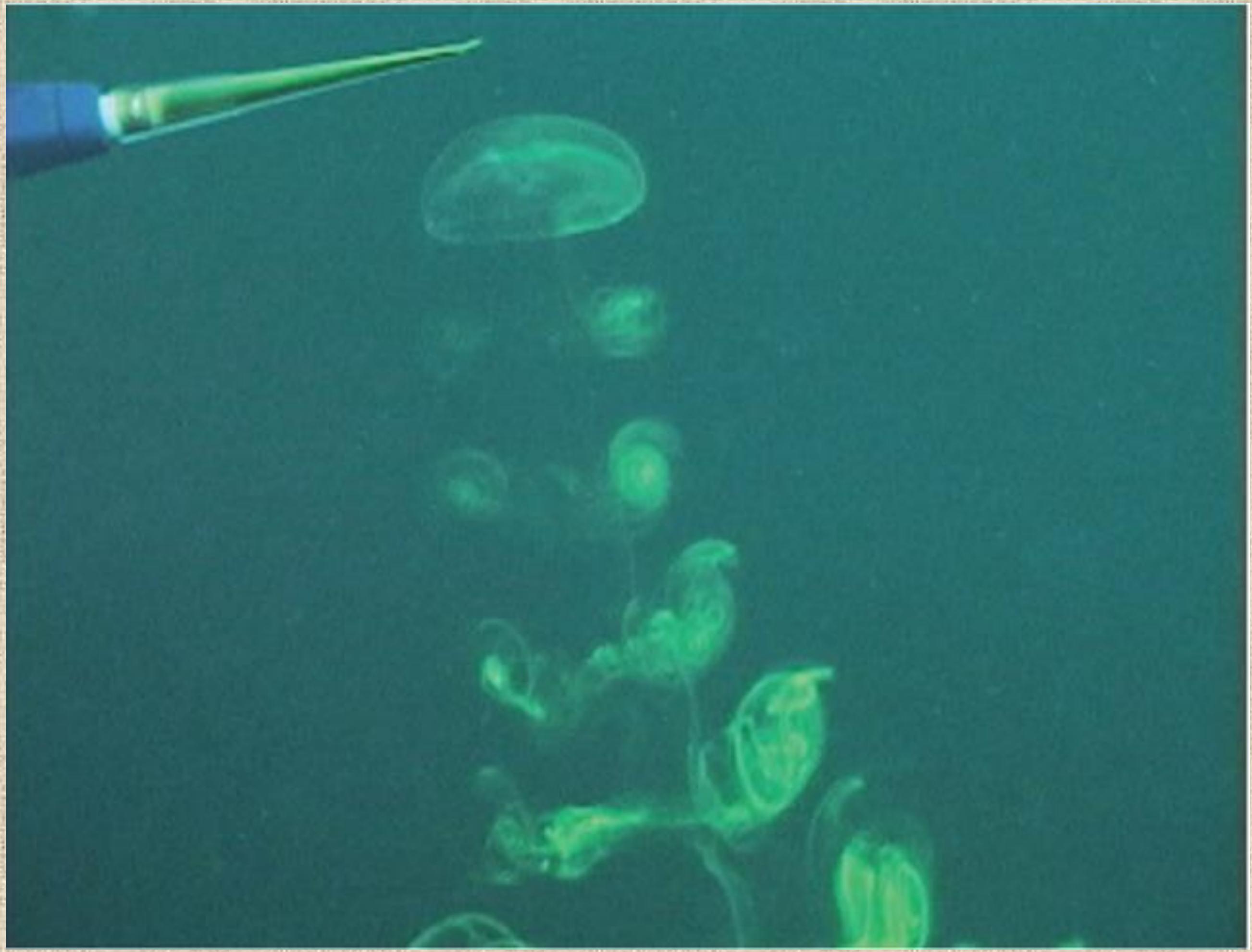
Akışkanlar Mekaniği: Temelleri ve Uygulamaları
3. Baskı
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala
McGraw-Hill, 2014

Bölüm 6
AKIŞ SİSTEMLERİNİN MOMENTUM ANALİZİ

Mehmet Kanoğlu
Şevki Çeşmeci



Denizanasının (Aurelia aurita) düzenli yüzme hareketi. Denizanası gövdesini kasıp akışkanı ittikten sonra süzülerek ilerlerken ve arkasında vorteks halkaları oluştururken, yukarıakıma damlatılan floresan boya çan şeklindeki gövdenin altına doğru sürüklenmektedir. Vorteks halkalarının oluşturduğu akış ile denizanası, aynı anda hem kendini ileri doğru itmekte hem de beslenmektedir.

Amaçlar:

- Kontrol hacmine etkiyen çeşitli kuvvetleri ve momentleri tespit edebilmek.
- Kontrol hacmi analizini kullanarak akışla ortaya çıkan kuvvetleri belirleyebilmek.
- Kontrol hacmi analizini kullanarak akışla oluşan momentleri ve iletilen torkları belirleyebilmek.

6–1 ■ NEWTON’UN YASALARI

Newton’un yasaları: Cisimlere etki eden kuvvetler ile bunların neden olduğu hareketler arasındaki ilişkileri içerir.

Newton’un birinci yasası: Durmakta olan bir cismin hareketsiz kalacağını ve hareketli bir cismin de kendisine etkiyen net bir kuvvet bulunmadığında doğrusal yörüngesinde aynı hızla hareketine devam edeceğini ifade eder.

Dolayısıyla cisim eylemsizlik halini koruma eğilimindedir.

Newton un ikinci yasası: Bir cismin ivmesinin, cisme etkiyen net kuvvet ile doğru orantılı, kütlesi ile ters orantılı olduğunu belirtir.

Newton un üçüncü yasası: Bir cismin ikinci bir cisme kuvvet uygulaması durumunda, ikinci cismin de birinci cisme eşit ve ters yönde bir kuvvet uygulayacağını ifade eder.

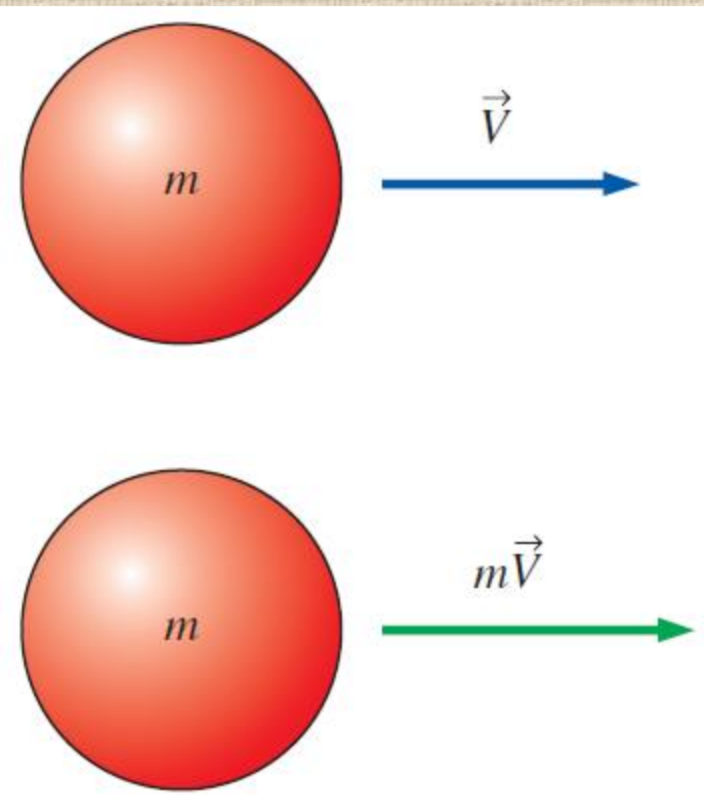
Dolayısıyla, oluşan tepki kuvvetinin yönü sistem olarak seçilen cisme bağlıdır.

Newton’un ikinci yasası: $$\vec{F} = m\vec{a} = m\,\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \qquad \textbf{(6–1)}$$

Lineer momentum ya da sadece *momentum*: Cismin kütlesi ile hızının çarpımına eşittir.

Newton’un ikinci yasası genellikle *lineer momentum denklemi* olarak anılır.

Momentumun korunumu ilkesi: Bir sisteme etkiyen net kuvvet sıfır olduğunda, bu sistemin momentumu sabit kalır.



Lineer momentum cismin kütlesi ile hızının çarpımıdır ve yönü, hızın yönü ile aynıdır.

Net kuvvet

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

Momentumun değişim hızı

Newton’un ikinci yasası; bir cismin momentumunun değişim hızı, cisme etkiyen net kuvvete eşittir şeklinde de ifade edilebilir.

Dönme hareketi yapan katı cisimler için Newton'un ikinci yasası $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadede $\vec{M}$ cisme uygulanan net moment ya da tork, I dönme eksenine göre cismin kütle atalet momenti ve $\vec{\alpha}$ açısal ivmedir. Bu ifade açısal momentumun değişim hızı ($d\vec{H}/dt$) cinsinden de yazılabilir:

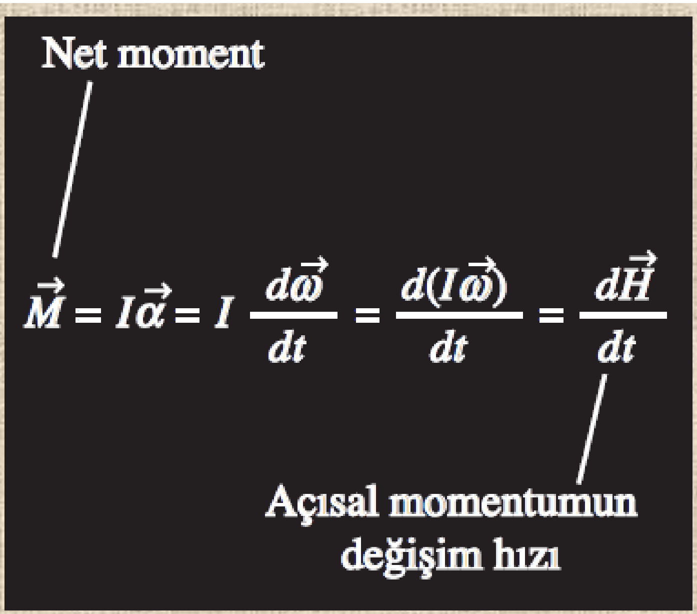
Açısal momentum denklemi:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt} \qquad \textbf{(6–2)}$$

x-eksenine göre açısal momentum:

$$M_x = I_x\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{dH_x}{dt} \qquad \textbf{(6–3)}$$

Açısal momentumun korunumu ilkesi:
Dönmekte olan bir cisme etkiyen net tork sıfır olduğunda, bu cismin açısal momentumu sabit kalır ve dolayısıyla böyle bir sistemin açısal momentumu korunmuş olur.



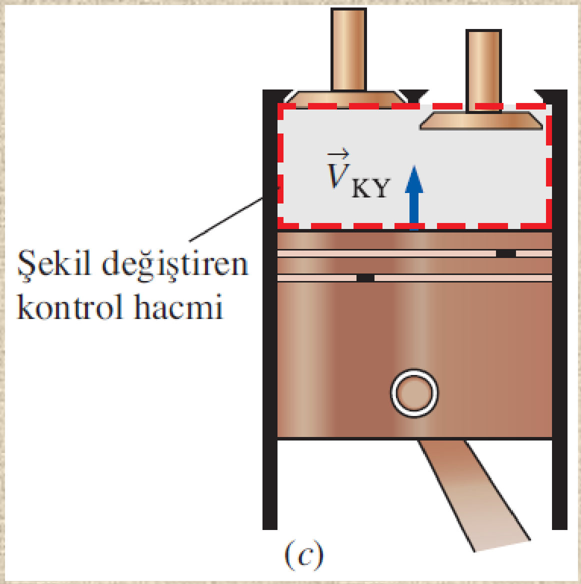
Bir cismin açısal momentumunun değişim hızı, o cisme etkiyen net momente eşittir.

6–2 ■ KONTROL HACMİNİN SEÇİMİ

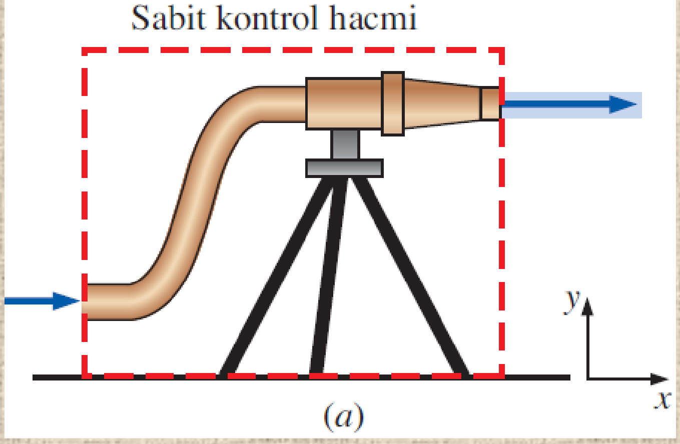
Bir kontrol hacmi, uzayda akışkanın içerisinden aktığı, özel seçilmiş bir bölgedir ve bu bölgenin sınırlarını oluşturan kontrol yüzeyi; sabit, hareketli ve hatta akış sırasında şekil değiştiren bir yüzey olabilir.

Çoğu akış sisteminde hareketsiz yapılar, hareketsiz yüzeylere sağlam bir şekilde bağlanmış haldedir. Bu tür sistemler en iyi ***sabit*** kontrol hacimleri kullanılarak analiz edilir.

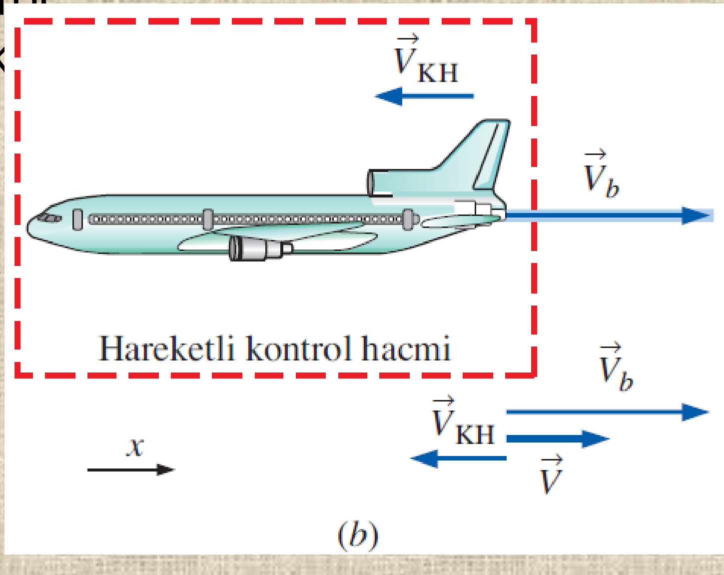
Hareketli ya da şekil değiştiren akış sistemleri analiz edilirken, kontrol hacminin de ***hareket etmesine*** veya ***şekil değiştirmesine*** izin verilmesi genellikle daha uygundur.



Şekil değiştiren kontrol hacimlerinde, kontrol yüzeylerinin bir kısmı diğer kısımlara göre harek
eder.



(*a*) Sabit
(*b*) hareketli, ve
(*c*) şekil değiştiren kontrol hacimleri.



6–3 ■ KONTROL HACMİNE ETKİYEN KUVVETLER

Bir kontrol hacmine etkiyen kuvvetler;

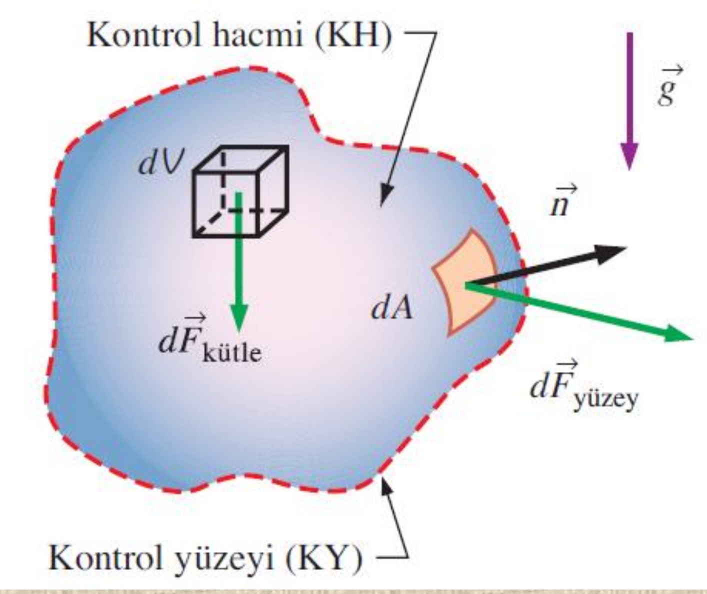
kontrol hacminin her yerine yayılı olarak etkiyen **kütle kuvvetleri** (yerçekimi, elektrik ve manyetik alan kuvvetleri gibi)

ve kontrol yüzeylerine etkiyen **yüzey kuvvetleri**dir (basınç kuvvetleri, viskoz kuvvetler ve temas noktalarındaki tepki kuvvetleri gibi).

Analizde sadece dış kuvvetler dikkate alınır.

