Adım 4: j=3 olduğu için 3 tane tekrarlayan parametre seçmemiz gerekmektedir. Tekrarlayan parametreler: ρ, ω ve D

Adım 5: Bağımlı Π oluşturulur.

$$\Pi_1 = T\rho^{a_1}\omega^{b_1}D^{c_1} \qquad \{\Pi_1\} = \left\{\left(\mathrm{m^1L^2t^{-2}}\right)\left(\mathrm{m^1L^{-3}}\right)^{a_1}\left(\mathrm{t^{-1}}\right)^{b_1}\left(\mathrm{L^1}\right)^{c_1}\right\}$$

time:	$\{\mathrm{t^0}\} = \{\mathrm{t^{-2}t^{-b_1}}\}$	$0 = -2 - b_1$	$b_1 = -2$
mass:	$\{\mathrm{m^0}\} = \{\mathrm{m^1m^{a_1}}\}$	$0 = 1 + a_1$	$a_1 = -1$
length:	$\{\mathrm{L^0}\} = \{\mathrm{L^2L^{-3a_1}L^{c_1}}\}$	$0 = 2 - 3a_1 + c_1$	$c_1 = -5$

Thus,

Π_1 = *some kind of torque coefficient*: $\qquad \Pi_1 = \dfrac{\mathrm{T}}{\rho\omega^2 D^5}$

İkinci Π viskozite ve 3 tekrarlayan parametre kullanılarak oluşturulur.

$$\Pi_2 = \mu\rho^{a_2}\omega^{b_2}D^{c_2} \qquad \{\Pi_1\} = \left\{\left(\mathrm{m^1L^{-1}t^{-1}}\right)\left(\mathrm{m^1L^{-3}}\right)^{a_2}\left(\mathrm{t^{-1}}\right)^{b_2}\left(\mathrm{L^1}\right)^{c_2}\right\}$$

time:	$\{\mathrm{t^0}\} = \{\mathrm{t^{-1}t^{-b_2}}\}$	$0 = -1 - b_2$	$b_2 = -1$
mass:	$\{\mathrm{m^0}\} = \{\mathrm{m^1m^{a_2}}\}$	$0 = 1 + a_2$	$a_2 = -1$
length:	$\{\mathrm{L^0}\} = \{\mathrm{L^{-1}L^{-3a_2}L^{c_2}}\}$	$0 = -1 - 3a_2 + c_2$	$c_2 = -2$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \omega D^2}$$

Bu ifade Re sayısının tersidir. Düzenlenmiş hali:

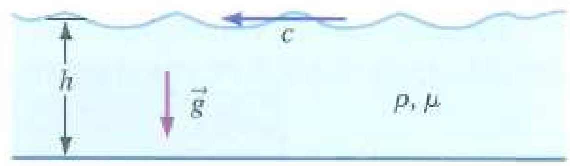
$$\Pi_2 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu}$$

Adım 6: Π'ler arasındaki ilişki şu şekilde yazılır:

$$\boxed{\frac{\mathrm{T}}{\rho \omega^2 D^5} = f\left(\frac{\rho \omega D^2}{\mu}\right)}$$

8. Sığ su dalgaları içeren bir problemde hem Froude sayısı hem de Reynolds sayısının konuyla ilgili boyutsuz parametreler olduğunu boyut analizini kullanarak gösteriniz. Bir sıvı yüzeyindeki dalgaların dalga hızı c; derinlik h, yerçekimi ivmesi g, sıvı yoğunluğu ρ ve sıvı viskozitesi μ'nün bir fonksiyonudur. Parametreleri aşağıdaki gibi elde etmek için Π 'leriniz üzerinde gerekli işlemleri yapınız:

$$\mathrm{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}} = f(\mathrm{Re}), \qquad \text{burada } \mathrm{Re} = \frac{\rho c h}{\mu}$$



İlgili parametreler: $c = f(h, \rho, \mu, g) \qquad n = 5$

c	h	ρ	μ	g
$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1t^{-2}\}$

İlk tahmin olarak j = 3 alalım. Eğer bu tahmin doğruysa beklenen Π grubu sayısı: $k = n - j = 5 - 3 = 2$