Kontrol hacmine etkiyen toplam kuvvet:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{kütle}} + \sum \vec{F}_{\text{yüzey}} \qquad (6\text{–}4)$$



Kontrol hacmine etkiyen toplam kuvvet; kütle ve yüzey kuvvetlerinden oluşur.

Kütle kuvveti diferansiyel hacim elemanı üzerinde, yüzey kuvveti ise diferansiyel yüzey elemanı üzerinde gösterilmiştir.

En genel kütle kuvveti, kontrol hacminin her bir diferansiyel elemanı üzerinde aşağı yönde etkiyen **yerçekimi**dir.

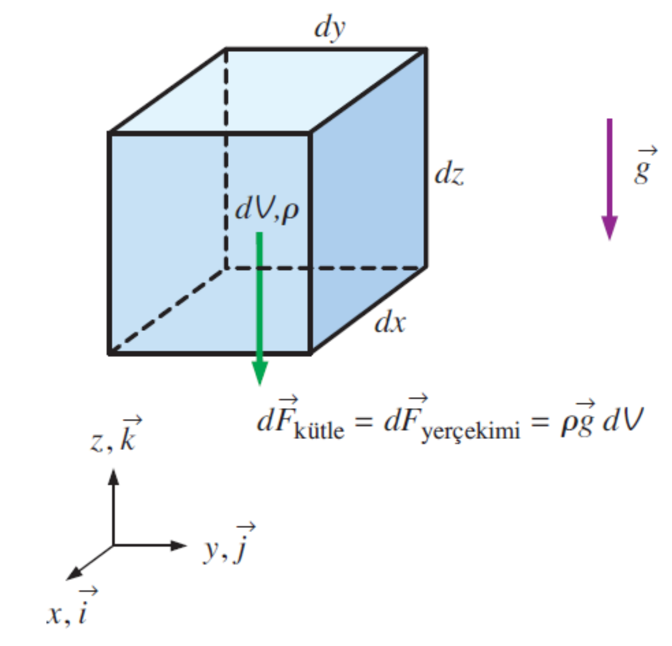
Akışkan elemanına etkiyen yerçekimi kuvveti: $d\vec{F}_{\text{yerçekimi}} = \rho\vec{g}\,dV$

Kartezyen koordinat sisteminde yerçekimi vektörü: $\vec{g} = -g\vec{k}$

Kontrol hacmine etkiyen toplam kütle kuvveti: $\sum \vec{F}_{\text{kütle}} = \int_{\text{KH}} \rho\vec{g}\,dV = m_{\text{KH}}\vec{g}$

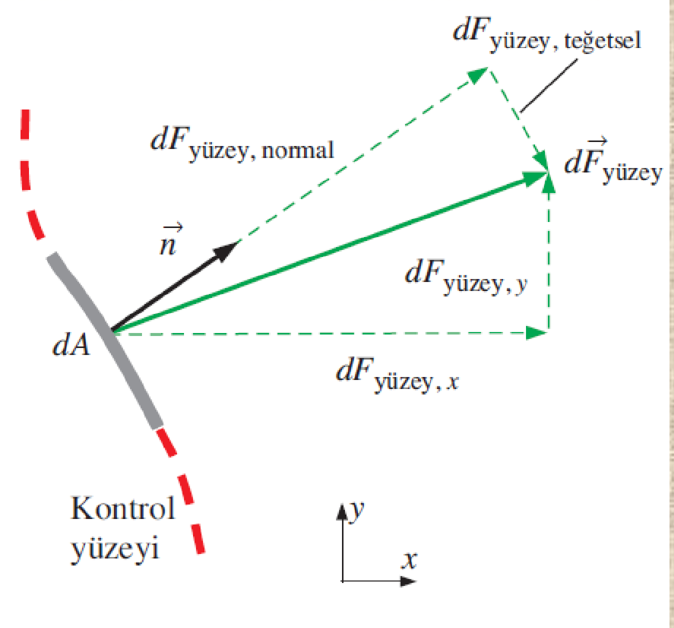
Toplam kuvvet:

$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{toplam kuvvet}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{yerçekimi}}}_{\text{kütle kuvveti}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{basınç}} + \sum \vec{F}_{\text{viskoz}} + \sum \vec{F}_{\text{diğer}}}_{\text{yüzey kuvvetleri}}$$

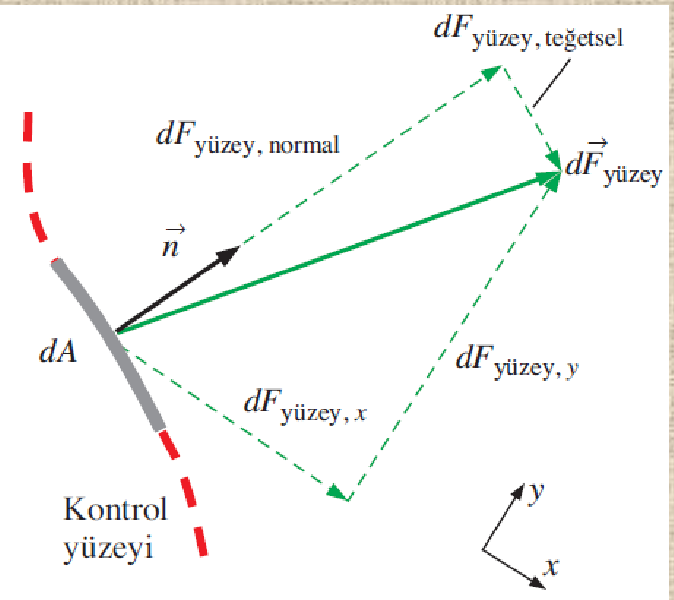


Yüzey kuvvetlerinin analizi, hem *normal* hem de *teğetsel* bileşenlerden oluştukları için kolay değildir.
Normal gerilmeler, basınç (her zaman dik doğrultuda içeri yönde etkir) ve viskoz gerilmelerden oluşur.
Kayma gerilmeleri tamamen viskoz gerilmelerden oluşur.

Akışkanın diferansiyel hacim elemanına etkiyen yerçekimi kuvveti, bu elemanın ağırlığına eşittir. Eksenlerin yönü, yerçekimi vektörü *aşağı doğru* negatif z-yönünde etkiyecek şekilde seçilmiştir.



(a)



(b)

Diferansiyel yüzey elemanına etkiyen yüzey kuvveti:

$$d\vec{F}_{\text{yüzey}} = \sigma_{ij}\cdot\vec{n}\,dA$$

Kontrol yüzeyine etkiyen toplam yüzey kuvveti :

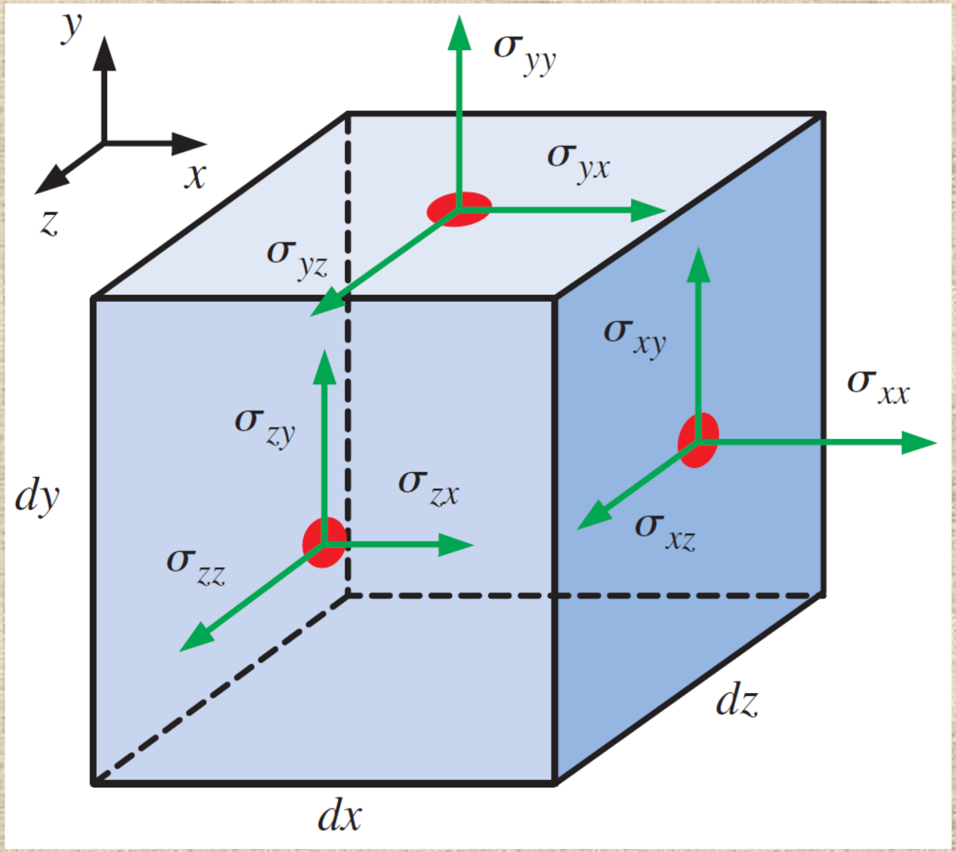
$$\sum \vec{F}_{\text{yüzey}} = \int_{\text{KY}} \sigma_{ij}\cdot\vec{n}\,dA$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{kütle}} + \sum \vec{F}_{\text{yüzey}} = \int_{\text{KH}} \rho\vec{g}\,dV + \int_{\text{KY}} \sigma_{ij}\cdot\vec{n}\,dA$$

Total force:

$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{toplam kuvvet}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{yerçekimi}}}_{\text{kütle kuvveti}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{basınç}} + \sum \vec{F}_{\text{viskoz}} + \sum \vec{F}_{\text{diğer}}}_{\text{yüzey kuvvetleri}}$$

Koordinat eksenleri (*a*)’dan (*b*)’ye döndürüldüğünde, yüzey kuvvetinin kendisi aynı kalsa da bileşenleri değişir. Burada sadece iki boyut gösterilmiştir.

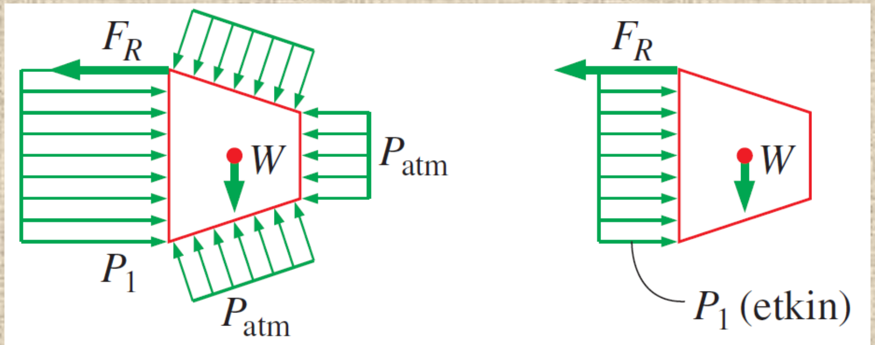


Kartezyen koordinatlarda gerilme tensörünün sağ, üst ve ön yüzeylerdeki bileşenleri.

Newton’un hareket yasaları uygulanırken yapılan yaygın bir basitleştirme de *atmosfer basıncının* çıkarılması ve etkin basınç ile çalışılmasıdır.

Bunun nedeni atmosfer basıncının her yönden etkimesi ve böylece etkisinin her yönde dengelenmesidir.

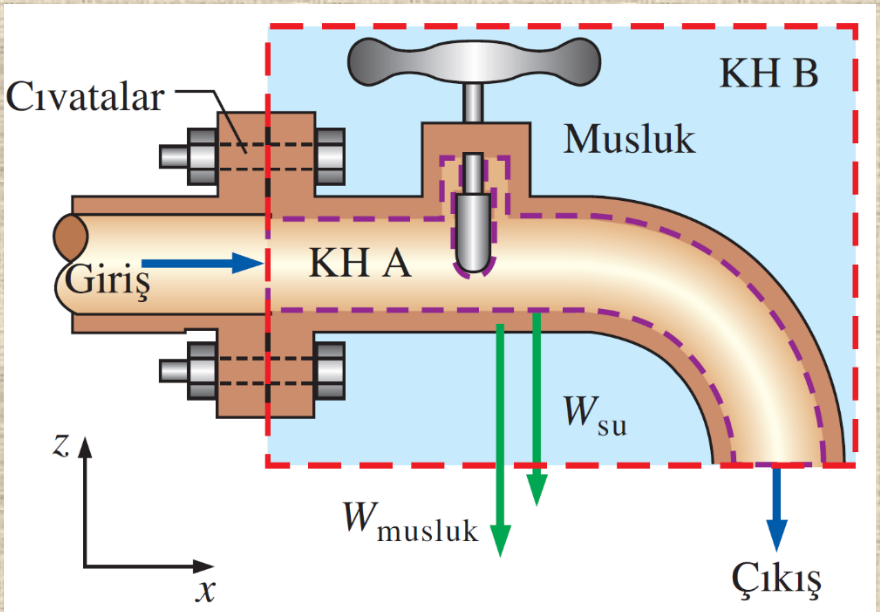
Bu aynı zamanda akışkanın atmosfere boşaldığı çıkış bölümündeki basınç kuvvetlerinin de ihmal edilebileceği anlamını taşır, çünkü sesaltı hızlarda çıkış basıncı atmosfer basıncına çok yakındır.



Atmosfer basıncı hesaba katılarak

Atmosfer basıncı göz ardı edilerek

Atmosfer basıncı her yönden etkidiğinden, kuvvet dengeleri yazılırken atmosfer basıncının etkisi her bir yönde sadeleşeceğinden göz ardı edilebilir.



Kontrol hacmi seçimini akıllıca yapmanın önemini gösteren bir musluk kesit resmi; KH-B ile çalışmak, KH-A’ya göre çok daha kolaydır.

6–4 ■ LINEER MOMENTUM DENKLEMİ

Kütlesi m olan bir sistem üzerine $\vec{F}$ net kuvveti etkimesi durumunda bu sistem için Newton'un ikinci yasası,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \qquad \textbf{(6–13)}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $m\vec{V}$ sistemin **lineer momentum**udur. Sistemin içinde hem yoğunluğun hem de hızın bir noktadan diğerine değişebileceği dikkate alınarak, Newton'un ikinci yasası daha genel olarak

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\text{sis}} \rho\vec{V}\, dV \qquad \textbf{(6–14)}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada $\delta m = \rho\, dV$, dV diferansiyel hacim elemanının kütlesi ve $\rho\vec{V}\, dV$ ise bu kütlenin momentumudur.

Böylece Newton'un ikinci yasası;
bir sisteme etkiyen dış kuvvetlerin toplamı, sistemin lineer momentumunun birim zamandaki değişimine (veya değişim hızına) eşittir şeklinde de ifade edilebilir.
Bu ifade, hareketsiz ya da sabit hızla hareket eden bir koordinat sistemi için geçerlidir. Bu tür bir koordinat sistemine *ivmesiz koordinat sistemi* ya da *ivmesiz referans düzlemi* adı verilir. (Inertial reference frame)

$$\frac{d(m\vec{V})_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{KH}} \rho\vec{V}\, dV + \int_{\text{KY}} \rho\vec{V}\,(\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, dA$$

Genel :

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\text{KH}} \rho\vec{V}\, dV + \int_{\text{KY}} \rho\vec{V}(\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, dA$$

$$\vec{V}_b = \vec{V} - \vec{V}_{\text{KY}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Bir KH'ye etkiyen}\\ \text{tüm dış kuvvetlerin}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{KH içindeki kütlenin}\\ \text{lineer momentumunun}\\ \text{değişim hızı}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Kütle yoluyla kontrol}\\ \text{yüzeyinden birim zamanda}\\ \text{çıkan net lineer momentum}\end{pmatrix}$$

Sabit KH:

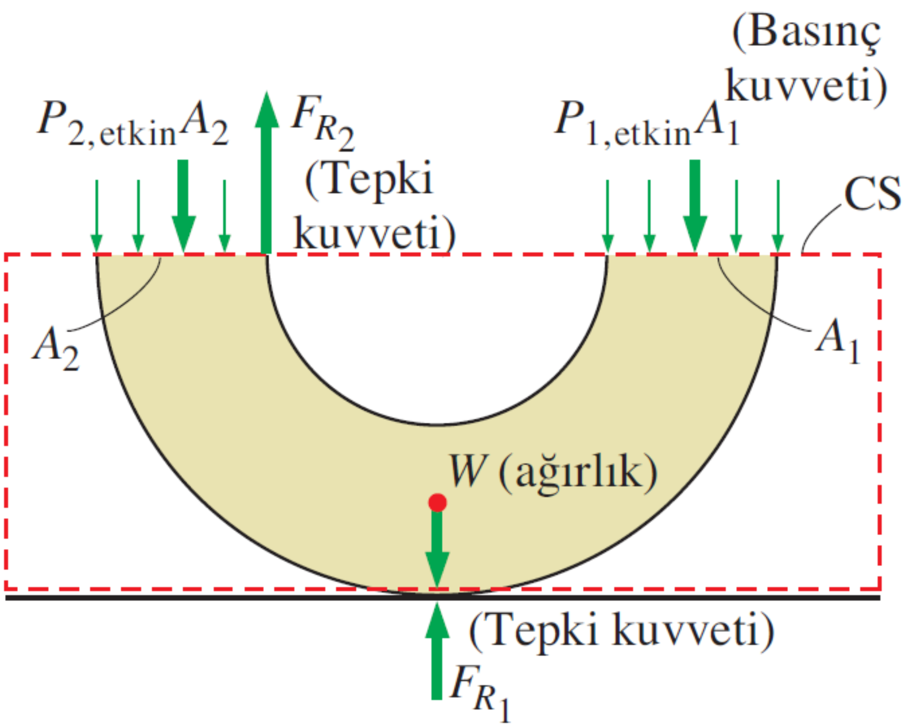
$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\text{KH}} \rho\vec{V}\, dV + \int_{\text{KY}} \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA$$

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{KH}} \rho b\, dV + \int_{\text{KY}} \rho b(\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, dA$$

$$B = m\vec{V} \qquad b = \vec{V} \qquad b = \vec{V}$$

$$\frac{d(m\vec{V})_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{KH}} \rho\vec{V}\, dV + \int_{\text{KY}} \rho\vec{V}(\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, dA$$

Lineer momentum denklemi, Reynolds transport teoremindeki B, lineer momentum $m\vec{V}$ ile ve b de birim kütle başına momentum $\vec{V}$ ile değiştirilerek elde edilir.



Zemin üzerindeki 180°'lik dirsek

Momentum denklemi, akışın (genellikle destek ya da bağlantı elemanlarında) sebep olduğu kuvvetlerin hesabında yaygın olarak kullanılır.

Çoğu akış sisteminde $\vec{F}$ kuvveti; ağırlık, basınç ve tepki kuvvetlerinden oluşur. Atmosfer basıncı, kontrol yüzeylerinde karşılıklı olarak sadeleşeceğinden burada etkin basınçlar kullanılmıştır.

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho\vec{V}\, dV + \int_{KY} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA$$

Özel Durumlar

$$\sum \vec{F} = \int_{KY} \rho \vec{V} (\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, dA$$

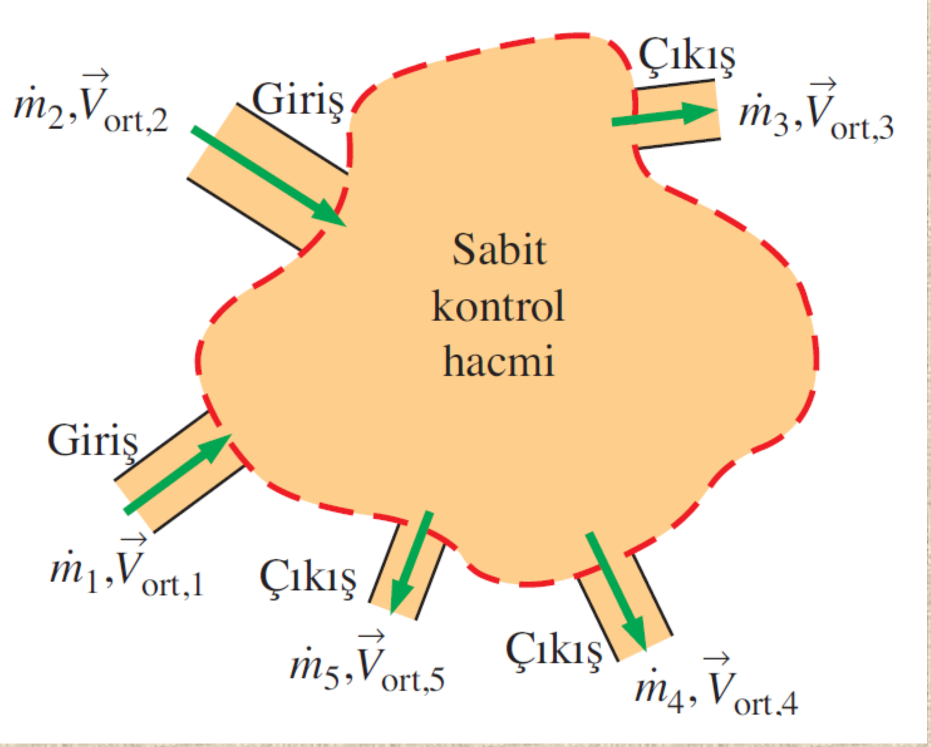
Daimi akış

$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA_c = \rho V_{ort} A_c$$

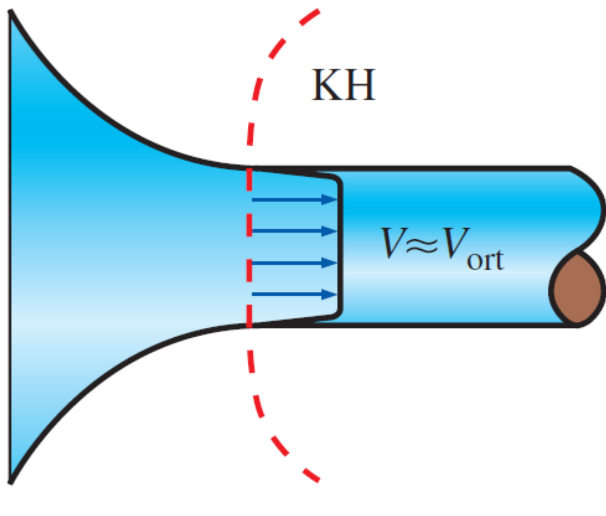
Giriş ya da çıkıştaki kütlesel debi

$$\int_{A_c} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA_c = \rho V_{ort}\, A_c \vec{V}_{ort} = \dot{m} \vec{V}_{ort}$$

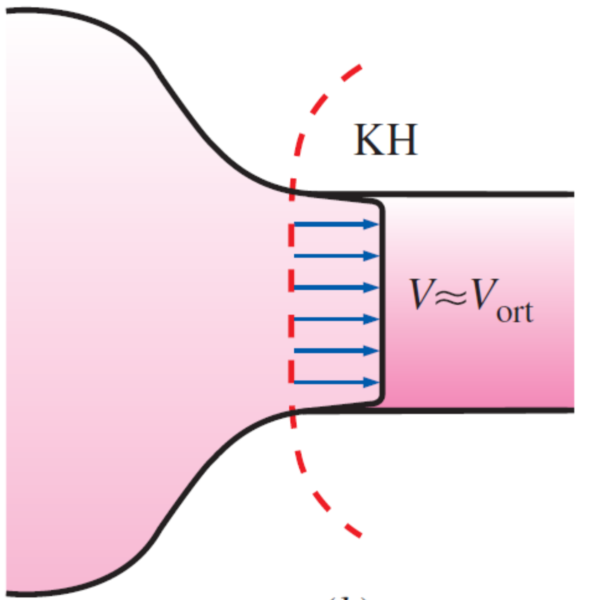
Üniform giriş ya da çıkıştan geçen momentum



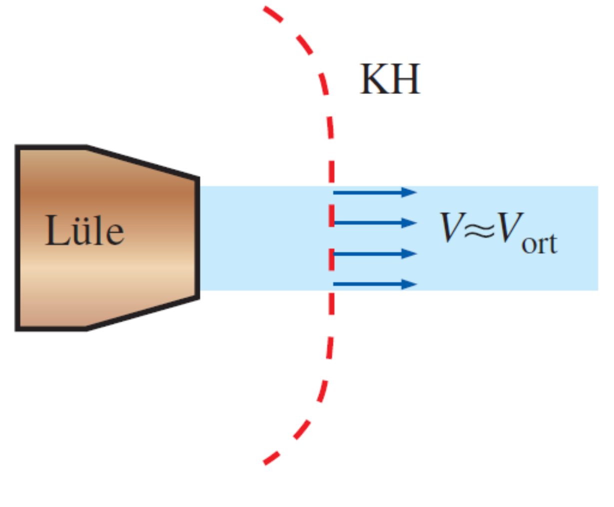
Genel bir mühendislik probleminde kontrol hacminin çok sayıda giriş ve çıkışı vardır; her bir giriş ya da çıkışta kütlesel debi ve ortalama hız tanımlanır.



(a)



(b)



(c)

Üniform akış yaklaştırımının uygun olduğu giriş veya çıkış örnekleri:
(a) Bir borunun iyi yuvarlatılmış girişi,
(b) rüzgâr tünelinin test bölümünün girişindeki akış ve
(c) hava içerisindeki serbest su jeti.

Momentum-Akısı Düzeltme Faktörü, β

Uygulamada giriş ve çıkışların çoğundaki hızlar ne yazık ki üniform *değildir*.

Denklem 6–17 ile verilen kontrol yüzeyi integrali **momentum-akısı düzeltme faktörü** denen boyutsuz bir düzeltme faktörü, β kullanılarak cebirsel biçime dönüştürülebilir:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{KH}} \rho \vec{V}\, dV + \int_{\mathrm{KY}} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA \qquad (6\text{-}17)$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{KH}} \rho \vec{V}\, dV + \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V}_{\mathrm{ort}} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V}_{\mathrm{ort}}$$

Giriş ya da çıkış kesitindeki momentum akısı: $\displaystyle\int_{A_c} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c = \beta \dot{m} \vec{V}_{\mathrm{ort}}$

$$\beta = \frac{\int_{A_c} \rho V(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c}{\dot{m} V_{\mathrm{ort}}} = \frac{\int_{A_c} \rho V(\vec{V}\cdot\vec{n})\, dA_c}{\rho V_{\mathrm{ort}} A_c V_{\mathrm{ort}}}$$

β daima 1'e eşit veya 1'den büyüktür.

β nın türbülanslı akıştaki değeri 1 civarında iken tam gelişmiş laminer akıştaki değeri 2'dir.

Momentum-akısı düzeltme faktörü: $\displaystyle\beta = \frac{1}{A_c}\int_{A_c} \left(\frac{V}{V_{\mathrm{ort}}}\right)^2 dA_c$

ÖRNEK 6–1 **Laminer Boru Akışı İçin Momentum-Akısı Düzeltme Faktörü**

Dairesel kesitli çok uzun düz bir borudaki laminer akışı göz önüne alınız. Bölüm 8'de boru en-kesitindeki hız profilinin parabolik ve eksenel hız bileşeninin

$$V = 2V_{ort}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \textbf{(1)}$$

olduğu gösterilmiştir. Burada R borunun iç yarıçapı, V_{ort} ise boru içerisindeki ortalama akış hızıdır. Şekil 6–15'te gösterildiği gibi boru akışı, kontrol hacminden bir çıkışı temsil etmektedir. Bu akış için borunun en-kesitine ait momentum akısı düzeltme faktörünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM Verilen bir hız profili için momentum akısı düzeltme faktörü hesaplanacaktır.

Kabuller **1** Akış sıkıştırılamaz ve daimidir. **2** Kontrol hacmi, boruyu Şekil 6–15'te gösterildiği gibi boru eksenine dik olarak kesmektedir.

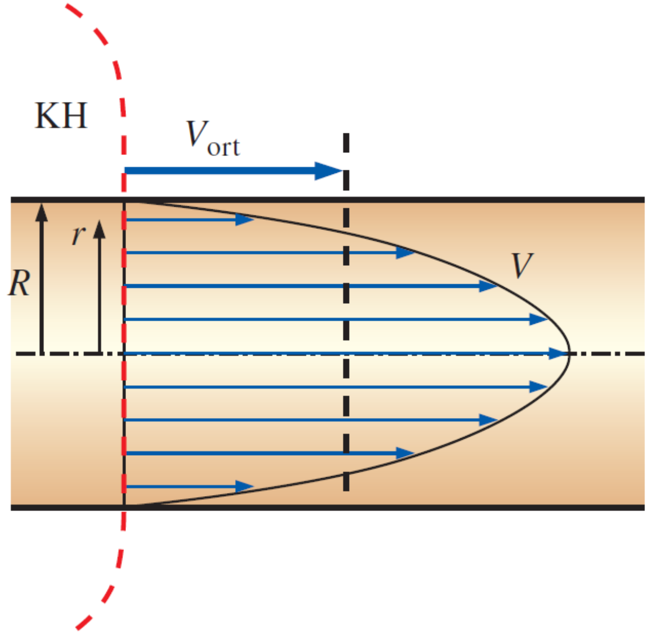
Analiz $dA_c = 2\pi r dr$ olduğunu da dikkate alarak Denklem 6–24'teki V'nin yerine problemde verilen hız profilini yazalım:

$$\beta = \frac{1}{A_c}\int_{A_c}\left(\frac{V}{V_{ort}}\right)^2 dA_c = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 2\pi r\, dr \quad \textbf{(2)}$$

$y = 1 - r^2/R^2$ şeklinde yeni bir integral değişkeni tanımlanırsa $dy = -2r\,dr/R^2$ olur (bu durumda $r = 0$'da $y = 1$ ve $r = R$'de $y = 0$ olur). İntegral alınırsa; tam gelişmiş laminer akış için momentum akısı düzeltme faktörü aşağıdaki gibi bulunur:

Laminer çıkış: $$\beta = -4\int_1^0 y^2\, dy = -4\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^0 = \frac{4}{3} \quad \textbf{(3)}$$

İrdeleme Burada düzeltme faktörü β kontrol hacminden çıkış için hesaplanmıştır. Ancak boru kesiti kontrol hacmine bir *giriş* olarak ele alınsaydı da aynı sonuç elde edilirdi



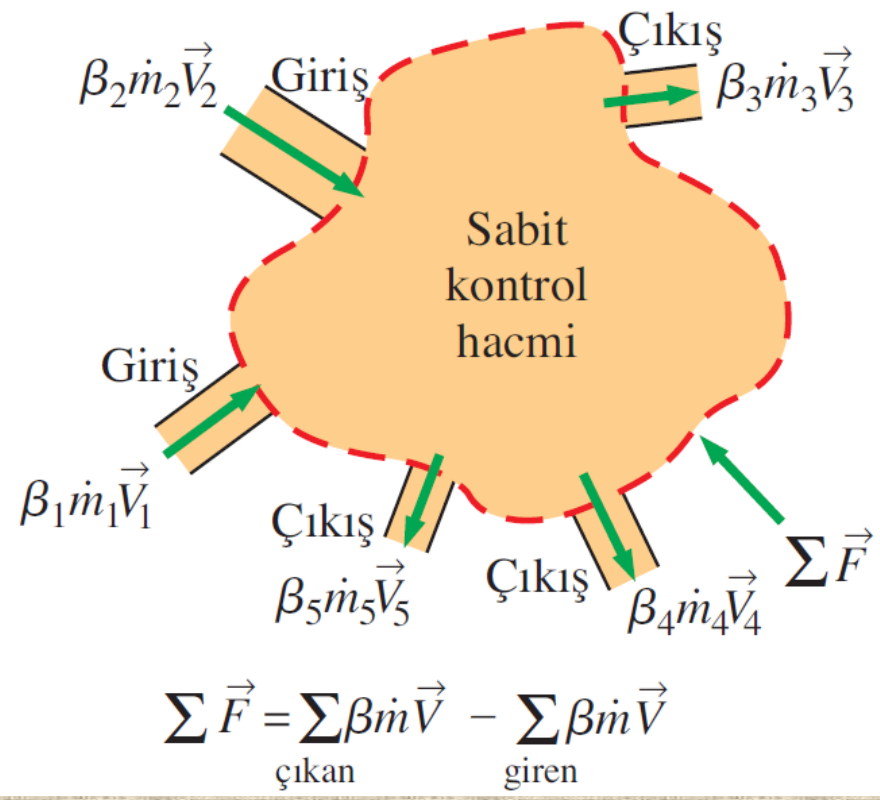
ŞEKİL 6–15
Akışın tam gelişmiş ve laminer olduğu bir boru en-kesitindeki hız profili.

Türbülanslı akış için giriş ve çıkış kesitlerinde β'nın etkisi önemsiz olmakla birlikte laminer akış için β önemli olabilir ve ihmal edilmemelidir. Momentumun korunumu ile ilgili kontrol hacmi problemlerine β'nın eklenmesi yerinde olur.

Daimi Akış

Daimi akış için lineer momentum denklemi: $\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V}$

Kontrol hacmine etkiyen net kuvvet, birim zamanda kontrol hacminden çıkan ve kontrol hacmine giren momentumlar arasındaki farka eşittir.

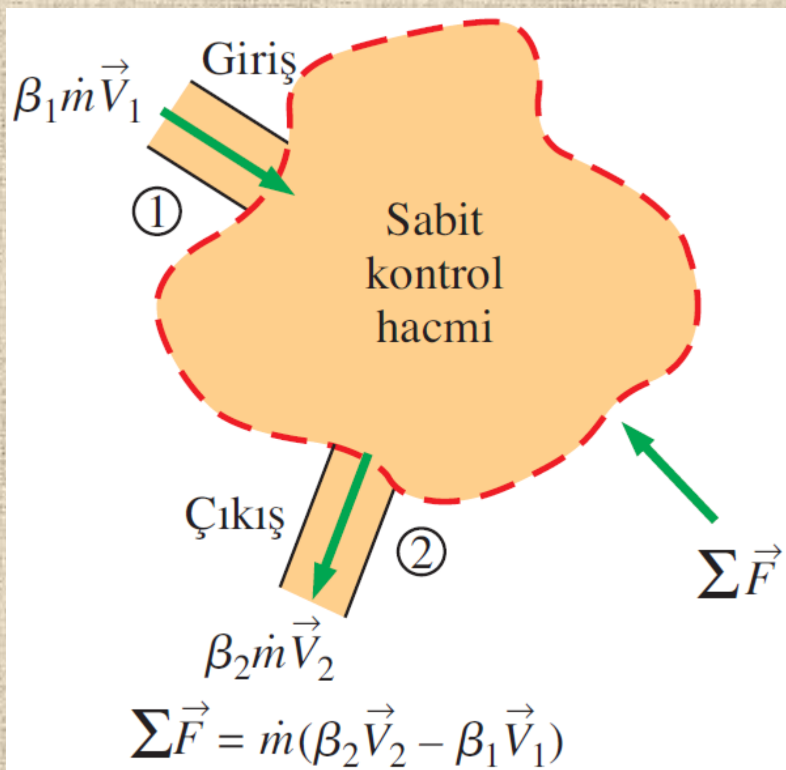


Daimi akışta kontrol hacmine etkiyen net kuvvet, çıkan ve giren momentum akılarının farkına eşittir.