Şimdi 3 adet tekrarlanan parametre bulmalıyız. Bu parametreleri ρ, h ve g olarak seçelim. Bağımlı Π grubu:

$$\Pi_1 = \mathrm{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}}$$

$$\Pi_2 = \mu h^a \rho^b g^c \qquad \{\Pi_2\} = \left\{(m^1L^{-1}t^{-1})(L^1)^a(m^1L^{-3})^b(L^1t^{-2})^c\right\}$$

mass: $\{m^0\} = \{m^1m^b\} \qquad 0 = 1 + b \qquad b = -1$

time: $\{t^0\} = \{t^{-1}t^{-2c}\} \qquad 0 = -1 - 2c \qquad c = -\frac{1}{2}$

length: $\{L^0\} = \{L^{-1}L^aL^{-3b}L^c\} \qquad 0 = -1 + a - 3b + c$, $\quad 0 = -1 + a + 3 - \frac{1}{2} \qquad a = -\frac{3}{2}$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho h^{\frac{3}{2}}\sqrt{g}}$$

Bu Π grubunu ters çevirip ilk Π ile çarparsak Re sayısını elde ederiz:

$$\Pi_2 = \mathrm{Re} = \frac{\rho c h}{\mu}$$

Π 'ler arasındaki ilişki şu şekildedir: $\boxed{\mathrm{Fr} = \frac{c}{\sqrt{gh}} = f(\mathrm{Re}) \quad \text{where} \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho c h}{\mu}}$

9. Sıcaklığı 20˚C olan su uzun, düz bir boru içinden akmaktadır. Borunun L = 1.3 m olan bölümü boyunca olan basınç düşüşü, borudaki ortalama hız V'nin fonksiyonu olarak ölçülmüştür. Borunun iç çapı D = 10.4 cm'dir. **(a)** Verileri boyutsuzlaştırınız ve Euler sayısını Reynolds sayısının fonksiyonu olarak çiziniz. Deney, Reynolds sayısı bağımsızlığını elde etmek için yeteri kadar yüksek hızda yapılmış mıdır? **(b)** 80 m/s'lik ortalama hızda oluşan basınç düşüşünü tahmin etmek için deneysel verilere ekstrapolasyon uygulayınız.

V, m/s	ΔP, N/m²
0.5	77.0
1	306
2	1218
4	4865
6	10920
8	19440
10	30340
15	68330
20	121400
25	189800
30	273200
35	372100
40	485300
45	614900
50	758700

Kabuller: 1) Akış tamamen gelişmiştir. **2)** Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

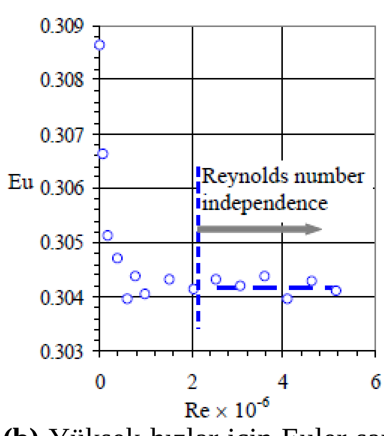
Çözüm: 20˚C sıcaklık ve atmosferik basınçta suyun ρ=998.0 kg/m^3 ve μ=1.002x10^{-3} kg/m.s'dir. Tablodaki en yüksek hız için Reynolds ve Euler sayıları aşağıdaki gibi hesaplanır:

Reynolds number:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(998.0\ \mathrm{kg/m^3})(50\ \mathrm{m/s})(0.104\ \mathrm{m})}{1.002\times10^{-3}\ \mathrm{kg/m\cdot s}} = 5.18\times10^{6}$$

Euler number:

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{758,700\ \mathrm{N/m^2}}{(998.0\ \mathrm{kg/m^3})(50\ \mathrm{m/s})^2}\left(\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s^2 N}}\right) = 0.304$$



Reynolds sayısı bağımsızlığına, Reynolds sayısının 2x10^6'nın biraz üstündeki bir değerinde ulaşılmıştır. Grafikteki son 6 noktanın Euler sayısı ortalaması 0.3042'dir.