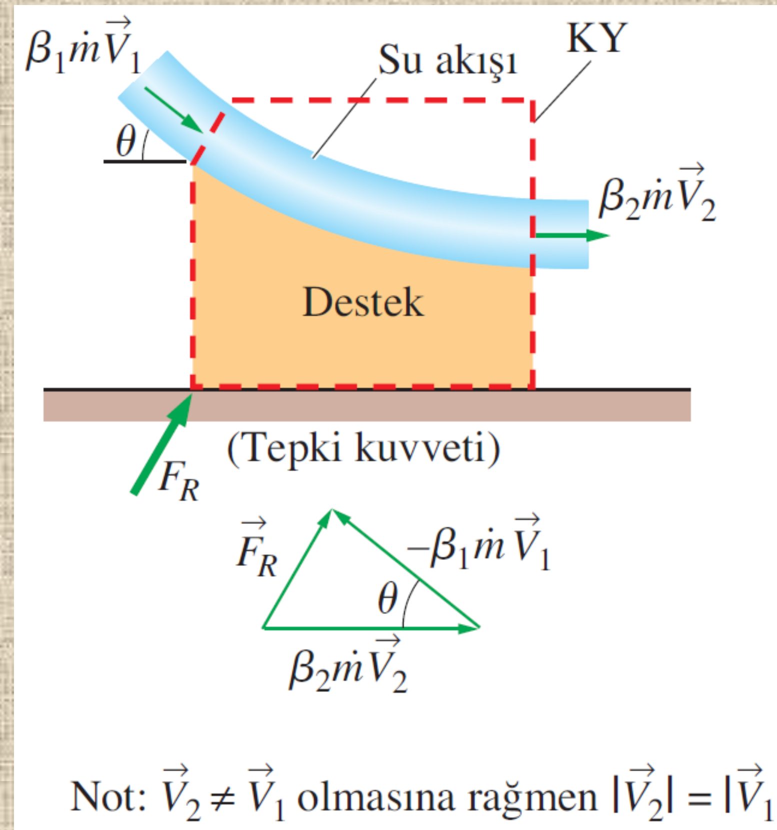
Bir Giriş ve Bir Çıkışlı Daimi Akış

$$\sum \vec{F} = \dot{m}\,(\beta_2 \vec{V}_2 - \beta_1 \vec{V}_1)$$ Bir giriş bir çıkış

$$\sum F_x = \dot{m}(\beta_2 V_{2,x} - \beta_1 V_{1,x})$$ x-koordinatı boyunca



Sadece tek girişi ve tek çıkışı olan bir kontrol hacmi.



Suyun yönünün değiştirilmesi nedeniyle destek elemanında oluşan tepki kuvvetinin vektör toplamı ile belirlenmesi.

Dış Kuvvetlerin Bulunmadığı Akışlar

Dış kuvvetlerin bulunmadığı durum: $0 = \dfrac{d(m\vec{V})_{\text{KH}}}{dt} + \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V}$

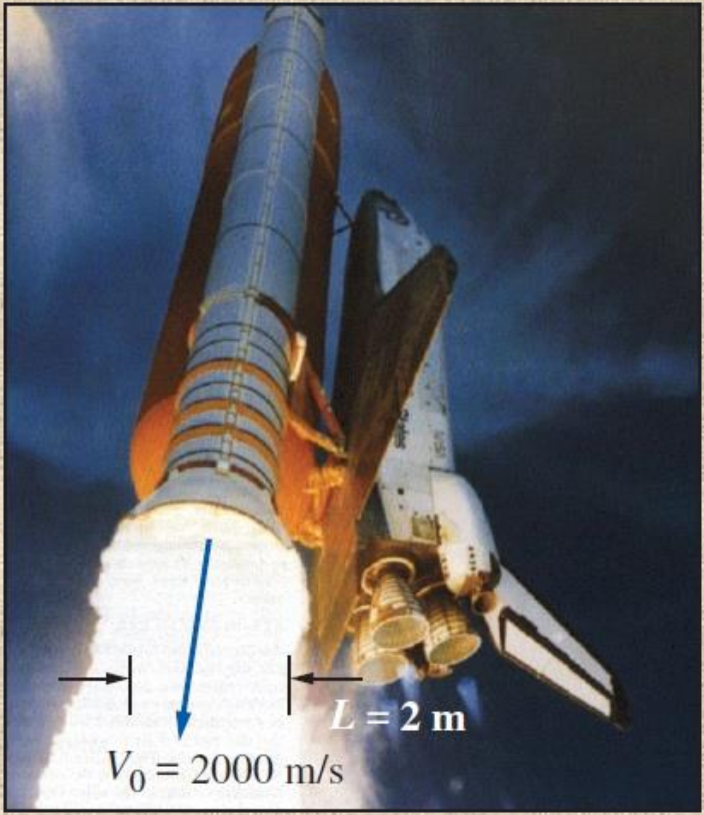
Dış kuvvetlerin bulunmaması halinde, bir kontrol hacminin momentumunun değişim hızının, birim zamanda giren ve çıkan momentumların arasındaki farka eşittir.

$$\frac{d(m\vec{V})_{\text{KH}}}{dt} = m_{\text{KH}} \frac{d\vec{V}_{\text{KH}}}{dt} = (m\vec{a})_{\text{KH}} = m_{\text{KH}} \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{itki}} = m_{\text{cisim}} \vec{a} = \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V}$$

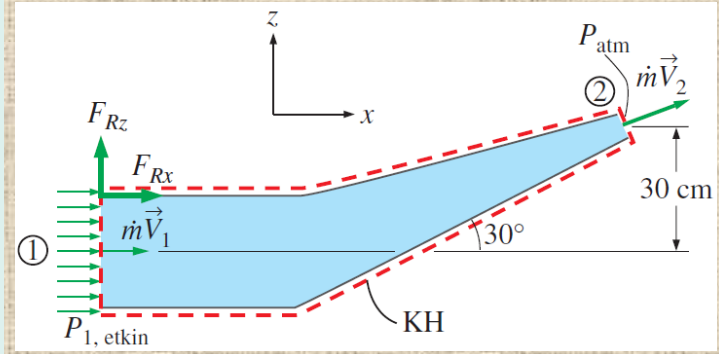
Uzay mekiğini kaldırmak için gerekli itki roket motorları tarafından sağlanır.

Bu durum, yakıtın sıfır olan hızının yanma işleminden sonra 2000 m/s civarında bir çıkış hızına yükselmesi sırasında oluşan momentum değişiminin bir sonucudur.



ÖRNEK 6–2 Saptırıcı Dirseği Yerinde Tutmak İçin Gerekli Kuvvet

Yatay bir borudan akmakta olan 14 kg/s debisindeki suyu, yatayla 30° açı yapacak şekilde saptırarak hızlandırmak için daralan bir dirsek kullanılmaktadır (Şekil 6–20). Su dirsekten atmosfere boşaltılmaktadır. Dirseğin giriş ve çıkış kesitlerinin alanları sırasıyla 113 cm^2 ve 7 cm^2'dir. Giriş ve çıkış kesitlerinin merkezleri arasındaki seviye farkı ise 30 cm'dir. Dirseğin ve içerisindeki suyun ağırlığı ihmal edilebilir. (*a*) Dirseğin giriş kesitinin merkezindeki etkin basıncı ve (*b*) dirseği yerinde tutabilmek için gerekli kuvveti hesaplayınız.



ÇÖZÜM Daralan bir dirsek suyu yukarıya doğru saptırmakta ve atmosfere boşaltmaktadır. Dirseğin girişindeki basıncın ve dirseği yerinde tutmak için gerekli kuvvetin belirlenmesi istenmektedir.

Kabuller **1** Akış daimidir ve sürtünme etkileri ihmal edilebilir. **2** Dirseğin ve içerisindeki suyun ağırlıkları ihmal edilebilir. **3** Su atmosfere boşaltılmaktadır, dolayısıyla çıkıştaki etkin basınç sıfırdır. **4** Kontrol hacminin hem girişinde hem de çıkışında akış türbülanslı ve tam gelişmiştir. Dolayısıyla giriş ve çıkış için momentum akısı düzeltme faktörü $\beta = 1.03$ olarak alınabilir.

Özellikler Suyun yoğunluğu 1000 kg/m^3 alınabilir.

Analiz (*a*) Dirsek kontrol hacmi olarak alınmış ve giriş 1, çıkış da 2 ile numaralandırılmıştır. Şekilde gösterildiği gibi *x*- ve *z*-koordinat eksenleri kullanılmıştır. Böyle tek girişli, tek çıkışlı, daimi akışlı sistemler için süreklilik denklemi, $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = 14$ kg/s şeklinde ifade edilir. $\dot{m} = \rho A V$ olduğu dikkate alındığında suyun giriş ve çıkıştaki hızları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(0.0113 \text{ m}^2)} = 1.24 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{14 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(7 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} = 20.0 \text{ m/s}$$

Basıncı yaklaşık olarak hesaplamak için Bernoulli denklemini (Bölüm 5) kullanalım. Çeperlerdeki sürtünme kayıplarının nasıl hesaplanacağı ileride Bölüm 8'de anlatılacaktır. Giriş kesitinin merkezi referans olarak ($z_1 = 0$) alınıp, $P_2 = P_{atm}$ olduğu dikkate alındığında, dirsek ekseni boyunca uzanan akım çizgisi için Bernoulli denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho g\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 - z_1\right)$$

$$P_1 - P_{atm} = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$\times \left(\frac{(20 \text{ m/s})^2 - (1.24 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + 0.3 - 0\right)\left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg·m/s}^2}\right)$$

$$P_{1,\text{ etkin}} = 202.2 \text{ kN/m}^2 = \mathbf{202.2\ kPa} \quad \text{(etkin)}$$

(*b*) Daimi akış için momentum denklemi,

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V}$$

şeklindedir. Dirseği sabitlemek için gerekli kuvvetin *x*- ve *z*-bileşenleri olan F_{Rx} ve F_{Rz} kuvvetlerinin her ikisinin de pozitif yönlü olduğunu kabul edelim. Kontrol yüzeyinin tamamına atmosfer basıncı etkidiğinden etkin basınç kullanılabilir. Bu durumda *x*- ve *z*-eksenleri boyunca momentum denklemleri,

$$F_{Rx} + P_{1,\,\text{etkin}} A_1 = \beta \dot{m} V_2 \cos\theta - \beta \dot{m} V_1$$

$$F_{Rz} = \beta \dot{m} V_2 \sin\theta$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\beta = \beta_1 = \beta_2$ olarak alınmıştır. Denklemde F_{Rx} ve F_{Rz} yalnız bırakılıp verilen değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \beta \dot{m}(V_2 \cos\theta - V_1) - P_{1,\,\text{etkin}} A_1 \\ &= 1.03(14\ \text{kg/s})[(20 \cos 30^\circ - 1.24)\ \text{m/s}]\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) \\ &\quad - (202200\ \text{N/m}^2)(0.0113\ \text{m}^2) \\ &= 232 - 2285 = \mathbf{-2053\ N} \end{aligned}$$

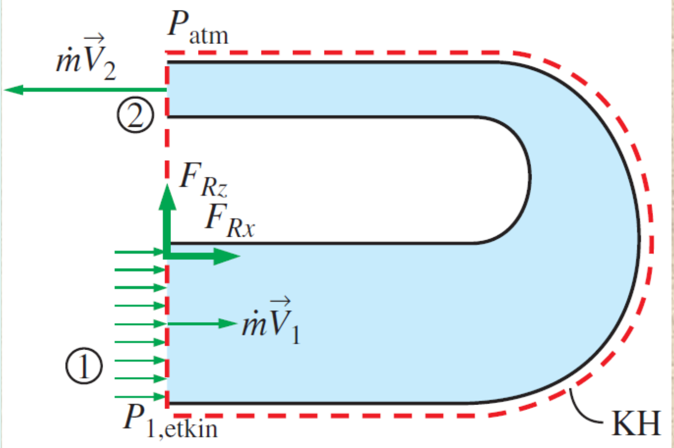
$$F_{Rz} = \beta \dot{m} V_2 \sin\theta = (1.03)(14\ \text{kg/s})(20 \sin 30^\circ\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{144\ N}$$

elde edilir. F_{Rx}'in negatif çıkması, kabul edilen yönün yanlış olduğunu göstermektedir, yani yön tersine çevrilmelidir. Dolayısıyla F_{Rx} negatif *x*-yönünde etkir.

İrdeleme Dirseğin iç çeperleri boyunca olan basınç dağılımı sıfırdan farklıdır. Ancak kontrol hacmi dirseğin dışında olduğundan bu basınçlar analizde yer almaz. Bunun yanında hesaplamaların doğruluğunu arttırması bakımından dirseğin ve içerisindeki suyun ağırlığı da eklenebilir. Ayrıca $P_{1,\,\text{etkin}}$'in gerçek değeri, dirsekteki sürtünme ve diğer tersinmez kayıplar nedeniyle burada hesaplanan değerden daha büyük olacaktır.

ÖRNEK 6–3 Ters Döndürücü Dirseği Yerinde Tutmak İçin Gerekli Kuvvet

Örnek 6–2'deki saptırıcı dirsek, Şekil 6–21'de gösterildiği gibi akışkana dışarı atılmadan önce 180° U dönüşü yaptıran bir ters döndürücü dirsek ile değiştirilmiştir. Giriş ve çıkış kesitlerinin merkezleri arasındaki seviye farkı yine 0.3 m'dir. Bu durumda dirseği yerinde tutmak için gerekli kuvveti hesaplayınız.



ÇÖZÜM Giriş ve çıkış hızları ile dirseğin girişindeki basınç aynı kalmaktadır. Ancak verilen durumda, düşey doğrultuda başka herhangi bir kuvvet ya da momentum akısı (dirseğin ve suyun ağırlıkları ihmal edilmektedir) olmadığından, yerinde tutma kuvvetinin dirseğin boruya bağlantı noktasındaki düşey bileşeni sıfırdır ($F_{Rz} = 0$). Yerinde tutma kuvvetinin yatay bileşeni ise, x-yönünde yazılacak momentum denklemiyle belirlenebilir. Çıkış hızının negatif x-yönünde olduğu dikkate alınarak momentum denklemi yazılırsa,

$$F_{Rx} + P_{1,\,\text{etkin}}A_1 = \beta_2\dot{m}(-V_2) - \beta_1\dot{m}V_1 = -\beta\dot{m}(V_2 + V_1)$$

elde edilir. Denklemden F_{Rx} çekilip verilen değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= -\beta\dot{m}(V_2 + V_1) - P_{1,\,\text{etkin}}A_1 \\ &= -(1.03)(14\ \text{kg/s})[(20 + 1.24)\ \text{m/s}]\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) - (202200\ \text{N/m}^2)(0.0113\ \text{m}^2) \\ &= -306 - 2285 = \mathbf{-2591\ N} \end{aligned}$$

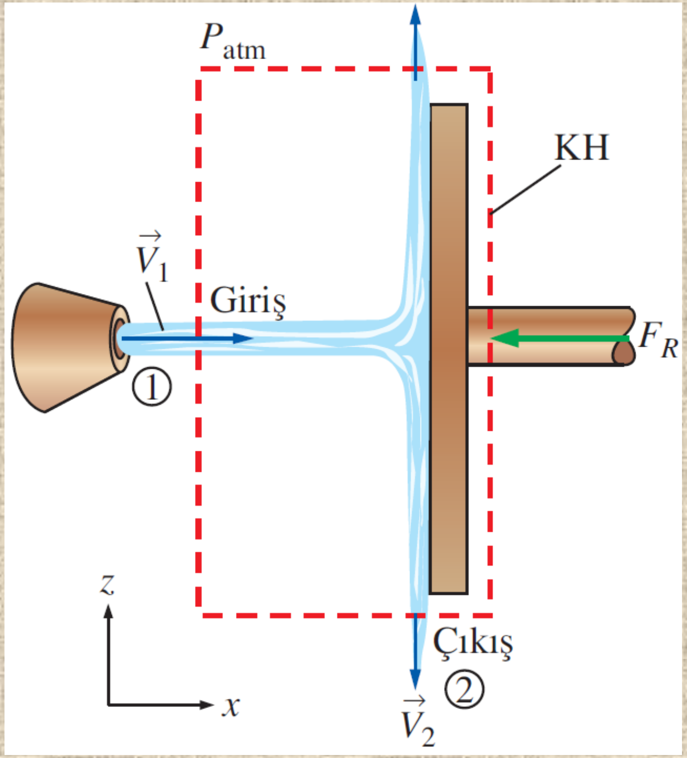
bulunur. Bu sonuç, flanştaki yatay kuvvetin negatif x-yönünde ve 2591 N olduğunu göstermektedir (bu kuvvet dirseği borudan ayırmaya çalışmaktadır). Bu kuvvet yaklaşık olarak 260 kg'lık bir kütlenin ağırlığına eşittir ve dolayısıyla bağlantıda kullanılacak cıvata gibi bağlantı elemanları bu kuvvete dayanabilecek kadar mukavemetli olmalıdır.

ÖRNEK 6–4 Sabit Bir Levhaya Çarpan Su Jeti

Ortalama hızı bir lüle ile 20 m/s'ye çıkarılan 10 kg/s debili su jeti, düşey sabit bir levhaya dik olarak çarptırılmaktadır (Şekil 6–22). Su çarpmadan sonra levha düzleminde her yöne dağılmaktadır. Levhanın yatay yöndeki hareketini engelleyecek kuvveti hesaplayınız.

ÇÖZÜM Bir su jeti düşey haldeki hareketsiz bir levhaya dik olarak çarpmaktadır. Levhayı yerinde tutmak için gerekli kuvvetin hesaplanması istenmektedir.

Kabuller **1** Lüle çıkışında suyun akışı daimidir. **2** Dağılan suların yönü su jetinin geliş yönüne diktir. **3** Su jeti atmosfer ortamında akmaktadır. Dolayısıyla su jetinin ve dağılarak kontrol hacmini terk eden suyun basıncı atmos-



fer basıncına eşittir. Atmosfer basıncı tüm sisteme etkidiğinden göz ardı edilebilir. **4** Düşey doğrultudaki kuvvetler ile momentum akılarının, yatay tepki kuvvetine herhangi bir etkisi bulunmamaktadır ve bu nedenle bunlar hesaplamalarda dikkate alınmayacaktır. **5** Momentum akısı düzeltme faktörünün etkisi ihmal edilebilir, dolayısıyla $\beta \cong 1$ alınabilir.

Analiz Bu problem için kontrol hacmini; levhanın tamamını kapsayacak, su jetini ve levhayı tutan destek elemanını dik kesecek şekilde çizilelim. Bir-boyutlu daimi akış için momentum denklemi,

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V} \qquad \textbf{(1)}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu problem için Denklem (1), x-yönünde (negatif x-yönündeki kuvvetlerin ve hızların negatif işaretleri unutulmadan) $V_{1,\,x} = V_1$ ve $V_{2,\,x} = 0$ olduğu da dikkate alınarak,

$$-F_R = 0 - \beta \dot{m} V_1$$

şeklinde yazılabilir. Verilen değerler yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

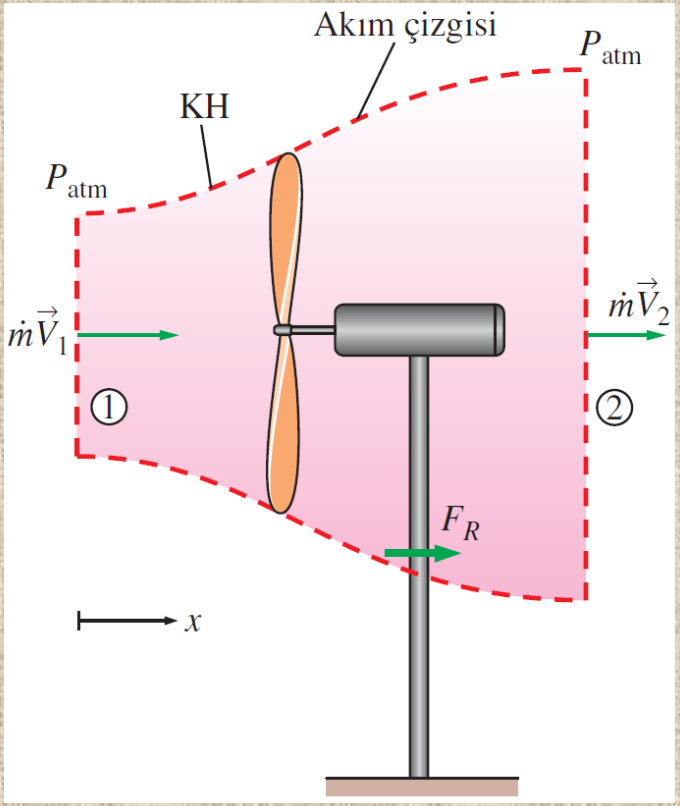
$$F_R = \beta \dot{m} V_1 = (1)(10\ \text{kg/s})(20\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{200\ N}$$

Yani destek elemanı, levhayı yerinde tutabilmek için negatif x-yönünde (su jetinin tersi yönde) 200 N'luk (yaklaşık 20 kg kütlenin ağırlığına eşit) yatay bir kuvvet uygulamalıdır. Buna benzer bir durum helikopterlerin oluşturduğu aşağı yönlü hava akışlarında da görülür (Şekil 6–23).

İrdeleme Levha su jetinin momentum darbesinin tamamını emmektedir, çünkü kontrol hacminin çıkışında x-yönündeki momentum sıfırdır. Kontrol hacmi levha ile suyun ara yüzeyi boyunca çizilseydi, ilave basınç kuvvetleri (bilinmeyenler) de analize dahil edilmiş olurdu. Kontrol hacmi destek elemanını kesecek şekilde seçmekle gereksiz karmaşıklıkların önüne geçmiş olduk. Buradaki durum, kontrol hacminin "akıllıca" seçilmesine iyi bir örnektir.

ÖRNEK 6–5 Bir Rüzgâr Türbininin Ürettiği Güç Ve Rüzgâr Yükü

Kanatlarının çapı 9.14 m olan bir rüzgâr türbininin çalışabildiği minimum rüzgâr hızı 11.3 km/h'dir. Türbin bu koşullarda 0.4 kW elektrik enerjisi üretebilmektedir (Şekil 6–24). (*a*) Rüzgâr türbini-jeneratör grubunun verimini ve (*b*) rüzgâr türbinini taşıyan direğe yatay doğrultuda etkiyen kuvveti hesaplayınız. Rüzgâr hızının iki kat artarak 22.6 km/h'e çıkmasının güç üretimine ve direğe etkiyen kuvvete etkisi ne olur? Verimin değişmediği ve havanın yoğunluğunun 1.217 kg/m^3 olduğu kabul edilebilir.



Özellikler Havanın yoğunluğu 1.217 kg/m^3 olarak verilmiştir.

Analiz Kinetik enerji bir tür mekanik enerjidir ve dolayısıyla tamamen işe dönüştürülebilir. Buradan rüzgârın güç potansiyelinin, birim kütle başına $V^2/2$ olan kinetik enerjisi ile doğru orantılı olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Böylece verilen kütlesel debi için maksimum güç $\dot{m}V^2/2$ olur. Buna göre,

$$V_1 = (11.3 \text{ km/h}) \left(\frac{0.2778 \text{ m/s}}{1 \text{ km/h}}\right) = 3.14 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 V_1 \frac{\pi D^2}{4} = (1.217 \text{ kg/m}^3)(3.14 \text{ m/s}) \frac{\pi (9.14 \text{ m})^2}{4} = 250.73 \text{ kg/s}$$

$$\dot{W}_{\text{maks}} = \dot{m}\text{ke}_1 = \dot{m}\frac{V_1^2}{2}$$

$$= (250.73 \text{ kg/s}) \frac{(3.14 \text{ m/s})^2}{2}$$

$$= 1.236 \text{ kW}$$

sonucuna varılır. Buradan, rüzgâr türbini için 11.3 km/h (3.14 m/s) rüzgâr hızında 1.236 kW'lık bir güç potansiyeli bulunduğu söylenebilir. Buna göre türbin-jeneratör grubunun verimi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\eta_{\text{rüzgâr türbini}} = \frac{\dot{W}_{\text{gerçek}}}{\dot{W}_{\text{maksimum}}} = \frac{0.4 \text{ kW}}{1.225 \text{ kW}} = \mathbf{0.327} \quad (\text{veya } \mathbf{\%32.7})$$

(*b*) Sürtünme etkilerinin ihmal edilebilecek kadar az olduğu kabul edilirse, gelen kinetik enerjinin elektriğe dönüştürülemeyen kısmı rüzgâr türbinini kinetik enerji olarak terk eder. Kütlesel debinin sabit kalacağı göz önüne alınırsa çıkış hızı,

$$\dot{m}\mathrm{ke}_2 = \dot{m}\mathrm{ke}_1(1 - \eta_{\text{rüzgâr türbini}}) \rightarrow \dot{m}\frac{V_2^2}{2} = \dot{m}\frac{V_1^2}{2}(1 - \eta_{\text{rüzgâr türbini}}) \qquad \textbf{(1)}$$

şeklinde hesaplanabilir. Buna göre,

$$V_2 = V_1\sqrt{1 - \eta_{\text{rüzgâr türbini}}} = (3.14\ \mathrm{m/s})\ \sqrt{1 - 0.324} = 2.58\ \mathrm{m/s}$$

elde edilir. Direğe etkiyen kuvveti hesaplamak üzere (Şekil 6–25), rüzgâr türbininin etrafına rüzgârın kontrol yüzeyine dik olarak girip çıkacağı ve bütün kontrol yüzeyinin atmosfer basıncında kalacağı bir kontrol hacmi çizelim (Şekil 6–24). Bir-boyutlu daimi akış için momentum denklemi,

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta\dot{m}\vec{V} \qquad \textbf{(2)}$$

şeklinde verilmişti. $\beta = 1$, $V_{1,x} = V_1$ ve $V_{2,x} = V_2$ olduğu dikkate alınarak Denklem (2)'nin *x*-bileşeni aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_R = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \dot{m}(V_2 - V_1) \qquad \textbf{(3)}$$

Verilen değerler yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca varılır:

$$F_R = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = (250.73\ \mathrm{kg/s})(2.58 - 3.14\ \mathrm{m/s})$$

$$= -140.41\ \mathrm{N}$$

Negatif işaret, beklendiği gibi tepki kuvvetinin negatif x-yönünde etkidiğini göstermektedir. Dolayısıyla rüzgârın taşıyıcı direğe uyguladığı kuvvet $F_{\text{direk}} = -F_R =$ **140.41 N** olacaktır.

Kütlesel debi V ile, kinetik enerji ise V^2 ile doğru orantılı olduğundan, üretilen güç V^3 ile doğru orantılıdır. Bu nedenle rüzgâr hızının iki katına çıkarak 22.6 km/h olması, üretilen gücü $2^3 = 8$ katına çıkararak $0.4 \times 8 = 3.2$ kW yapar. Rüzgârın taşıyıcı direğe uyguladığı kuvvet V^2 ile orantılıdır. Dolayısıyla rüzgâr hızının iki katına çıkarak 22.6 km/h olması, rüzgâr kuvvetini $2^2 = 4$ katına çıkararak $140.41 \times 4 = 561.64$ N yapar.

İrdeleme Rüzgâr türbinleri Bölüm 14'te çok daha detaylı olarak ele alınacaktır.

ÖRNEK 6–6 Bir Uzay Aracının Yavaşlatılması

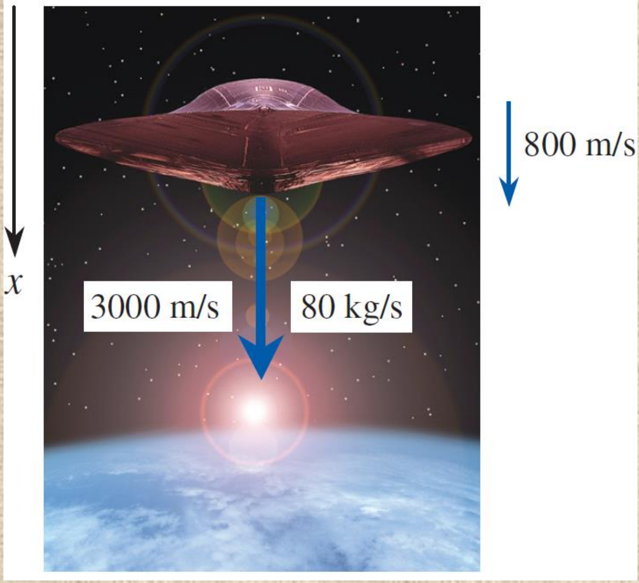
Kütlesi 12000 kg olan bir uzay aracı 800 m/s sabit hızla düşey olarak bir gezegene inmektedir (Şekil 6–26). Aracı yavaşlatmak üzere alt kısımda bulunan katı-yakıt roketi ateşlenmiştir. Yanma sonucu oluşan gazlar roketi, 5 s'lik bir süre zarfında rokete göre 80 kg/s'lik sabit debi ve 3000 m/s'lik sabit hızla aracın hareket yönünde terk etmektedir. Yanan yakıttan dolayı aracın toplam kütlesinde meydana gelecek az miktardaki değişimi göz ardı ederek (*a*) bu süre zarfında aracın ivmesini, (*b*) aracın hızında meydana gelen değişimi ve (*c*) araca uygulanan itkiyi hesaplayınız.

Analiz (*a*) Hesaplamalarda kolaylık sağlaması bakımından, araç ile birlikte aynı hızla hareket eden ivmesiz bir referans koordinat sistemi tercih edilmiştir. Böylece ivmesiz referans koordinat sistemine göre olan akışkan hızları, araca göre olan bağıl hızlarla aynı olur. Aracın hareket yönü *x*-ekseni yönünde pozitif olarak kabul edilmiştir. Araca herhangi bir dış kuvvet etkimezken kütlesi de sabit kabul edilmektedir. Bu nedenle araç, sabit kütleli katı bir cisim gibi kabul edilebilir ve buna göre momentum denklemi Denklem 6–29'da olduğu gibi,

$$\vec{F}_{\text{itki}} = m_{\text{uzay aracı}}\,\vec{a}_{\text{uzay aracı}} = \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m}\vec{V} - \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m}\vec{V}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ivmesiz referans koordinat sistemine göre olan akışkan hızları araca göre olan bağıl akışkan hızları ile aynıdır. Hareketin düz bir çizgi yörünge üzerinde olduğu ve atılan gazların pozitif *x*-yönünde hareket ettiği dikkate alınarak büyüklükler cinsinden momentum denklemi,

$$m_{\text{uzay aracı}}\,a_{\text{uzay aracı}} = m_{\text{uzay aracı}}\frac{dV_{\text{uzay aracı}}}{dt} = -\,\dot{m}_{\text{gaz}}V_{\text{gaz}}$$



şeklinde yazılabilir. Gazların aracı pozitif *x*-yönünde terk ettiğini bir kez daha hatırlayarak verilen değerler yerine yazıldığında, aracın ilk 5 s'lik zaman dilimindeki ivmesi,

$$a_{\text{uzay aracı}} = \frac{dV_{\text{uzay aracı}}}{dt} = -\frac{\dot{m}_{\text{gaz}}}{m_{\text{uzay aracı}}}V_{\text{gaz}} = -\frac{80\ \text{kg/s}}{12000\ \text{kg}}(+3000\ \text{m/s}) = \mathbf{-20\ m/s^2}$$

olarak bulunur. Sonucun negatif çıkması aracın pozitif *x*-yönünde 20 m/s²'lik bir ivme ile yavaşladığını doğrulamaktadır.

(*b*) İvme bilindiğine göre ilk 5 s'de aracın hızında meydana gelen değişim, ivmenin tanımından,

$$dV_{\text{uzay aracı}} = a_{\text{uzay aracı}}dt \rightarrow \Delta V_{\text{uzay aracı}} = a_{\text{uzay aracı}}\Delta t = (-20\ \text{m/s}^2)(5\ \text{s})$$
$$= \mathbf{-100\ m/s}$$

olarak hesaplanır.

(*c*) Araca etki eden itki ise Denklem 6–29 kullanılarak bulunabilir:

$$F_{\text{uzay aracı}} = 0 - \dot{m}_{\text{gaz}}V_{\text{gaz}} = 0 - (80\ \text{kg/s})(+3000\ \text{m/s})\left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = \mathbf{-240\ kN}$$

Eksi işaret, roketin ateşlenmesiyle meydana gelen itki kuvvetinin araca negatif *x*-yönünde etkidiğini göstermektedir.

İrdeleme Ateşlenen bu roketin bir test platformuna sabitlenmesi durumunda, bağlantı noktasına gazların hareket yönüne zıt yönde 240 kN'luk (24 ton kütlenin ağırlığına eşit) bir kuvvet uygulayacağına dikkat ediniz.

ÖRNEK 6–7 Bir Flanşa Etkiyen Net Kuvvet

Bir sürgülü vanayla yarı kapalı vaziyette tutulan flanşlı bir musluktan 70 L/dakika debiyle su akmaktadır (Şekil 6–27). Flanşın bulunduğu bölümde borunun iç çapı 19.8 mm ve bu noktada ölçülen basınç 89.63 kPa'dır. Musluğun ve içindeki suyun toplam ağırlığı 56.94 N'dur. Flanşa etkiyen net kuvveti hesaplayınız.