(b) Yüksek hızlar için Euler sayısının sabit kaldığı varsayılarak ΔP değeri ekstrapolasyon ile hesaplanabilir:

Extrapolated value:

$$\Delta P = \mathrm{Eu}\times\rho V^2 = 0.3042(998.0\ \mathrm{kg/m^3})(80\ \mathrm{m/s})^2\left(\frac{\mathrm{s^2 N}}{\mathrm{kg\ m}}\right) = \mathbf{1,940,000\ N/m^2}$$

10. Rüzgar tünelinde yeni bir spor arabanın 1/16 ölçekli modeli test edilmektedir. Prototip araba 4.37 m uzunluğunda, 1.30 m yüksekliğinde ve 1.69 m genişliğindedir. Testler sırasında hareketli zemin bandının hızı test bölümündeki hava hızına ayarlanmaktadır. Aerodinamik direnç kuvveti F_D; rüzgar tüneli hızına bağlı olarak ölçülmüş olup deney sonuçları aşağıda verilmiştir. Direnç katsayısı C_D'yi Reynolds sayısı cinsinden grafik çizerek gösteriniz, C_D'nin hesaplanmasında kullanılan alan, model arabanın ön bakış alanıdır (A= genişlik x yükseklik kabul ediniz) ve Re sayısının hesaplanmasında kullanılan uzunluk ölçeği arabanın genişliği W'dur. Dinamik benzerlik sağlanmış mıdır? Rüzgar tüneli testinde Reynolds sayısı bağımsızlığına ulaşılmış mıdır? Karayolunda 29 m/s'lik hızla yol alan prototip araba üzerindeki aerodinamik direnç kuvvetini belirleyiniz. Hem rüzgar tüneli havasının hem de prototip araba üzerinde akan havanın sıcaklığını 25˚C ve basıncını atmosferik basınç kabul ediniz.

V, m/s	F_D, N
10	0.29
15	0.64
20	0.96
25	1.41
30	1.55
35	2.10
40	2.65
45	3.28
50	4.07
55	4.91

Kabuller: 1) Model araba prototip arabaya geometrik olarak benzerdir.

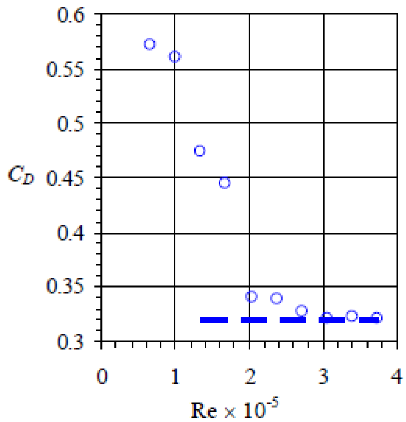
Çözüm: 25˚C sıcaklıkta ve atmosferik basınçta havanın ρ=1.184 kg/m^3 ve μ=1.849x10^{-5} kg/ms'dir. Tabloda verilen en yüksek hız için direnç katsayısı ve Reynolds sayısı:

Model drag coefficient at last data point:

$$C_{D,\mathrm{m}} = \frac{F_{D,\mathrm{m}}}{\frac{1}{2}\rho_\mathrm{m} V_\mathrm{m}^2 A_\mathrm{m}} = \frac{4.91\ \mathrm{N}}{\frac{1}{2}\left(1.184\ \mathrm{kg/m^3}\right)\left(55\ \mathrm{m/s}\right)^2 \frac{(1.69\ \mathrm{m})(1.30\ \mathrm{m})}{16^2}}\left(\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s^2 N}}\right) = 0.319$$

Model Reynolds number at last data point:

$$\mathrm{Re_m} = \frac{\rho_\mathrm{m} V_\mathrm{m} W_\mathrm{m}}{\mu_\mathrm{m}} = \frac{\left(1.184\ \mathrm{kg/m^3}\right)\left(55\ \mathrm{m/s}\right)\left(\frac{1.69}{16}\ \mathrm{m}\right)}{1.849\times10^{-5}\ \mathrm{kg/m\cdot s}} = 3.72\times10^5$$



Yukarıda yapılan hesaplamalar tabloda verilen tüm değerler için yapıldığında C_D – Re grafiği yandaki gibi elde edilir:

Prototip arabanın Reynolds sayısı aşağıdaki gibi bulunur:

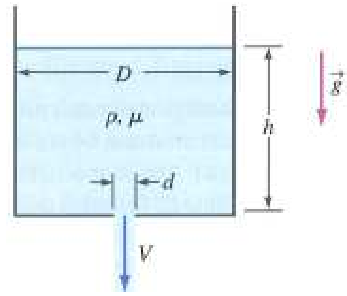
$$\mathrm{Re}_p = \frac{\rho_p V_p W_p}{\mu_p} = \frac{(1.184\ \mathrm{kg/m^3})(29\ \mathrm{m/s})(1.69\ \mathrm{m})}{1.849\times10^{-5}\ \mathrm{kg/m\cdot s}} = 3.14\times10^6$$