Analiz Şekil 6–27'de üzerine etkiyen tüm kuvvetler ile birlikte gösterildiği gibi musluk ve hemen etrafı kontrol hacmi olarak seçilmiştir. Kontrol hacmine etkiyen bu kuvvetler; suyun ve musluğun toplam ağırlıkları, kontrol hacminin girişindeki etkin basıncın oluşturduğu kuvvet ve $\vec{F}_R$ ile gösterilen flanşa etkiyen net kuvvettir. Kontrol yüzeyinin diğer bölümlerinde etkin basınç sıfır (atmosfer basıncı) olduğu için kolaylık olması bakımından etkin basınç kullanılacaktır. Akış sıkıştırılamaz kabul edildiğinden kontrol hacminin çıkışındaki basınç da atmosfer basıncına eşit olacaktır; bu yüzden çıkıştaki etkin basınç da sıfır olacaktır.

Artık korunum yasaları kontrol hacmine uygulanabilir. Kütlenin korunumu bu durumda önemsizdir, çünkü sadece bir giriş ile bir çıkış vardır ve kontrol hacmine giren kütlesel debi, kontrol hacminden çıkan kütlesel debiye eşittir. Ayrıca giren ve çıkan akışların ortalama hızları da aynıdır, çünkü iç çap sabit ve su sıkıştırılamaz bir akışkandır. Buna göre ortalama hızlar,

$$V_2 = V_1 = V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{70\ \text{L/dakika}}{\pi(0.0198)^2/4}\left(\frac{0.001^3}{1\ \text{L}}\right)\left(\frac{1\ \text{dakika}}{60\ \text{s}}\right) = 3.79\ \text{m/s}$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda,

$$\dot{m} = \rho\dot{V} = (998\ \text{kg/m}^3)(70\ \text{L/dakika})\left(\frac{0.0001\ \text{m}^3}{1\ \text{L}}\right)\left(\frac{1\ \text{dakika}}{60\ \text{s}}\right) = 1.16\ \text{kg/s}$$

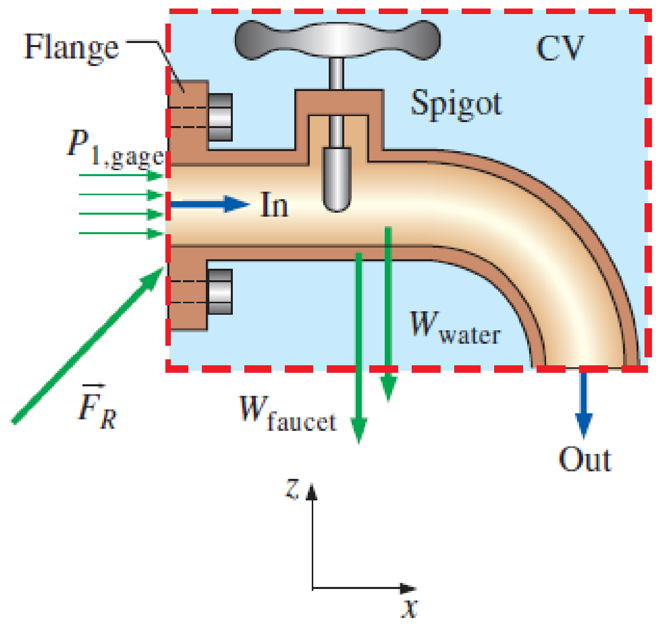


FIGURE 6–27
Control volume for Example 6–7 with all forces shown; gage pressure is used for convenience.

olarak hesaplanır. Şimdi de daimi akış için momentum denklemini uygulayalım:

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{çıkan}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{giren}} \beta \dot{m} \vec{V} \qquad (1)$$

Flanşa etkiyen kuvvetin x- ve z-bileşenleri, yönleri pozitif olan F_{Rx} ve F_{Rz} olsun. Girişte x-yönündeki hızın büyüklüğü $+V_1$ fakat çıkışta sıfırdır. Yine girişte z-yönündeki hızın büyüklüğü sıfır ancak çıkışta $-V_2$'dir. Ayrıca musluk ve içindeki suyun ağırlığı da $-z$-yönündeki bir kütle kuvveti olarak etkir. Akıllıca seçilen bu kontrol hacmine z-yönünde herhangi bir basınç kuvveti ya da viskoz kuvvet etkimemektedir.

Buna göre x- ve z-doğrultularındaki momentum denklemleri,

$$F_{Rx} + P_{1,\text{etkin}} A_1 = 0 - \dot{m}(+V_1)$$

$$F_{Rz} - W_{\text{musluk}} - W_{\text{su}} = \dot{m}(-V_2) - 0$$

olur. Bu denklemler F_{Rx} and F_{Rz} için çözülüp verilen değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= -\dot{m}V_1 - P_{1,\text{etkin}} A_1 \\ &= -1.16\text{ kg})(3.79\text{ m/s}) - (89.63\text{ kPa})\,\frac{\pi(0.0198\text{ m})^2}{4} \\ &= -32.00\text{ N} \\ F_{Rz} &= -\dot{m}V_2 + W_{\text{musluk+su}} \\ &= -(1.16\text{ kg/s})(3.79\text{ m/s}) + 56.94\text{ N} = 52.54\text{ N} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda kontrol hacmindeki flanşa etkiyen net kuvvet vektörel gösterim ile,

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Rz}\vec{k} = -32.00\vec{i} + 52.54\vec{k}\ \text{N}$$

şeklinde ifade edilebilir. Newton'un üçüncü yasasına göre musluğun flanşa uyguladığı $\vec{F}_R$ kuvveti negatiftir.

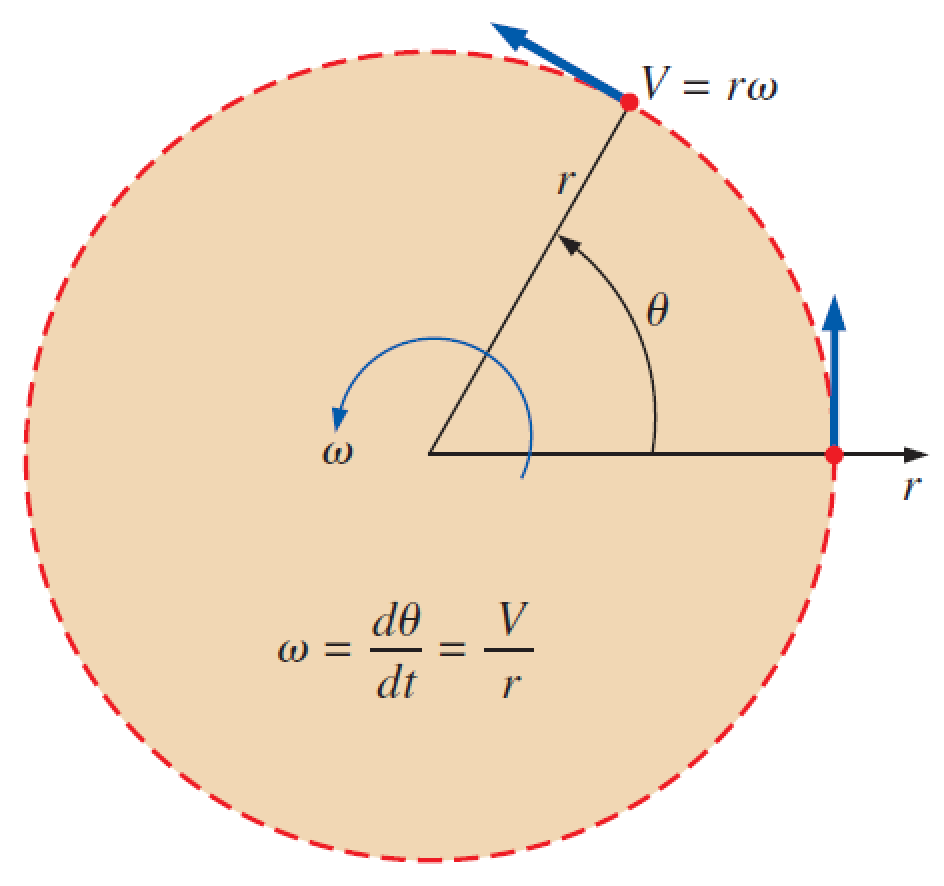
$$\vec{F}_{\text{musluğun flanşa uyguladığı}} = -\vec{F}_R = \mathbf{32.00\vec{i} - 52.54\vec{k}\ \ N}$$

6–5 ■ DAİRESEL HAREKETİN VE AÇISAL MOMENTUMUN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

Dairesel hareket: Cismin üzerinde bulunan bütün noktaların dönme ekseni etrafında dairesel yörüngeler çizerek hareket etmesidir.
Dairesel hareket; açısal yer değiştirme θ, açısal hız ω ve açısal ivme α gibi açısal büyüklüklerle tanımlanır.

Açısal hız: Birim zamandaki açısal yer değiştirmedir.

Açısal ivme: Açısal hızın değişim hızıdır.



Açısal yer değiştirme θ, açısal hız ω ve doğrusal hız V arasındaki ilişkiler.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(l/r)}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dl}{dt} = \frac{V}{r}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{dV}{dt} = \frac{a_t}{r}$$

$$V = r\omega \qquad \text{and} \qquad a_t = r\alpha$$

- Newton’un ikinci yasasına göre açısal ivmenin oluşması için teğetsel doğrultuda bir kuvvet bulunmalıdır.
- *Moment* ya da *tork* olarak adlandırılan döndürme etkisi, kuvvetin büyüklüğü ve dönme eksenine olan mesafe ile orantılıdır.
- Kuvvetin doğrultusu ile dönme ekseni arasındaki dik mesafe *moment kolu* olarak adlandırılır. Buna göre, dönme eksenine dik mesafesi *r* olan, *m* noktasal kütlesine etkiyen *M* momenti,

$$M = rF_t = rma_t = mr^2\alpha$$

Tork

$$M = \int_{\text{mass}} r^2\alpha\, \delta m = \left[\int_{\text{mass}} r^2\, \delta m\right]\alpha = I\alpha$$

I cismin dönmeye karşı eylemsizlik direncinin ölçüsü olan dönme eksenine göre cismin *kütle atalet momenti* dir.

Kütlenin aksine, bir cismin dönel eylemsizliği bu cismin kütlesinin dönme ekseni etrafındaki dağılımına da bağlıdır.

Kütle, m	$\longleftrightarrow$	Kütle atalet momenti, I
Lineer ivme, $\vec{a}$	$\longleftrightarrow$	Açısal ivme, $\vec{\alpha}$
Lineer hız, $\vec{V}$	$\longleftrightarrow$	Açısal hız, $\vec{\omega}$
Lineer momentum	$\longleftrightarrow$	Açısal momentum
$m\vec{V}$	$\longleftrightarrow$	$I\vec{\omega}$
Kuvvet, $\vec{F}$	$\longleftrightarrow$	Tork, $\vec{M}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
Kuvvetin momenti, $\vec{M}$	$\longleftrightarrow$	Momentumun momenti, $\vec{H}$
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$

Lineer ve açısal büyüklükler arasındaki benzeşim.

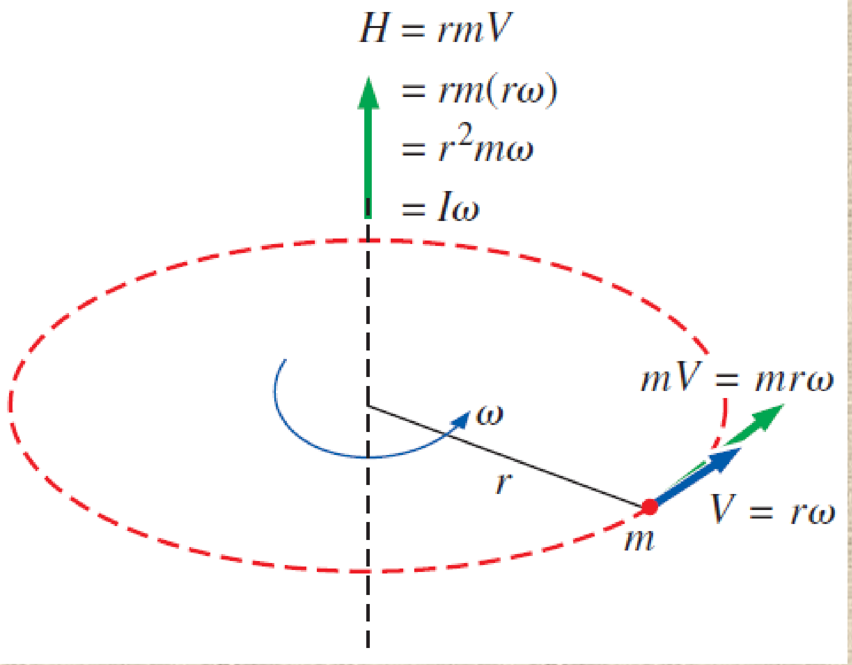
$$H = \int_{\text{kütle}} r^2\omega\, \delta m = \left[\int_{\text{kütle}} r^2\, \delta m\right]\omega = I\omega$$

Açısal momentum

$$\vec{H} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

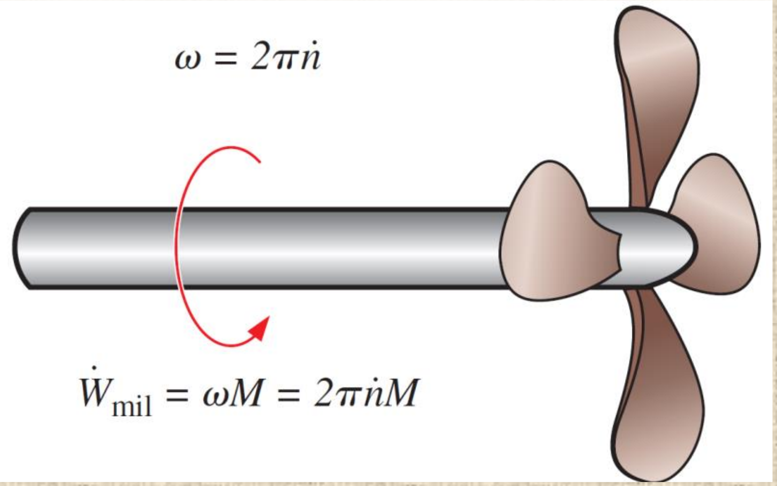
Açısal momentum denklemi



Dönme ekseninden r mesafede, ω açısal hızı ile dönmekte olan m kütleli bir noktanın açısal momentumu.

$$\omega = \frac{2\pi\dot{n}}{60} \quad \text{(rad/s)}$$

Açısal hız ve devir/dakika



devir/dakika olarak açısal hız ile mil ile aktarılan güç arasındaki ilişkiler.

$$\dot{W}_{\text{mil}} = FV = Fr\omega = M\omega$$

$$\dot{W}_{\text{mil}} = \omega M = 2\pi \dot{n} M$$ Mil gücü – Shaft Power

$$\text{KE}_r = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$ Dönel kinetik enerji

Dairesel harekette hızın büyüklüğü sabit kalsa da yönü sürekli olarak değişir. Hız vektörel bir büyüklüktür ve bu nedenle yöndeki bir değişim hızın da zamanla değişmesine yol açar ve bu da ivme meydana getirir. Buna **merkezcil ivme** denir ve büyüklüğü

$$a_r = \frac{V^2}{r} = r\omega^2$$

Merkezcil ivmenin yönü dönme eksenine doğrudur (radyal ivmenin tam tersi yöne) ve bu nedenle radyal ivme negatiftir. Merkezcil ivme, bir cisme dönme eksenine doğru etkiyen **merkezcil kuvvet** $F_r = mV^2/r$'nin bir sonucudur.

Teğetsel ve radyal ivmeler birbirine diktir ve toplam doğrusal ivme bu ikinin vektörel toplamı ile bulunur:

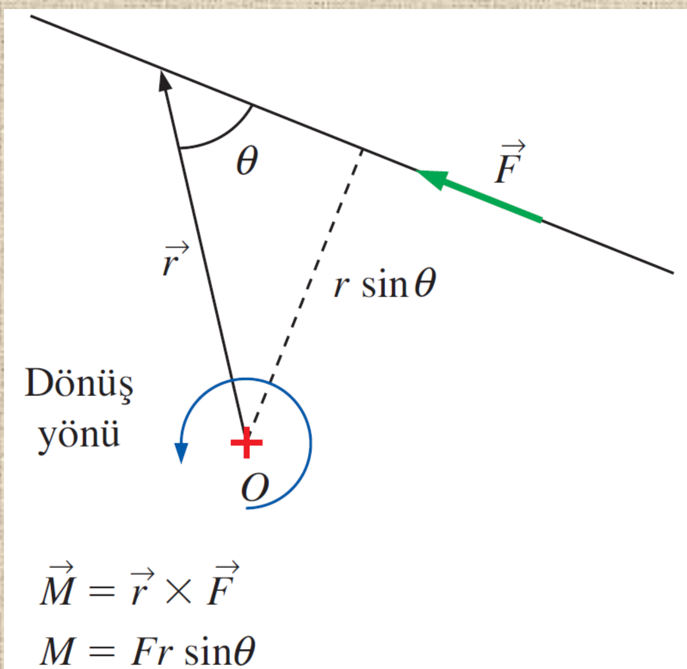
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

6–6 ■ AÇISAL MOMENTUM DENKLEMİ

Mühendislik problemlerinin çoğunda akışların lineer momentumunun momenti ve bunların neden olduğu dönel etkiler söz konusudur.