Görüldüğü gibi prototipin Re sayısı modelin Re sayısından yaklaşık olarak 8 kat daha büyüktür. Dolayısıyla dinamik benzerlik kurulamamıştır. Re sayısı bağımsızlığına 3 x 10^5 değerinden sonra ulaşılmıştır ve bu değerden sonra C_D katsayısı yaklaşık olarak 0.32'dir. Böylece prototip üzerindeki aerodinamik direnç kuvveti:

$$F_{D,p} = \frac{1}{2}\rho_p V_p^2 A_p C_{D,p}$$

$$= \frac{1}{2}(1.184\ \mathrm{kg/m^3})(29\ \mathrm{m/s})^2(1.69\ \mathrm{m})(1.30\ \mathrm{m})0.32\left(\frac{\mathrm{s^2N}}{\mathrm{kg\,m}}\right) = \mathbf{350\ N}$$

11. Yoğunluğu ρ, viskozitesi μ olan bir sıvı, çapı D olan tankın tabanında açılan d çapındaki bir delikten yerçekiminin etkisi ile akmaktadır. Deneyin başlangıcında, sıvı tankın tabanından itibaren şekilde çizildiği gibi h kadardır. Ayrıca sıvı, çizimde gösterildiği gibi, tanktan tam aşağıya doğru jet halinde V ortalama hızı ile boşalmaktadır. Problemdeki diğer parametrelerin fonksiyonu olarak V için boyut analizini kullanarak boyutsuz bir ilişki kurunuz. Sonucunuzda ortaya çıkan tanınmış boyutsuz parametreleri tanımlayınız. (İpucu: Bu problemde üç tane uzunluk ölçeği vardır: Tutarlılık bakımından uzunluk ölçeği olarak h'yi seçiniz.)



Adım 1: Bu problemde 7 parametre vardır:

$$V = f(d, D, \rho, \mu, h, g) \qquad n = 7$$

Adım 2: Her bir parametrenin ana boyutları aşağıdaki gibidir:

V	d	D	ρ	μ	h	g
$\{L^1t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1L^{-3}\}$	$\{m^1L^{-1}t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1t^{-2}\}$

Adım 3: İlk tahmin olarak j =3 olarak alalım (m, L ve t boyutlarını göz önünde bulundurarak) Beklenen Π sayısı:

$$k = n - j = 7 - 3 = 4$$

Adım 4: j =3 olduğu için 3 tane tekrarlanan parametre seçelim**.** Bunlar: sıvı yüksekliği (h), yerçekimi ivmesi (g) ve akışkan yoğunluğu (ρ).

Adım 5: Π'ler elde edilir.

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gh}} \qquad \Pi_2 = \frac{d}{h} \qquad \Pi_3 = \frac{D}{h}$$

Son Π ifadesi viskozite ile birlikte oluşturulur:

$$\Pi_4 = \mu h^{a_4} \rho^{b_4} g^{c_4} \qquad \{\Pi_4\} = \left\{ (m^1L^{-1}t^{-1})(L^1)^{a_4}(m^1L^{-3})^{b_4}(L^1t^{-2})^{c_4} \right\}$$

mass: $\{m^0\} = \{m^1 m^{b_4}\}$ $\qquad 0 = 1 + b_4 \qquad b_4 = -1$

time: $\{t^0\} = \{t^{-1} t^{-2c_4}\}$ $\qquad 0 = -1 - 2c_4 \qquad c_4 = -\frac{1}{2}$

length: $\{L^0\} = \{L^{-1} L^{a_4} L^{-3b_4} L^{c_4}\}$ $\qquad 0 = -1 + a_4 - 3b_4 + c_4$, $\quad 0 = -1 + a_4 + 3 - \frac{1}{2} \qquad a_4 = -\frac{3}{2}$

$$\Pi_4 = \frac{\mu}{\rho h^{\frac{3}{2}} \sqrt{g}}$$

Bu ifade biraz daha düzenlenirse Re sayısı elde edilir:

$$\Pi_4 = \frac{\rho h \sqrt{gh}}{\mu}$$

Adım 6: Π'ler arasındaki ilişki şu şekilde yazılır:

$$\boxed{\frac{V}{\sqrt{gh}} = f\left(\frac{d}{h}, \frac{D}{h}, \frac{\rho h \sqrt{gh}}{\mu} \right)}$$

$\frac{V}{\sqrt{gh}}$ *: Derinlik Froude Sayisi*