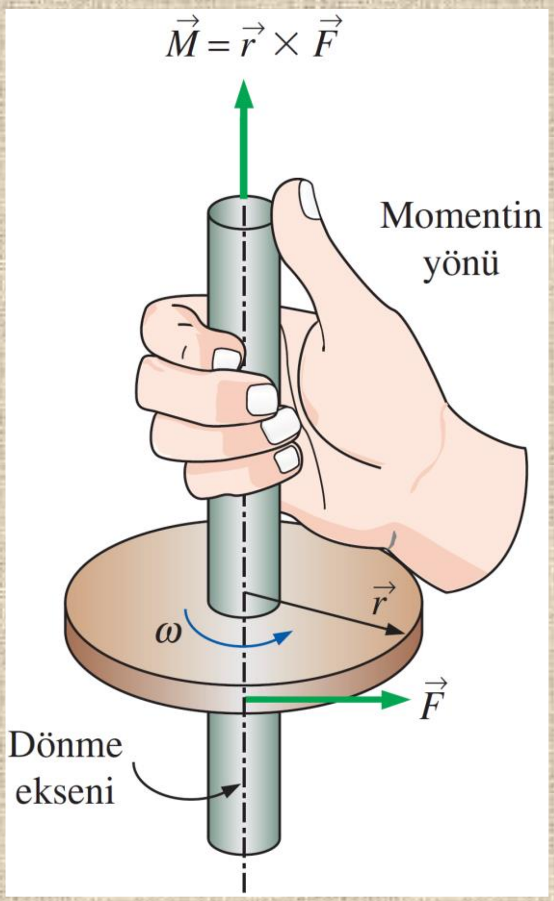
Bu tür problemler en iyi şekilde *momentumun momenti* olarak da adlandırılan *açısal momentum denklemi* ile incelenebilir.

Akım makinaları içerisinde en önemli grubu oluşturan ve aralarında santrifuj pompa, türbin ve fanların da bulunduğu *türbo makinalar* en iyi şekilde açısal momentum denklemi kullanılarak analiz edilir.



$\vec{F}$ kuvvetinin O noktasına göre momenti, konum vektörü $\vec{r}$ ile $\vec{F}$ vektörünün vektörel çarpımından elde edilir.

Etki çizgisi O noktasından geçen kuvvet O noktası etrafından bir moment oluşturmaz.



Sağ-el kuralı ile momentin yönünün belirlenmesi.

Momentumun momenti

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

Momentumun momenti (sistem)

$$\vec{H}_{sis} = \int_{sis} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV$$

$$\frac{d\vec{H}_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{sis} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV$$

Momentumun momentinin değişim hızı

Sistem için açısal momentum denklemi

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{H}_{sis}}{dt}$$

$$\sum \vec{M} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b \, dV + \int_{KY} \rho b(\vec{V}_b \cdot \vec{n}) \, dA$$

$$B = \vec{H} \qquad b = \vec{r} \times \vec{V} \qquad b = \vec{r} \times \vec{V}$$

$$\frac{d\vec{H}_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{KY} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_b \cdot \vec{n}) \, dA$$

Açısal momentum denklemi; Reynolds transport teoreminde B yerine açısal momentum $\vec{H}$, b yerine de birim kütle başına açısal momentum olan $\vec{r} \times \vec{V}$ yazılarak elde edilir.

$$\frac{d\vec{H}_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{KY} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_b \cdot \vec{n}) \, dA$$

Genel:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{KH} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{KY} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_b \cdot \vec{n}) \, dA$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{KY'ye etkiyen tüm}\\ \text{dış momentlerin}\\ \text{toplamı}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{KH içerisindeki}\\ \text{kütlenin açısal}\\ \text{momentumunun birim}\\ \text{zamandaki değişimi}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Kütle yoluyla}\\ \text{kontrol yüzeyinden}\\ \text{birim zamanda çıkan}\\ \text{net açısal momentum}\end{array}\right)$$

Sabit KH:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt}\int_{KH} (\vec{r} \times \vec{V})\rho \, dV + \int_{KY} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Özel durumlar

Daimi akışta kontrol hacmini dolduran kütlenin açısal momentumu sabit kalır, dolayısıyla kontrol hacmindeki açısal momentumunun zamanla değişimi sıfırdır. Bu durumda açısal momentum denklemi:

$$\textit{Daimi akış:} \qquad \sum \vec{M} = \int_{KY} (\vec{r} \times \vec{V})\rho(\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, dA$$

Dönen bir çim fıskiyesi açısal momentum denkleminin uygulamasına güzel bir örnektir.

Giriş ve çıkışta ortalama özellikler cinsinden açısal momentum denkleminin yaklaşık hali:

$$\sum \vec{M} \cong \frac{d}{dt}\int_{KH} (\vec{r} \times \vec{V})\rho\, dV + \sum_{\text{çıkan}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_{\text{giren}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V})$$

$$\textit{Daimi akış:} \qquad \sum \vec{M} = \sum_{\text{çıkan}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_{\text{giren}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V})$$

Daimi akışta bir kontrol hacmine etkiyen net moment, kontrol yüzeylerinden birim zamanda çıkan ve giren açısal momentumların arasındaki farka eşittir.

$$\sum M = \sum_{\text{çıkan}} r\dot{m}V - \sum_{\text{giren}} r\dot{m}V$$

Açısal momentum denkleminin skaler biçimi.

Dış Momentlerin Bulunmadığı Akışlar

$$\textit{Dış momentlerin olmaması hali:} \quad 0 = \frac{d\vec{H}_{\mathrm{KH}}}{dt} + \sum_{\text{çıkan}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_{\text{giren}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) \quad \textbf{(6–53)}$$

Dış momentlerin bulunmaması halinde bir kontrol hacminin içerisindeki kütlenin açısal momentumunun birim zamandaki değişimi; kontrol yüzeylerinden birim zamanda giren ve çıkan açısal momentumların arasındaki farka eşittir.

Kontrol hacminin kütle atalet momenti *I* 'nın sabit kalması durumunda yukarı denklemdeki ilk terim, kütle atalet momenti ile açısal ivmenin çarpımına eşit olur. Dolayısıyla bu durumda kontrol hacmi katı bir cisim olarak ele alınabilir.

$$\vec{M}_{\text{cisim}} = I_{\text{cisim}}\vec{\alpha} = \sum_{\text{giren}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V}) - \sum_{\text{çıkan}} (\vec{r} \times \dot{m}\vec{V})$$

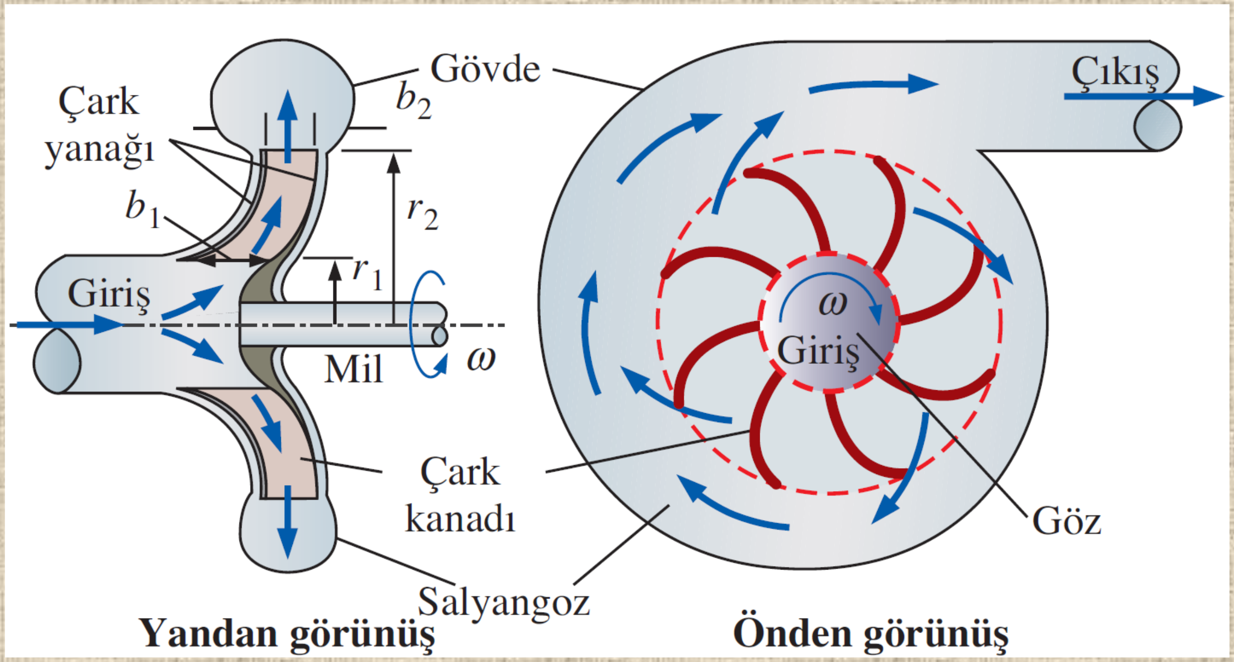
Bu yaklaşım uzay ya da hava araçlarının bir roketi, aracın hareket yönünden farklı bir yönde ateşlenlendiğinde oluşan açısal ivmesinin belirlenmesinde kullanılabilir.

Radyal-Akışlı Makinalar

Raydal-akışlı makinalar: Santrifuj pompa ve fan gibi dönel akışlı makinaların çoğunda dönme eksenine dik radyal doğrultuda akışlar görülür.

Eksenel-akışlı makinalar lineer momentum denklemi kullanılarak kolaylıkla analiz edilebilir.

Radyal-akışlı makinalara gelince, bunlar;akışkanın açısal momentumunda büyük değişiklikler söz konusu olduğundan en iyi şekilde açısal momentum denklemi kullanılarak analiz edilebilir.



Tipik bir santrifuj pompanın yandan ve önden görünüşü.

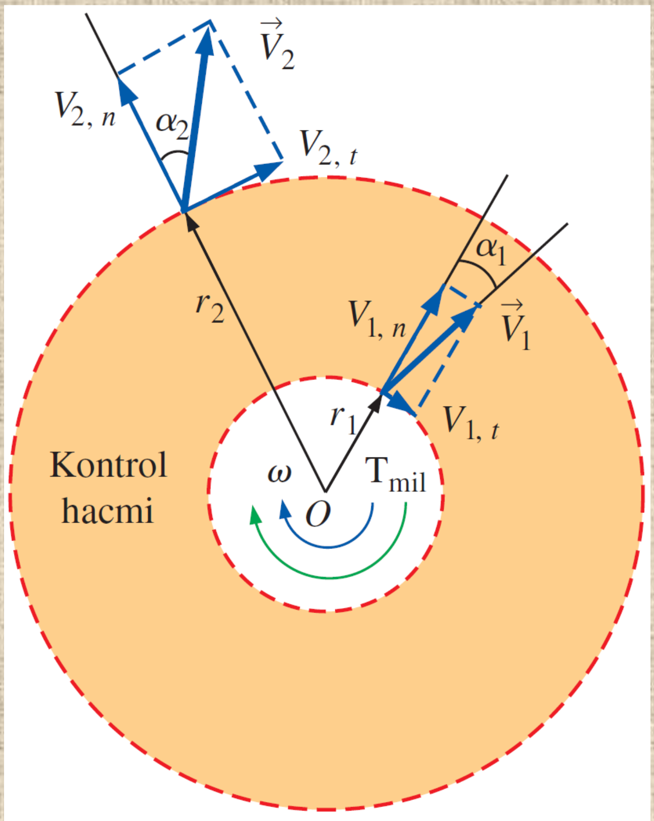
Daimi sıkıştırılamaz akış için kütlenin korunumu denklemi:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V} \quad \rightarrow \quad (2\pi r_1 b_1)V_{1,n} = (2\pi r_2 b_2)V_{2,n}$$

$$V_{1,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_1 b_1} \quad \text{ve} \quad V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2}$$

$$\sum M = \sum_{\text{çıkan}} r\dot{m}V - \sum_{\text{giren}} r\dot{m}V$$ Açısal momentum denklemi

$$T_{mil} = \dot{m}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t})$$ Euler 'in türbin denklemi



$$T_{mil} = \dot{m}(r_2 V_2 \sin \alpha_2 - r_1 V_1 \sin \alpha_1)$$

$V_{1,t} = \omega r_1$ $V_{2,t} = \omega r_2$ olduğunda:

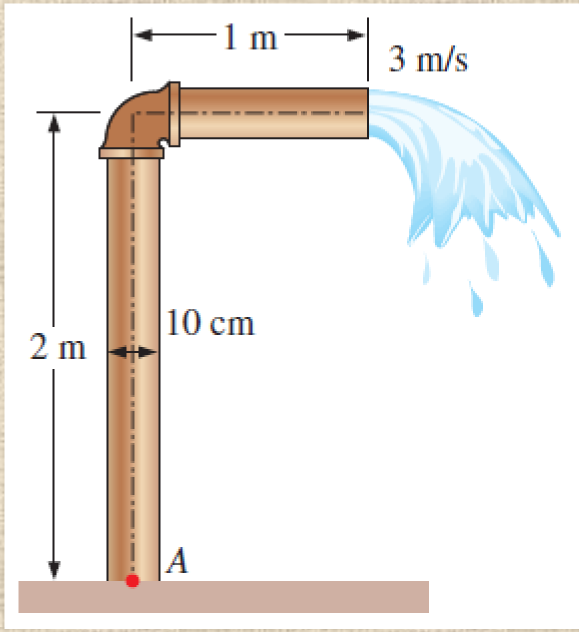
$$T_{mil,\,ideal} = \dot{m}\omega(r_2^2 - r_1^2)$$

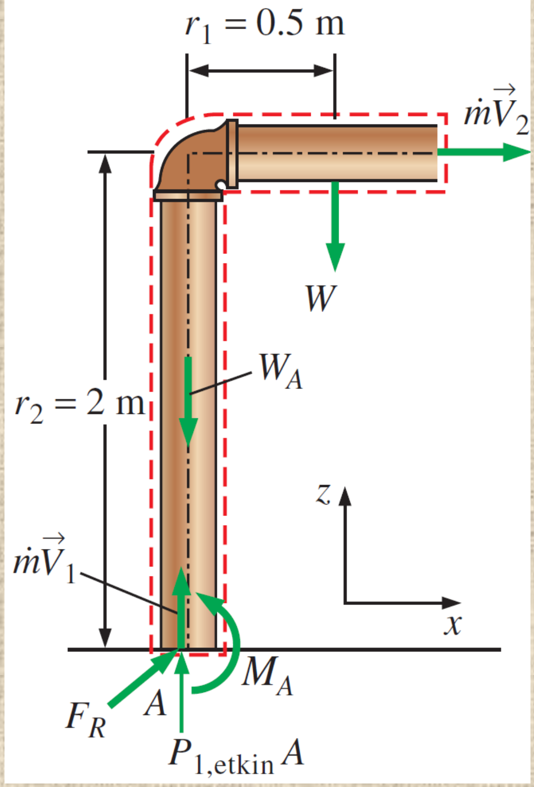
$$\dot{W}_{mil} = \omega T_{mil} = 2\pi\dot{n}T_{mil} \qquad \omega = 2\pi\dot{n}$$

Bir santrifuj pompanın çark bölümünü içerisine alacak biçimde seçilen halka şeklindeki kontrol hacmi.

ÖRNEK 6–8 Bir Su Borusunun Dip Kısmına Etkiyen Eğilme Momenti

Yeraltı suyu Şekil 6–39'da gösterildiği gibi çapı 10 cm, düşey uzunluğu 2 m ve yatay uzunluğu 1 m olan bir boru içerisinden pompalanmaktadır. Su ortalama 3 m/s hızla atmosfere boşalmaktadır. Suyla dolu yatay borunun bir metresinin kütlesi 12 kg'dır. Boru beton bir kaide ile zemine sabitlenmiştir. Borunun zemine bağlandığı noktadaki (*A* noktası) eğilme momentini ve bu noktadaki momenti sıfır yapacak yatay boru uzunluğununu hesaplayınız.





Analiz L şeklindeki borunun tamamını kontrol hacmi olarak alalım ve girişi 1, çıkışı da 2 ile gösterelim. Ayrıca *x*- ve *z*-ekseni de şekilde gösterildiği gibi alınmıştır. Kontrol hacmi ve referans koordinat sistemi sabittir.

Tek girişi ve tek çıkışı olan bu daimi-akışlı sistemde A_c = sabit olduğu için kütlenin korunumu denklemi $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$ olarak ifade edilebilir. Buna göre $V_1 = V_2 = V$ olur. Buradan akışın kütlesel debisi ve borunun yatay bölümünün ağırlığı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\dot{m} = \rho A_c V = (1000\ \text{kg/m}^3)[\pi(0.10\ \text{m})^2/4](3\ \text{m/s}) = 23.56\ \text{kg/s}$$

$$W = mg = (12\ \text{kg/m})(1\ \text{m})(9.81\ \text{m/s}^2)\left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 117.7\ \text{N}$$

A noktasında boruya etkiyen momentin belirlenebilmesi için bu noktaya göre tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının momentlerinin alınması gerekir. Bu bir daimi-akış problemidir ve tüm kuvvetler ve momentum akışları aynı düzlemdedir. Dolayısıyla bu durum için açısal momentum denklemi,

$$\sum M = \sum_{\text{çıkan}} r\dot{m}V - \sum_{\text{giren}} r\dot{m}V$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde *r* moment kolunun ortalama uzunluğu ve *V* ortalama hız olup saatin dönüş yönünün tersi yönde olan momentler pozitif; saatin dönüş yönündekiler ise negatiftir.

L şeklindeki borunun serbest cisim diyagramı Şekil 6–39'da verilmiştir. Dikkat edilirse *A* noktasından geçen tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının momenti sıfırdır. *A* noktasına göre moment oluşturan tek kuvvet yatay boru bölümünün *W* ağırlığı, *A* noktasına göre moment oluşturan tek momentum akışı ise çıkış akımıdır (her iki moment de saat dönüş yönünde olduğundan negatiftir). Bu durumda *A* noktasına göre açısal momentum denklemi aşağıdaki hale gelir:

$$M_A - r_1 W = -r_2 \dot{m} V_2$$

Buradan M_A çekilir ve verilen değerler yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca varılır:

$$M_A = r_1 W - r_2 \dot{m} V_2$$

$$= (0.5 \text{ m})(118 \text{ N}) - (2 \text{ m})(23.56 \text{ kg/s})(3 \text{ m/s})\left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg·m/s}^2}\right)$$

$$= \mathbf{-\ 82.5\ N \cdot m}$$

Sonucun negatif çıkması, M_A için kabul edilen yönün yanlış olduğunu; yönün tam tersine çevrilmesi gerektiğini göstermektedir. Dolayısıyla borunun gövdesine saatin dönüş yönünde 82.5 N·m büyüklüğünde bir moment etkimektedir. Bu da beton temelin boru gövdesine, çıkış akımı nedeniyle saat yönünde uygulanan 82.5 N·m momente karşı koyacak bir moment uygulamasını gerektirir.

Yatay borunun 1 m'sinin ağırlığı $w = W/L = 117.7$ N/m olarak elde edilir. Dolayısıyla (L) uzunluğundaki bir borunun toplam ağırlığı Lw ve moment kolu da $r_1 = L/2$ olur. Borunun gövdesindeki momentin ortadan kalkması için gerekli yatay boru uzunluğu; M_A'yı sıfıra eşitlemek ve denklemden L uzunluğunu çekerek verilen değerleri yerine koymak suretiyle bulunur:

$$0 = r_1 W - r_2 \dot{m} V_2 \quad \rightarrow \quad 0 = (L/2)Lw - r_2 \dot{m} V_2$$

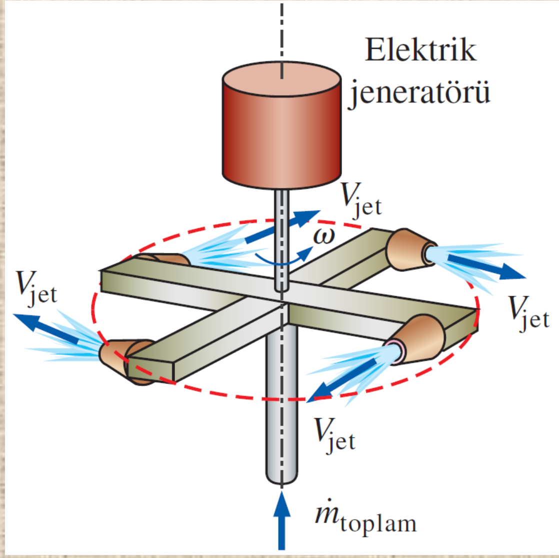
veya

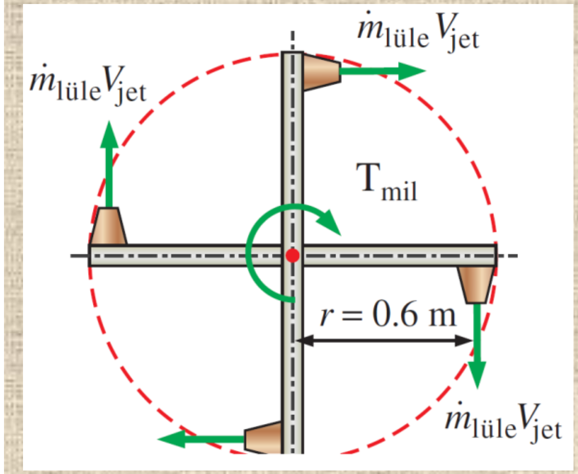
$$L = \sqrt{\frac{2 r_2 \dot{m} V_2}{w}} = \sqrt{\frac{2(2 \text{ m})(23.56 \text{ kg/s})(3 \text{ m/s})}{117.7 \text{ N/m}}\left(\frac{\text{N}}{\text{kg·m/s}^2}\right)} = \mathbf{1.55\ m}$$

İrdeleme Borunun ağırlığı ile çıkış akımının A noktasında zıt yönde momente neden olduklarına dikkat ediniz. Bu örnek, dinamik bir analiz yapılırken ve kritik bir en-kesitte boru malzemesindeki gerilme hesaplanırken, akımların momentumlarına ait momentlerin iyi hesaplanmasının önemini göstermektedir.

ÖRNEK 6–9 Bir Fıskiye Sisteminden Güç Üretimi

Dört özdeş kolu bulunan büyük bir çim fıskiyesi (Şekil 6–40), Şekil 6–41'de gösterildiği gibi dönmekte olan tepesine bir jeneratör bağlanarak elektrik üretmek üzere bir türbine dönüştürülmek istenmektedir. Su fıskiyeye dönme ekseninden 20 L/s debi ile girmekte ve lüleleri teğetsel doğrultuda terk etmektedir. Fıskiye yatay düzlemde 300 devir/dakika hızla dönmektedir. Her bir jetin çapı 1 cm olup her bir lülenin merkezinden dönme eksenine olan dik mesafe 0.6 m'dir. Buna göre üretilecek elektrik gücünü hesaplayınız.





Çoğu çim fıskiyesinde suyu geniş bir alana dağıtmak için tasarlanmış dönen başlıklar mevcuttur.

Analiz Fıskiyenin kollarını içine alan diski, sabit bir kontrol hacmi olarak seçelim.

Bu daimi akışlı sistem için kütlenin korunumu denklemi $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_{toplam}$ şeklinde yazılabilir. Lülelerin dördünün de özdeş olduğu dikkate alındığında $\dot{m}_{lüle} = \dot{m}_{toplam}/4$ ya da suyun yoğunluğu sabit olduğu göz önüne alınırsa $\dot{V}_{lüle} = \dot{V}_{toplam}/4$ ifadesi yazılabilir. Su jetinin lüleye göre ortalama bağıl çıkış hızı aşağıdaki gibi bulunur:

$$V_{jet,b} = \frac{\dot{V}_{lüle}}{A_{jet}} = \frac{5 \text{ L/s}}{[\pi(0.01 \text{ m})^2/4]}\left(\frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}}\right) = 63.66 \text{ m/s}$$

Lülelerin açısal ve teğetsel hızları ise,

$$\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(300 \text{ devir/dakika})\left(\frac{1 \text{ dakika}}{60 \text{ s}}\right) = 31.42 \text{ rad/s}$$

$$V_{lüle} = r\omega = (0.6 \text{ m})(31.42 \text{ rad/s}) = 18.85 \text{ m/s}$$

olarak hesaplanabilir. Dolayısıyla su da lüleyi terk etmeden önce lüle ile birlikte 18.85 m/s hızla zıt yönde hareket etmektedir. Buna göre su jetinin ortalama mutlak hızı (zemindeki sabit bir noktaya göre bağıl hızı), bağıl hızı (lüleye göre olan jet hızı) ile lülenin mutlak hızlarının vektörel toplamına eşit olur:

$$\vec{V}_{jet} = \vec{V}_{jet,b} + \vec{V}_{lüle}$$

Bu üç hız da teğetsel doğrultudadır. Buna göre jetin akış yönü pozitif seçilerek yukarıdaki denklem skaler büyüklükler cinsinden yazılabilir:

$$V_{jet} = V_{jet,b} - V_{lüle} = 63.66 - 18.85 = 44.81 \text{ m/s}$$

Bunun döngüsel daimi bir akış problemi ve tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının aynı düzlem üzerinde olduğu göz önüne alındığında, açısal momentum denklemi $\sum M = \sum_{\text{çıkan}} r\dot{m}V - \sum_{\text{giren}} r\dot{m}V$ şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadede *r* moment kolu olup, saatin tersi yönündeki bütün momentler pozitif; saat yönündeki bütün momentlerin ise negatiftir.

Fıskiyenin kollarını da içine alan diskin serbest cisim diyagramı Şekil 6–41'de gösterilmiştir. Dönme ekseninden geçen tüm kuvvetlerin ve momentum akışlarının momentlerinin sıfır olduğuna dikkat ediniz. Lüleleri terk eden su jetlerinin oluşturduğu momentum akışları saatin dönüş yönünde bir moment meydana getirir. Ayrıca jeneratörün kendisi de kontrol hacmi üzerinde yine saatin dönüş yönünde bir moment oluşturmaktadır. Dolayısıyla bu iki moment de negatiftir. Böylece dönme eksenine göre açısal momentum denklemi,

$$-\mathrm{T}_{\text{mil}} = -4r\dot{m}_{\text{lüle}}V_{\text{jet},\,b} \qquad \text{veya} \qquad \mathrm{T}_{\text{mil}} = r\dot{m}_{\text{toplam}}V_{\text{jet},\,b}$$

halini alır. Verilen değerler yerine yazıldığında, mil tarafından aktarılan tork aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathrm{T}_{\text{mil}} = r\dot{m}_{\text{toplam}}V_{\text{jet}} = (0.6\text{ m})(20\text{ kg/s})(44.81\text{ m/s})\left(\frac{1\text{ N}}{1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}\right) = 537.7\text{ N}\cdot\text{m}$$

Burada $\dot{m}_{\text{toplam}} = \rho\dot{V}_{\text{toplam}} = (1\text{ kg/L})(20\text{ L/s}) = 20\text{ kg/s}$ olarak alınmıştır. Dolayısıyla üretilen güç

$$\dot{W} = \omega\mathrm{T}_{\text{mil}} = (31.42\text{ rad/s})(537.7\text{ N}\cdot\text{m})\left(\frac{1\text{ kW}}{1000\text{ N}\cdot\text{m/s}}\right) = \mathbf{16.9\text{ kW}}$$

olarak elde edilir. Başka bir ifadeyle, bu fıskiye tipi türbinin 16.9 kW güç üretme potansiyeli bulunmaktadır.

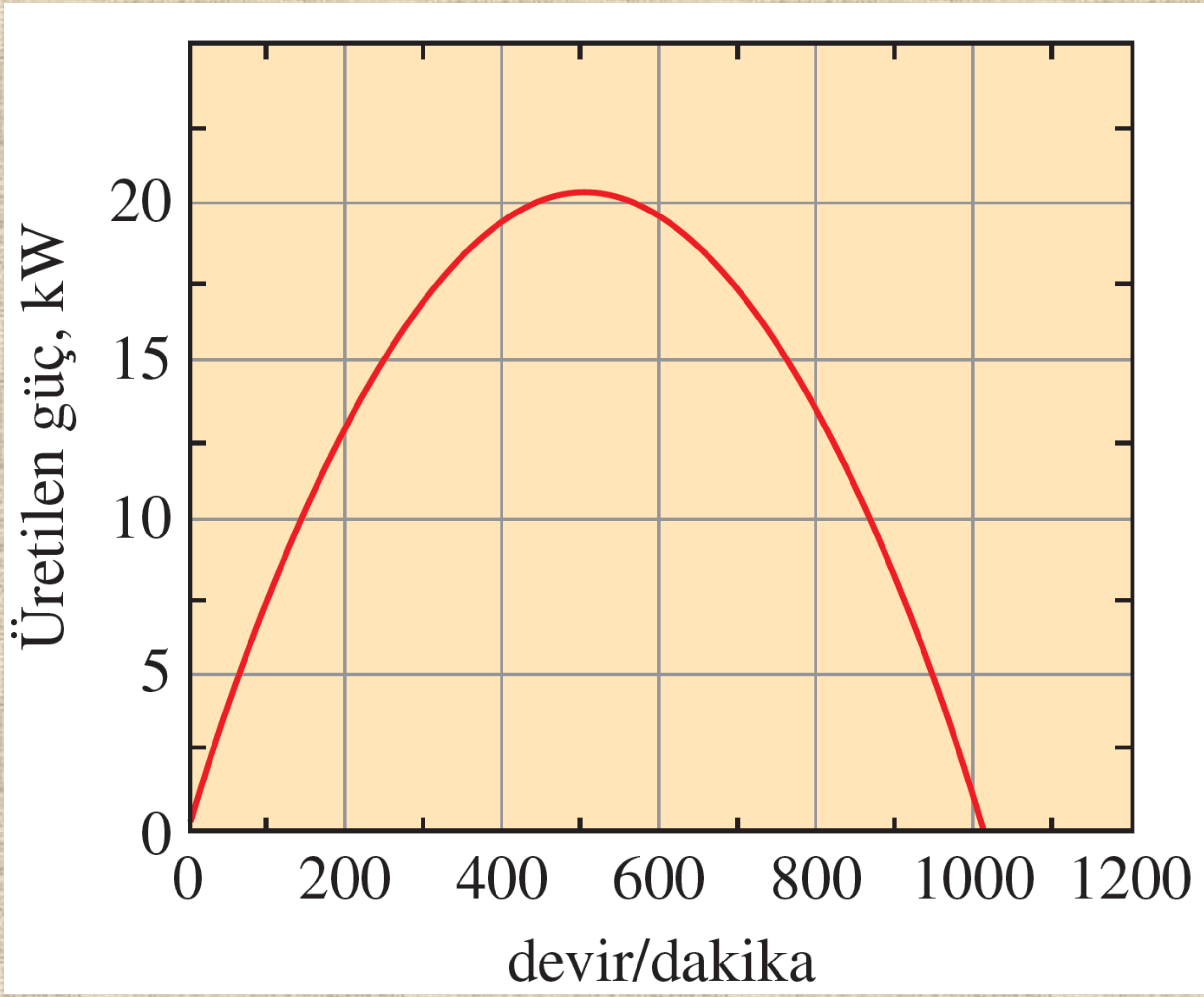
İrdeleme Elde edilen sonucu iki limit durumu göz önüne alarak inceleyelim. Bunlardan ilkinde fıskiyenin takılı kaldığını ve dolayısıyla açısal hızının sıfır olduğunu varsayalım. Bu halde $V_{\text{lüle}} = 0$ olacağı için oluşan moment maksimum olacaktır. Dolayısıyla bu durumda $V_b = V_{\text{jet}} = 63.66$ m/s ve $T_{\text{mil, maks}} = 764$ N·m elde edilir. Ancak mil dönmediği için üretilen güç de sıfır olacaktır.

İkinci halde ise mil jeneratörden ayrılacak (dolayısıyla hem tork hem de güç üretimi sıfır olacaktır) ve mil bir denge hızına ulaşıncaya kadar hızlanacaktır. Açısal momentum denkleminde $T_{\text{mil}} = 0$ yazılırsa; jetin mutlak hızı (yani zemindeki bir gözlemciye göre olan hızı) sıfır olur: $V_{\text{jet}} = 0$. Bu durumda jetin bağıl hızı $V_{\text{jet},b}$ ile lülenin mutlak hızı $V_{\text{lüle}}$ birbirine eşit, ancak zıt yönlü olur. Buna göre fıskiyenin açısal hızı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\dot{n} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V_{\text{lüle}}}{2\pi r} = \frac{63.66\ \text{m/s}}{2\pi(0.6\ \text{m})}\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{dakika}}\right) = 1013\ \text{devir/dakika}$$

Elbette $T_{\text{mil}} = 0$ olması ancak ideal, sürtünmesiz lüle (yani yüksüz bir türbin olarak %100 verimli lüle) ile mümkündür. Gerçekte suyun, milin ve havanın sürtünme etkileri nedeniyle bir direnç momenti oluşur.

Üretilen gücün açısal hız ile değişimi Şekil 6–42'de çizilmiştir. Üretilen gücün devir sayısı ile artarak maksimum değerine ulaştığına (bu örnek için 500 devir/dakika) ve ardından tekrar azaldığına dikkat ediniz. Üretilen gerçek güç ise, jeneratördeki kayıpların (Bölüm 5) yanında lüle içerisindeki akışkan sürtünmeleri (Bölüm 8), mildeki sürtünme etkileri ve hava direnci gibi diğer bazı tersinmez kayıplar nedeniyle daha az olacaktır.



Örnek 6–9'daki türbinden üretilen gücün açısal hız ile değişimi.

Özet

- Newton’un Yasaları
- Kontrol Hacmi Seçimi
- Kontrol Hacmi Üzerine Etkiyen Kuvvetler
- Lineer Momentum Denklemi
  - ✓ Özel Durumlar
  - ✓ Momentum-Akısı Düzeltme Faktörü, β
  - ✓ Daimi Akış
  - ✓ Dış Kuvvetlerin Bulunmadığı Akışlar
- Dönel Hareketin ve Açısal Momentumun Gözden Geçirilmesi
- Açısal Momentum Denklemi
  - ✓ Özel Durumlar
  - ✓ Dış Momentlerin Bulunmadığı Akışlar
  - ✓ Radyal-Akışlı Makinalar